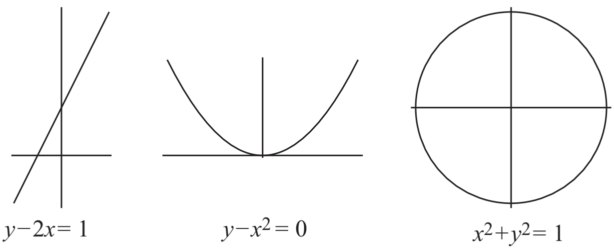
1

Καμπύλες στο επίπεδο και στο χώρο

Στο κεφάλαιο αυτό θα συζητήσουμε δύο μαθηματικές διατυπώσεις της διαισθητικής έννοιας της καμπύλης. Η ακριβής σχέση μεταξύ τους προκύπτει τελικά ότι είναι πολύ λεπτή, έτσι θα ξεκινήσουμε παραθέτοντας κάποια παραδείγματα από την κάθε μία μορφή καμπυλών όπως επίσης και πρακτικούς τρόπους για να περνάμε από την μια μορφή καμπύλης στην άλλη.

1.1 Τι είναι μία καμπύλη;

Εάν μας ζητηθεί να δώσουμε το παράδειγμα μιας καμπύλης, μπορούμε να σκεφτούμε μια ευθεία, έστω την $y - 2x = 1$ (αν και αυτή δεν είναι «καμπυλωμένη»!), ή έναν κύκλο, έστω τον $x^2 + y^2 = 1$, ή ίσως μια παραβολή, έστω την $y - x^2 = 0$.



Σχήμα 1.1.

Όλες αυτές οι καμπύλες περιγράφονται από την καρτεσιανή τους εξίσωση

$$f(x, y) = c,$$

όπου f είναι συνάρτηση των x και y και c είναι σταθερά. Από αυτή την άποψη, μία καμπύλη είναι ένα σύνολο σημείων, δηλαδή

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}. \tag{1.1}$$

Όλα τα παραπάνω είναι παραδείγματα καμπυλών του επιπέδου $\mathbb{R}^2$, αλλά μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε καμπύλες στον $\mathbb{R}^3$ – για παράδειγμα, ο άξονας x του $\mathbb{R}^3$ είναι η ευθεία που περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$y = 0, \quad z = 0,$$

και γενικότερα, μια καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ μπορεί να περιγραφεί από ένα ζεύγος εξισώσεων

$$f_1(x, y, z) = c_1, \ \ f_2(x, y, z) = c_2.$$

Καμπύλες του είδους αυτού καλούνται *καμπύλες στάθμης*. Η ιδέα πίσω από την ορολογία αυτή είναι ότι η καμπύλη στην Εξ. 1.1 για παράδειγμα, είναι το σύνολο των σημείων (x, y) του επιπέδου στα οποία η ποσότητα $f(x, y)$ λαμβάνει την τιμή (βρίσκεται στην στάθμη) c.

Όμως, υπάρχει και άλλος τρόπος για να σκεφτούμε τις καμπύλες και ο οποίος αποδεικνύεται πιο χρήσιμος σε πολλές περιπτώσεις. Κατά τον τρόπο αυτό, μία καμπύλη θεωρείται ως ο δρόμος που χαράσσεται από ένα κινούμενο σημείο. Έτσι, εάν $\boldsymbol{\gamma}(t)$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου στον χρόνο t, η καμπύλη περιγράφεται από μία συνάρτηση $\boldsymbol{\gamma}$ της παραμέτρου t με διανυσματικές τιμές (στον $\mathbb{R}^2$ αν πρόκειται για επίπεδη καμπύλη, στον $\mathbb{R}^3$ αν πρόκειται για καμπύλη του χώρου). Χρησιμοποιούμε αυτή την ιδέα για να δώσουμε τον πρώτο αυστηρό ορισμό της καμπύλης του $\mathbb{R}^n$ (μας ενδιαφέρουν μόνο οι περιπτώσεις $n = 2$ ή 3, αλλά είναι βολικό να πραγματευόμαστε και τις δύο περιπτώσεις ταυτόχρονα).

Ορισμός 1.1.1

Μια *παραμετρισμένη* καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ είναι μια απεικόνιση $\boldsymbol{\gamma} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$, όπου α, β είναι τέτοια ώστε $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$.

Ο συμβολισμός (α, β) δηλώνει το ανοικτό διάστημα

$$(\alpha, \beta) = \{t \in \mathbb{R} \mid \alpha < t < \beta\}.$$

Μια παραμετρισμένη καμπύλη της οποίας η εικόνα περιέχεται σε μια καμπύλη στάθμης $\mathcal{C}$ ονομάζεται *παραμέτριση* (του τμήματος) της $\mathcal{C}$. Για εξάσκηση, δίνουμε τα ακόλουθα παραδείγματα που διευκρινίζουν τον τρόπο με τον οποίο περνάμε από καμπύλες στάθμης σε παραμετρισμένες καμπύλες και αντιστρόφως.

Παράδειγμα 1.1.2

Ας βρούμε μια παραμέτριση $\boldsymbol{\gamma}(t)$ της παραβολής $y = x^2$. Εάν

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)),$$

οι συνιστώσες γ_1 και γ_2 θα πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(t)^2 \tag{1.2}$$

για όλες τις τιμές του t στο διάστημα (α, β) που ορίζεται η $\boldsymbol{\gamma}$, (ακόμα δεν έχει αποφασιστεί ποιο είναι αυτό) ενώ ιδεωδώς κάθε σημείο της παραβολής πρέπει να έχει συντεταγμένες

$(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ για κάποιο $t \in (\alpha, \beta)$. Βεβαίως, υπάρχει μια προφανής λύση στην Εξ. 1.2: $\gamma_1(t) = t,\ \gamma_2(t) = t^2$. Για να πάρουμε κάθε σημείο πάνω στην παραβολή, πρέπει να επιτρέψουμε στο t να πάρει κάθε πραγματική τιμή (αφού η τετμημένη της $\boldsymbol{\gamma}(t)$ είναι απλώς t, και η τετμημένη κάθε σημείου της παραβολής μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός), κατά συνέπεια πρέπει να πάρουμε $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Έτσι, η επιθυμητή παραμέτριση είναι

$$\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t^2).$$

Αλλά αυτή δεν είναι η μόνη παραμέτριση της παραβολής. Μία άλλη επιλογή είναι η $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t^3, t^6)$ (με $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$). Ακόμα μία είναι η $(2t, 4t^2)$, και βεβαίως υπάρχουν και (άπειρες) άλλες. Συμπεραίνουμε ότι η παραμέτριση μια δεδομένης καμπύλης στάθμης δεν είναι μοναδική.

Παράδειγμα 1.1.3

Ας επιχειρήσουμε τώρα να παραμετρίσουμε τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$. Είναι δελεαστικό να πάρουμε $x = t$ όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, έτσι ώστε $y = \sqrt{1 - x^2}$ (θα μπορούσαμε επίσης να είχαμε πάρει $y = -\sqrt{1 - x^2}$). Παίρνουμε τότε την παραμέτριση $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, \sqrt{1 - t^2})$. Αυτή όμως είναι η παραμέτριση του άνω ημικυκλίου, διότι $\sqrt{1 - x^2} \geq 0$. Ομοίως, εάν παίρναμε $y = -\sqrt{1 - x^2}$, θα είχαμε καλύψει μόνο το κάτω ημικύκλιο.

Εάν θέλουμε μία παραμέτριση όλου του κύκλου, πρέπει να προσπαθήσουμε πάλι. Χρειαζόμαστε συναρτήσεις $\gamma_1(t)$ και $\gamma_2(t)$ τέτοιες ώστε

$$\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2 = 1 \tag{1.3}$$

για όλα τα $t \in (\alpha, \beta)$, και τέτοιες ώστε *κάθε* σημείο του κύκλου να είναι ίσο με $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ για κάποιο $t \in (\alpha, \beta)$. Υπάρχει μια προφανής λύση στην Εξ. 1.3: $\gamma_1(t) = \cos t$, $\gamma_2(t) = \sin t$ (εφόσον $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ για κάθε t). Μπορούμε να πάρουμε $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$, αν και αυτό είναι υπερβολικό: είναι αρκετό να θεωρήσουμε κάθε ανοικτό διάστημα μήκους 2π.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει πώς περνάμε από μια παραμετρισμένη καμπύλη σε μια καμπύλη στάθμης.

Παράδειγμα 1.1.4

Ας πάρουμε την παραμετρισμένη καμπύλη (που ονομάζεται *αστροειδές*)

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Εφόσον για κάθε t είναι $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, οι συντεταγμένες $x = \cos^3 t$ και $y = \sin^3 t$ του σημείου $\boldsymbol{\gamma}(t)$ ικανοποιούν την

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

Αυτή η καμπύλη στάθμης ταυτίζεται με την εικόνα της απεικόνισης $\boldsymbol{\gamma}$. Δείτε την Άσκηση 1.1.5 για μια εικόνα του αστροειδούς.

Στο βιβλίο αυτό θα μελετούμε καμπύλες (και αργότερα επιφάνειες) χρησιμοποιώντας μεθόδους του λογισμού. Τέτοιες καμπύλες και επιφάνειες θα περιγραφούν σχεδόν αποκλειστικά με *λείες* συναρτήσεις: μία συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ ονομάζεται λεία εάν η παράγωγος $\frac{d^n f}{dt}$ υπάρχει για κάθε $t \in (\alpha, \beta)$. Εάν οι $f(t)$ και $g(t)$ είναι λείες συναρτήσεις, προκύπτει από γνωστά αποτελέσματα του λογισμού ότι το άθροισμα $f(t) + g(t)$, το γινόμενο $f(t)g(t)$, το πηλίκο $f(t)/g(t)$, και η σύνθεση $f(g(t))$ είναι λείες συναρτήσεις, εκεί που ορίζονται.

Για να παραγωγίσουμε μια διανυσματική συνάρτηση όπως η $\boldsymbol{\gamma}$ (όπως στον Ορισμό 1.1.1), παραγωγίζουμε τις συνιστώσες συναρτήσεις της. Εάν

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$$

τότε

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \ldots, \frac{d\gamma_n}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{\gamma}}{dt^2} = \left(\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}, \ldots, \frac{d^2\gamma_n}{dt^2}\right), \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Για οικονομία χώρου, θα συμβολίζουμε συχνά την $d\boldsymbol{\gamma}/dt$ με $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$, την $d^2\boldsymbol{\gamma}/dt^2$ με $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$, κλπ.

Λέμε ότι η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι *λεία* εάν κάθε συνιστώσα της είναι λεία, δηλαδή εάν όλες οι παράγωγοι $d\gamma_i/dt, d^2\gamma_i/dt^2, \ldots$ υπάρχουν, για $i = 1, 2, \ldots, n$. Ισοδύναμα, κάθε $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ της $\boldsymbol{\gamma}$ είναι λεία.

Στο εξής, όλες οι παραμετρισμένες καμπύλες που μελετώνται στο βιβλίο αυτό θα θεωρούνται λείες.

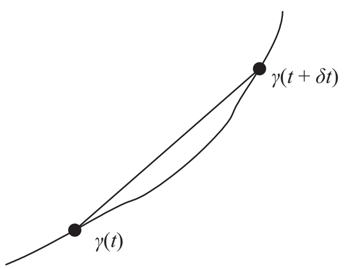
Ορισμός 1.1.5

Εάν $\boldsymbol{\gamma}(t)$ είναι μια παραμετρισμένη καμπύλη, η πρώτη της παράγωγος καλείται *εφαπτόμενο διάνυσμα* της $\boldsymbol{\gamma}$ στο σημείο $\boldsymbol{\gamma}(t)$.

Για να δείτε τον λόγο αυτής της ορολογίας, παρατηρήστε ότι το διάνυσμα

$$\frac{\boldsymbol{\gamma}(t + \delta t) - \boldsymbol{\gamma}(t)}{\delta t}$$

είναι παράλληλο στη χορδή που συνδέει τα σημεία $\boldsymbol{\gamma}(t)$ και $\boldsymbol{\gamma}(t + \delta t)$ της εικόνας $\mathcal{C}$ της $\boldsymbol{\gamma}$ (βλ. Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2. Η χορδή που συνδέει δύο σημεία μιας καμπύλης.

Καθώς το δt τείνει στο μηδέν, το μήκος της χορδής τείνει επίσης στο μηδέν, αλλά αναμένουμε ότι η *κατεύθυνση* της χορδής γίνεται παράλληλη με την κατεύθυνση της εφαπτομένης της $\mathcal{C}$ στο $\boldsymbol{\gamma}(t)$. Αλλά η κατεύθυνση της χορδής είναι αυτή του διανύσματος

$$\frac{\boldsymbol{\gamma}(t+\delta t)-\boldsymbol{\gamma}(t)}{\delta t},$$

που τείνει στο $d\boldsymbol{\gamma}/dt$ καθώς το δt τείνει στο μηδέν. Βέβαια, αυτό καθορίζει μία καλά ορισμένη κατεύθυνση εφαπτόμενη στην καμπύλη μόνο εάν η $d\boldsymbol{\gamma}/dt$ είναι διάφορη του μηδενός. Εάν η συνθήκη αυτή ισχύει, ορίζουμε την *εφαπτόμενη ευθεία* της $\mathcal{C}$ στο σημείο $\boldsymbol{p}$ της $\mathcal{C}$ να είναι η ευθεία που περνά από το $\boldsymbol{p}$ και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $d\boldsymbol{\gamma}/dt$.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι διαισθητικά προφανές:

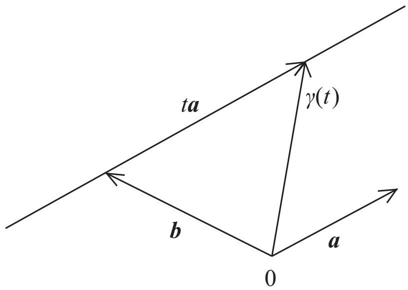
Πρόταση 1.1.6

Εάν το εφαπτόμενο διάνυσμα μιας παραμετρισμένης καμπύλης είναι σταθερό, η εικόνα της καμπύλης είναι (τμήμα) ευθεία(ς).

Απόδειξη Εάν $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)=\boldsymbol{a}$ όπου $\boldsymbol{a}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα, ολοκληρώνοντας τις συνιστώσες συναρτήσεις παίρνουμε,

$$\boldsymbol{\gamma}(t)=\int\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}dt=\int\boldsymbol{a}\,dt=t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

όπου $\boldsymbol{b}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα. Εάν $\boldsymbol{a}\neq 0$, η παραπάνω είναι η παραμετρική εξίσωση μιας ευθείας παράλληλης με το $\boldsymbol{a}$ και διερχόμενης από το σημείο με διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{b}$:



Σχήμα 1.3.

Εάν $\boldsymbol{a}=0$, η εικόνα της $\boldsymbol{\gamma}$ είναι ένα μόνο σημείο (δηλαδή, το $\boldsymbol{b}$). □

Πριν προχωρήσουμε περισσότερο στην μελέτη των καμπυλών, θα ήταν χρήσιμο να επισημάνουμε μία εν δυνάμει πηγή σύγχυσης στη συζήτηση των παραμετρισμένων καμπυλών, που αφορά στην ερώτηση τι είναι ένα «σημείο» μιας τέτοιας καμπύλης; Η δυσκολία φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.1.7

Η *κοχλιοειδής*[1] είναι η παραμετρισμένη καμπύλη

$$\boldsymbol{\gamma}(t)=((1+2\cos t)\cos t,(1+2\cos t)\sin t),\quad t\in\mathbb{R}$$

[1]Σ.τ.Μ. Limacon από το λατινικό limax=σαλιγκάρι, κοχλίας. Περισσότερες πληροφορίες για την κοχλιοειδή μπορείτε να βρείτε λ.χ. στην ιστοσελίδα http://mathworld.wolfram.com/Limacon.html

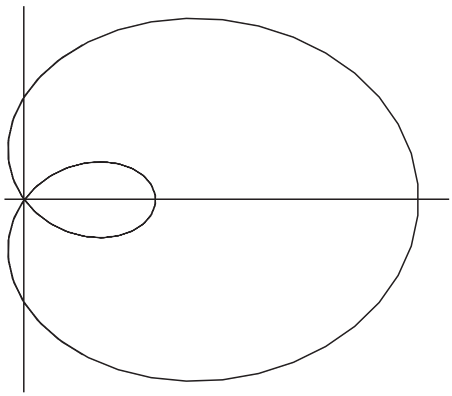
(βλ. Σχήμα 1.4). Παρατηρήστε ότι η $\boldsymbol{\gamma}$ έχει μία αυτοτομή στην αρχή, με την έννοια ότι $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ για $t = 2\pi/3$ και για $t = 4\pi/3$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι το

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (-\sin t - 2\sin 2t, \cos t + 2\cos 2t).$$

Ειδικότερα,

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(2\pi/3) = (\sqrt{3}/2, -3/2), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(4\pi/3) = (-\sqrt{3}/2, -3/2).$$

Άρα, ποιο είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της κοχλιοειδούς στην αρχή; Αν και η $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ είναι καλά ορισμένη για όλα τα t, παίρνει διαφορετικές τιμές στα $t = 2\pi/3$ και $t = 4\pi/3$, που αντιστοιχούν και τα δύο στο σημείο $\mathbf{0}$ της καμπύλης.



Σχήμα 1.4. Κοχλιοειδής.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι πρέπει να είμαστε προσεκτικοί όταν αναφερόμαστε σε «σημείο» μιας παραμετρισμένης καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$: μιλώντας αυστηρά, αυτό πρέπει να είναι το ίδιο με την τιμή της παραμέτρου t της καμπύλης, και όχι με το αντίστοιχο γεωμετρικό σημείο $\boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n$. Επομένως, ο Ορισμός 1.1.5 πρέπει να διαβαστεί καλύτερα ως εξής: «Εάν η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι παραμετρισμένη καμπύλη, η πρώτη παράγωγός της $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ ονομάζεται το *εφαπτόμενο διάνυσμα* της $\boldsymbol{\gamma}$ για την τιμή της παραμέτρου t». Όμως, μας φαίνεται ότι με το να επιμείνουμε σε αυτή την διάκριση απομακρυνόμαστε από την γεωμετρική θεώρηση των καμπυλών. Συνεπώς, θα επαναλαμβάνουμε μερικές φορές αυτό το «σφάλμα» του Ορισμού 1.1.5, θεωρώντας ότι δεν θα οδηγεί σε σύγχυση αν έχουν ληφθεί υπόψη τα παραπάνω σχόλια.

Ασκήσεις

1.1.1 Είναι η $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t^2, t^4)$ παραμέτριση της παραβολής $y = x^2$;

1.1.2 Βρείτε παραμετρίσεις των ακόλουθων καμπυλών στάθμης:

(i) $y^2 - x^2 = 1$,

(ii) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

1.1.3 Βρείτε τις καρτεσιανές εξισώσεις των ακόλουθων παραμετρισμένων καμπυλών:

$$\text{(i) } \boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t),$$
$$\text{(ii) } \boldsymbol{\gamma}(t) = (e^t, t^2).$$

1.1.4 Υπολογίστε τα εφαπτόμενα διανύσματα των καμπυλών της Άσκησης 1.1.3.

1.1.5 Σχεδιάστε πρόχειρα το αστροειδές του Παραδείγματος 1.1.4. Υπολογίστε το εφαπτόμενο διάνυσμά του σε κάθε σημείο. Σε ποια σημεία μηδενίζονται τα εφαπτόμενα διανύσματα;

1.1.6 Θεωρήστε την έλλειψη

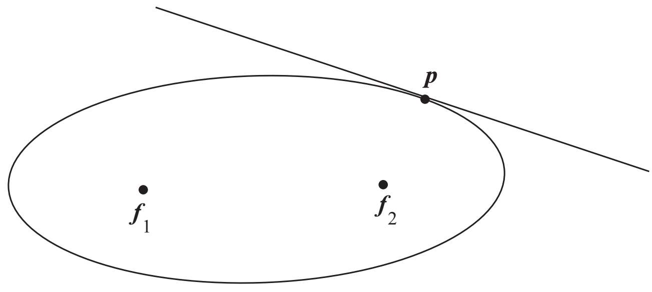
$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1,$$

όπου $p > q > 0$ (δείτε παρακάτω). Η *εκκεντρότητα* της έλλειψης είναι η $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{p^2}{q^2}}$ και τα σημεία $(\pm\epsilon p, 0)$ του άξονα x ονομάζονται *εστίες* της έλλειψης, και τις συμβολίζουμε με $\boldsymbol{f}_1$ και $\boldsymbol{f}_2$. Βεβαιώστε ότι η $\boldsymbol{\gamma}(t) = (p\cos t, q\sin t)$ είναι παραμέτριση της έλλειψης. Αποδείξτε ότι:

(i) Το άθροισμα των αποστάσεων του τυχόντος σημείου $\boldsymbol{p}$ της έλλειψης από τις $\boldsymbol{f}_1$ και $\boldsymbol{f}_2$ δεν εξαρτάται από το $\boldsymbol{p}$.

(ii) Το γινόμενο των αποστάσεων της εφαπτόμενης ευθείας τυχόντος σημείου $\boldsymbol{p}$ της έλλειψης από τις $\boldsymbol{f}_1$ και $\boldsymbol{f}_2$ δεν εξαρτάται από το $\boldsymbol{p}$.

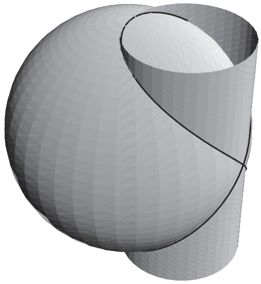
(iii) Εάν $\boldsymbol{p}$ είναι τυχόν σημείο της έλλειψης, η ευθεία που ενώνει την εστία $\boldsymbol{f}_1$ και το $\boldsymbol{p}$ και εκείνη που ενώνει την $\boldsymbol{f}_2$ και το $\boldsymbol{p}$, σχηματίζουν ίσες γωνίες με την εφαπτόμενη ευθεία της έλλειψης στο $\boldsymbol{p}$.



Σχήμα 1.5.

1.1.7 Ένα *κυκλοειδές* είναι η επίπεδη καμπύλη που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας ενός κύκλου όπως αυτός κυλά χωρίς να γλιστρά πάνω σε μία ευθεία. Δείξτε ότι, εάν η ευθεία είναι ο άξονας x και ο κύκλος έχει ακτίνα $a > 0$, τότε το κυκλοειδές δέχεται την παραμέτριση

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t).$$



Σχήμα 1.6.

1.1.8 Έστω η σφαίρα ακτίνας 1 με κέντρο το $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ και έστω ο κυκλικός κύλινδρος ακτίνας $\frac{1}{2}$ του οποίου ο κατακόρυφος άξονας είναι ο z (Σχήμα 1.6). Δείξτε ότι η $\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(\cos^2 t - \frac{1}{2}, \sin t \cos t, \sin t\right)$ είναι παραμέτριση της καμπύλης που ορίζει η τομή των δύο επιφανειών. (Αυτή ονομάζεται *καμπύλη του Viviani*[2]).

1.1.9 Η *κάθετη ευθεία* μιας καμπύλης στο σημείο $\boldsymbol{p}$ είναι η ευθεία που περνά από το $\boldsymbol{p}$ ορθογώνια στην εφαπτομένη ευθεία στο $\boldsymbol{p}$. Βρείτε την εφαπτομένη και την κάθετη της καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}(t) = (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$ στο σημείο που αντιστοιχεί στο $t = \pi/4$.

1.2 Μήκος τόξου

Θυμόμαστε ότι εάν $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$, το *μήκος* του είναι το

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Εάν $\boldsymbol{u}$ είναι ένα άλλο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$, το $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$ είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία του $\mathbb{R}^n$ με διανύσματα θέσης $\boldsymbol{u}$ και $\boldsymbol{v}$.

Για να βρούμε έναν τύπο για το μήκος μιας παραμετρισμένης καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$, παρατηρούμε ότι, εάν το δt είναι πολύ μικρό, το τμήμα της εικόνας $\mathcal{C}$ της $\boldsymbol{\gamma}$ μεταξύ των $\boldsymbol{\gamma}(t)$ και $\boldsymbol{\gamma}(t + \delta t)$ είναι περίπου ευθύγραμμο, έτσι το μήκος του είναι προσεγγιστικά ίσο με

$$\|\boldsymbol{\gamma}(t + \delta t) - \boldsymbol{\gamma}(t)\|.$$

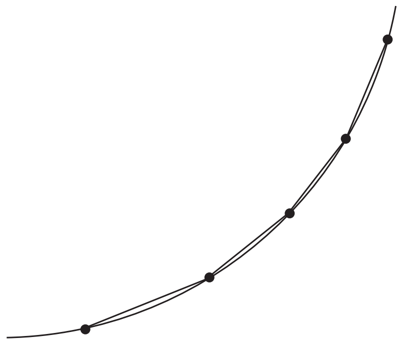
Πάλι επειδή το δt είναι μικρό, το $(\boldsymbol{\gamma}(t + \delta t) - \boldsymbol{\gamma}(t))/\delta t$ είναι περίπου ίσο με $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$, έτσι το μήκος του είναι προσεγγιστικά ίσο με

$$\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|\delta t. \tag{1.4}$$

Εάν θέλουμε να υπολογίσουμε το μήκος ενός (όχι κατ' ανάγκη μικρού) τμήματος της $\mathcal{C}$, μπορούμε να το διαιρέσουμε σε τμήματα, καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε μια μικρή αύξηση δt ως προς t, να υπολογίσουμε το μήκος κάθε τμήματος χρησιμοποιώντας την 1.4,

[2]Σ.τ.Μ. Ο Vincenzo Viviani (1622–1703) ήταν Ιταλός μαθηματικός και φυσικός. Μαθήτευσε στους Torricelli και Γαλιλαίο. Εκτός της καμπύλης της Άσκησης 1.9 που φέρει το όνομά του, ο Viviani είναι γνωστός και για το παρακάτω θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας: *Σε ισόπλευρο τρίγωνο, το άθροισμα των αποστάσεων σημείου του εσωτερικού του τριγώνου από τις πλευρές ισούται με το ύψος του τριγώνου.*

και να αθροίσουμε τα αποτελέσματα. Αφήνοντας το δt να τείνει στο μηδέν, παίρνουμε το ακριβές μήκος.



Σχήμα 1.7. Διαμέριση τόξου.

Όλα αυτά αποτελούν το κίνητρο για τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.2.1

Το *μήκος τόξου* μιας καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$ με σημείο εκκίνησης το $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$ είναι η συνάρτηση $s(t)$ που δίνεται από την

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\| du.$$

Συνεπώς, $s(t_0) = 0$ και η $s(t)$ είναι θετική ή αρνητική αναλόγως του πότε το t είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο του t_0. Εάν επιλέξουμε ένα διαφορετικό σημείο εκκίνησης $\boldsymbol{\gamma}(\tilde{t}_0)$, το νέο μήκος τόξου $\tilde{s}$ διαφέρει από το s κατά τη σταθερά $\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\| du$ διότι

$$\int_{t_0}^{t} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\| du = \int_{\tilde{t}_0}^{t} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\| du + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\| du.$$

Παράδειγμα 1.2.2

Για την λογαριθμική σπείρα

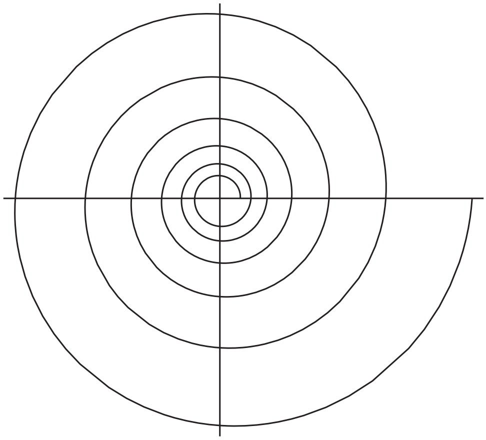
$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (e^{kt} \cos t, e^{kt} \sin t),$$

όπου k είναι μια σταθερά διάφορη του μηδενός, έχουμε

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (e^{kt}(k \cos t - \sin t), e^{kt}(k \sin t + \cos t)), \\ \therefore\ &\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|^2 = e^{2kt}(k \cos t - \sin t)^2 + e^{2kt}(k \sin t + \cos t)^2 = (k^2+1)e^{2kt}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το μήκος τόξου της $\boldsymbol{\gamma}$ με σημείο εκκίνησης το $\boldsymbol{\gamma}(0) = (1, 0)$ (για παράδειγμα) είναι

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{k^2+1}\, e^{ku} du = \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}(e^{kt} - 1).$$



Σχήμα 1.8. Η λογαριθμική σπείρα.

Το μήκος τόξου είναι διαφορίσιμη συνάρτηση. Πράγματι, εάν s είναι το μήκος τόξου μιας καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$ με σημείο εκκίνησης το $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$, έχουμε

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\| du = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|. \tag{1.5}$$

Θεωρώντας το $\boldsymbol{\gamma}(t)$ ως τη θέση ενός κινούμενου σημείου στο χρόνο t, η ds/dt είναι η ταχύτητα του σημείου (ο λόγος μεταβολής της απόστασης κατά μήκος της καμπύλης). Για αυτόν το λόγο, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.3

Εάν $\boldsymbol{\gamma} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ είναι μια παραμετρισμένη καμπύλη, η *ταχύτητά* της στο σημείο $\boldsymbol{\gamma}(t)$ είναι $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|$, και η $\boldsymbol{\gamma}$ καλείται *καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας* εάν το $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ είναι μοναδιαίο για κάθε $t \in (\alpha, \beta)$.

Πολλοί από τους τύπους και τα αποτελέσματα που θα δούμε παρακάτω σχετικά με διάφορες ιδιότητες των καμπυλών, παίρνουν μία ιδιαίτερα απλή μορφή όταν η καμπύλη είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Ο λόγος για αυτή την απλούστευση δίνεται στην παρακάτω πρόταση. Αν και παραδεχόμαστε ότι δείχνει χωρίς ενδιαφέρον από πρώτη άποψη, θα φανεί πολύ χρήσιμη σε ό,τι ακολουθεί.

Θυμόμαστε ότι το *βαθμωτό* γινόμενο διανυσμάτων $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ και $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ του $\mathbb{R}^n$ ισούται με

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Εάν τα $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ είναι λείες συναρτήσεις μιας παραμέτρου t, θα χρησιμοποιούμε τον «τύπο του γινομένου»

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}.$$

Ο τύπος προκύπτει εύκολα από τον ορισμό του βαθμωτού γινομένου και τον συνήθη τύπο για αριθμητικές συναρτήσεις

$$\frac{d}{dt}(a_i b_i) = \frac{da_i}{dt} b_i + a_i \frac{db_i}{dt}.$$

Πρόταση 1.2.4

Έστω $\boldsymbol{n}(t)$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα που είναι λεία συνάρτηση της μεταβλητής t. Τότε,

$$\boldsymbol{n}(t) \cdot \dot{\boldsymbol{n}}(t) = 0$$

για κάθε t, δηλαδή το $\dot{\boldsymbol{n}}(t)$ είναι μηδενικό ή κάθετο στο $\boldsymbol{n}(t)$ για κάθε t.

Ειδικότερα, εάν η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι μοναδιαίας ταχύτητας, τότε το $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι μηδενικό ή κάθετο στο $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$.

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας τον τύπο του γινομένου, παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = 1$ ως προς t για να προκύψει

$$\dot{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \cdot \dot{\boldsymbol{n}} = 0,$$

και έτσι $2\dot{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{n} = 0$. Το τελευταίο σκέλος προκύπτει θέτοντας $\boldsymbol{n} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}$. □

Ασκήσεις

1.2.1 Υπολογίστε το μήκος τόξου της *αλυσοειδούς* $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, \cosh t)$ με σημείο εκκίνησης το $(0, 1)$. Η αλυσοειδής έχει το σχήμα μιας βαρειάς αλυσίδας που κρέμεται από τα άκρα της – δείτε την Άσκηση 2.2.4.[3]

1.2.2 Δείξτε ότι οι ακόλουθες καμπύλες είναι μοναδιαίας ταχύτητας:

$$\text{(i) } \boldsymbol{\gamma}(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\text{(ii) } \boldsymbol{\gamma}(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right).$$

1.2.3 Μία επίπεδη καμπύλη δίνεται από την

$$\boldsymbol{\gamma}(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

όπου r είναι λεία συνάρτηση του θ (έτσι ώστε οι (r, θ) είναι οι πολικές συντεταγμένες του $\boldsymbol{\gamma}(\theta)$). Υπό ποιες συνθήκες η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι κανονική;[4] Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $r(\theta)$ για τις οποίες η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Δείξτε ότι, εάν η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι μοναδιαίας ταχύτητας, η εικόνα της $\boldsymbol{\gamma}$ είναι ένας κύκλος. Ποια είναι η ακτίνα του;

---

[3]Σ.τ.Μ. Υπάρχει μία ενδιαφέρουσα ιστορία πίσω από την αλυσοειδή καμπύλη. Ο Γαλιλαίος υποστήριζε ότι, για να πάρουμε το σχήμα μιας οποιασδήποτε *παραβολής*, αρκεί να κρεμάσουμε μία αλυσίδα από τα άκρα της, σε διαφορετικό ύψος κάθε φορά. Όμως, περίπου έναν αιώνα μετά τον Γαλιλαίο, ο Jacob Bernoulli απέδειξε ότι μία αλυσίδα κρεμασμένη από τα άκρα της είναι το γράφημα της εξίσωσης $y = a\cosh x$, $a =$σταθ. Παρατηρήστε ότι $\cosh x \sim 1 + \frac{x^2}{2}$ όπως προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor 2ου βαθμού για την $\cosh x$. Ίσως ο Γαλιλαίος τελικά δεν είχε πολύ άδικο που μπερδεύτηκε!

[4]Σ.τ.Μ. Δείτε τον Ορισμό 1.3.3.

1.2.4 Αυτή η άσκηση δείχνει ότι *μία ευθεία είναι η συντομότερη καμπύλη που συνδέει δύο δοθέντα σημεία.* Έστω $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ δύο σημεία, και έστω $\boldsymbol{\gamma}$ καμπύλη που περνά από τα σημεία αυτά, $\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{\gamma}(b) = \boldsymbol{b}$, όπου $a < b$. Δείξτε ότι, εάν το $\boldsymbol{u}$ είναι τυχόν μοναδιαίο διάνυσμα, τότε

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \boldsymbol{u} \leq \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\|$$

και συμπεράνετε ότι

$$(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{u} \leq \int_a^b \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\| dt.$$

Παίρνοντας $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p})/\|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}\|$, δείξτε ότι το μήκος του τμήματος της $\boldsymbol{\gamma}$ μεταξύ των $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ έχει μήκος τουλάχιστον ίσο με την ευθειακή απόσταση $\|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}\|$.

1.3 Αναπαραμέτριση

Είδαμε στα Παραδείγματα 1.1.2 και 1.1.3 ότι μία δοθείσα καμπύλη στάθμης μπορεί να έχει πολλές παραμετρίσεις, και είναι σημαντικό να καταλάβουμε τη σχέση μεταξύ τους.

Ορισμός 1.3.1

Η παραμετρισμένη καμπύλη $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to \mathbb{R}^n$ ονομάζεται *αναπαραμέτριση* της παραμετρισμένης καμπύλης $\boldsymbol{\gamma} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ εάν υπάρχει μια λεία 1–1 και επί απεικόνιση $\phi : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to (\alpha, \beta)$ (η *απεικόνιση αναπαραμέτρισης*) τέτοια ώστε η αντίστροφη απεικόνιση $\phi^{-1} : (\alpha, \beta) \to (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ να είναι επίσης λεία και

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\tilde{t}) = \boldsymbol{\gamma}(\phi(\tilde{t})), \quad \tilde{t} \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}). \tag{1.6}$$

Παρατηρήστε ότι, επειδή η ϕ έχει λεία αντίστροφη, η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι αναπαραμέτριση της $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\phi^{-1}(t)) = \boldsymbol{\gamma}(\phi(\phi^{-1}(t))) = \boldsymbol{\gamma}(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Δύο καμπύλες οι οποίες είναι αναπαραμετρίσεις η μία της άλλης έχουν την ίδια εικόνα, επομένως πρέπει να έχουν τις ίδιες γεωμετρικές ιδιότητες.

Παράδειγμα 1.3.2

Στο Παράδειγμα 1.1.3, δώσαμε την παραμέτριση

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$$

για τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$. Μια άλλη παραμέτριση είναι η

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (\sin t, \cos t)$$

(εφόσον $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$). Για να δούμε ότι η $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι αναπαραμέτριση της $\boldsymbol{\gamma}$, πρέπει να βρούμε μια απεικόνιση αναπαραμέτρισης ϕ τέτοια ώστε

$$(\cos\phi(t), \sin\phi(t)) = (\sin t, \cos t).$$

Μια λύση είναι η $\phi(t) = \pi/2 - t$.

Όπως επισημάναμε στην Παράγραφο 1.2, η ανάλυση μιας καμπύλης απλουστεύεται όταν είναι γνωστό ότι είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Είναι συνεπώς σημαντικό να ξέρουμε ποιές ακριβώς καμπύλες δέχονται αναπαραμετρίσεις μοναδιαίας ταχύτητας.

Ορισμός 1.3.3

Ένα σημείο $\boldsymbol{\gamma}(t)$ μιας παραμετρισμένης καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$ λέγεται *κανονικό σημείο* εάν $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \neq \mathbf{0}$· διαφορετικά το $\boldsymbol{\gamma}(t)$ είναι ένα *ιδιάζον σημείο* της $\boldsymbol{\gamma}$. Μία καμπύλη λέγεται *κανονική*[5] εάν όλα τα σημεία της είναι κανονικά.

Πριν δείξουμε τη σχέση μεταξύ της κανονικότητας και της αναπαραμέτρισης μοναδιαίας ταχύτητας, σημειώνουμε δύο απλές ιδιότητες των κανονικών καμπυλών. Αν και τα αποτελέσματα αυτά δεν είναι ιδιαίτερα ελκυστικά, θα αποδειχθούν πολύ σημαντικά για ό,τι ακολουθεί παρακάτω.

Πρόταση 1.3.4

Κάθε αναπαραμέτριση μιας κανονικής καμπύλης είναι κανονική.

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι οι $\boldsymbol{\gamma}$ και $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι όπως στον Ορισμό 1.5, έστω $t = \phi(\tilde{t})$, και έστω $\psi = \phi^{-1}$ έτσι ώστε $\tilde{t} = \psi(t)$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης $\phi(\psi(t)) = t$ ως προς t και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει

$$\frac{d\phi}{d\tilde{t}}\frac{d\psi}{dt} = 1.$$

Αυτό δείχνει ότι η $d\phi/d\tilde{t}$ δεν είναι ποτέ μηδέν. Εφόσον $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\tilde{t}) = \boldsymbol{\gamma}(\phi(\tilde{t}))$, εφαρμόζοντας ξανά τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}{d\tilde{t}} = \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}\frac{d\phi}{d\tilde{t}},$$

απ' όπου προκύπτει ότι η $d\tilde{\boldsymbol{\gamma}}/d\tilde{t}$ δεν είναι ποτέ μηδέν αφού η $d\boldsymbol{\gamma}/dt$ δεν είναι ποτέ μηδέν. □

Πρόταση 1.3.5

Εάν η $\boldsymbol{\gamma}(t)$ είναι μία κανονική καμπύλη, το μήκος τόξου της s (όπως στον Ορισμό 1.2.1), με σημείο εκκίνησης ένα τυχαίο σημείο της $\boldsymbol{\gamma}$, είναι λεία συνάρτηση του t.

Απόδειξη Έχουμε ήδη δει ότι (είτε η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι κανονική είτε όχι), η s είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του t και

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|.$$

Για να απλουστεύσουμε το συμβολισμό, θα υποθέτουμε στο εξής ότι η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι επίπεδη καμπύλη, έστω

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (u(t), v(t)),$$

[5] Σ.τ.Μ. Οι όροι *κανονικό σημείο* και *κανονική καμπύλη* αντιστοιχούν στα regular point και regular curve αντίστοιχα. Επίσης, ο όρος *ιδιάζον σημείο* αντιστοιχεί στο singular point.

όπου u και v είναι λείες συναρτήσεις του t, ώστε

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}.$$

Το κρίσιμο σημείο εδώ είναι ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι μία *λεία* συνάρτηση στο ανοικτό διάστημα $(0, \infty)$. Πράγματι, αποδεικνύουμε εύκολα με επαγωγή στο $n \geq 1$ ότι

$$\frac{d^n f}{dx^n} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n} x^{-(2n+1)/2}.$$

Επειδή οι u και v είναι λείες συναρτήσεις του t, το ίδιο ισχύει και για τις $\dot{u}$ και $\dot{v}$, άρα και για την $\dot{u}^2 + \dot{v}^2$. Εφόσον η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι κανονική, $\dot{u}^2 + \dot{v}^2 > 0$ για κάθε t, άρα η σύνθετη συνάρτηση

$$\frac{ds}{dt} = f(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)$$

είναι λεία συνάρτηση του t, πράγμα που συνεπάγεται ότι και η s είναι λεία. □

Το κύριο αποτέλεσμα που θέλουμε είναι η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.3.6

Μια παραμετρισμένη καμπύλη δέχεται μια αναπαραμέτριση μοναδιαίας ταχύτητας αν και μόνο αν είναι κανονική.

Απόδειξη Υποθέτουμε πρώτα ότι η παραμετρισμένη καμπύλη $\boldsymbol{\gamma} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ έχει μια αναπαραμέτριση μοναδιαίας ταχύτητας $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ με απεικόνιση αναπαραμέτρισης ϕ. Θέτοντας $t = \phi(\tilde{t})$, έχουμε $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\tilde{t}) = \boldsymbol{\gamma}(t)$ και άρα

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}{d\tilde{t}} &= \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}\frac{dt}{d\tilde{t}}, \\ \therefore \quad \left\| \frac{d\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}{d\tilde{t}} \right\| &= \left\| \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} \right\| \left| \frac{dt}{d\tilde{t}} \right|. \end{aligned}$$

Αφού η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι μοναδιαίας ταχύτητας, ισχύει ότι $\|d\tilde{\boldsymbol{\gamma}}/d\tilde{t}\| = 1$, και συνεπώς είναι φανερό ότι το $d\boldsymbol{\gamma}/dt$ δεν μπορεί να είναι μηδέν.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα $d\boldsymbol{\gamma}/dt$ δεν είναι ποτέ μηδέν. Από την Εξ. 1.5, ισχύει ότι $ds/dt > 0$ για κάθε t, όπου s είναι το μήκος τόξου της $\boldsymbol{\gamma}$ με σημείο εκκίνησης το τυχόν σημείο της καμπύλης, και από την Πρόταση 1.3.5 η s είναι μια λεία συνάρτηση του t. Από το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης (του λογισμού πολλών μεταβλητών γενικά) προκύπτει ότι η $s : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι 1–1, δηλαδή η εικόνα της είναι ένα ανοικτό διάστημα $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, και ότι η αντίστροφη απεικόνιση $s^{-1} : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to (\alpha, \beta)$ είναι λεία. (Οι αναγνώστες που δεν είναι εξοικειωμένοι με το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης θα πρέπει να δεχθούν τα παραπάνω προς το παρόν· το θεώρημα θα συζητηθεί με μη αυστηρό τρόπο στην Παράγραφο 1.5 και με αυστηρό τρόπο στην Παράγραφο 5.6) Παίρνουμε $\phi = s^{-1}$ και έστω $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ η αντίστοιχη αναπαραμέτριση της

$\boldsymbol{\gamma}$, έτσι ώστε $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \boldsymbol{\gamma}(t)$. Τότε,

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt},$$
$$\therefore \quad \left\|\frac{d\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}{ds}\right\| \frac{ds}{dt} = \left\|\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}\right\| = \frac{ds}{dt}, \quad \text{(βλ. Εξ. 1.5)},$$
$$\therefore \quad \left\|\frac{d\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}{ds}\right\| = 1. \qquad \square$$

Η απόδειξη της Πρότασης 1.3.6 δείχνει ότι το μήκος τόξου είναι ουσιαστικά η μόνη αναπαραμέτριση μοναδιαίας ταχύτητας μιας κανονικής καμπύλης.

Πόρισμα 1.3.7

Έστω $\boldsymbol{\gamma}$ κανονική καμπύλη και έστω $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ αναπαραμέτριση μοναδιαίας ταχύτητας της $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(u(t)) = \boldsymbol{\gamma}(t)$$

για κάθε t, όπου u είναι λεία συνάρτηση του t. Τότε, εάν s είναι το μήκος τόξου της $\boldsymbol{\gamma}$ (με σημείο εκκίνησης ένα τυχαίο σημείο της), έχουμε

$$u = \pm s + c, \tag{1.7}$$

όπου c είναι σταθερά. Αντιστρόφως, εάν η u δίνεται από την Εξ. 1.7 για κάποια τιμή της c και με οποιοδήποτε πρόσημο, τοτε η $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι μια αναπαραμέτριση μοναδιαίας ταχύτητας της $\boldsymbol{\gamma}$.

Απόδειξη Ο υπολογισμός στο πρώτο σκέλος στην απόδειξη της Πρότασης 1.3.6 δείχνει ότι η u δίνει μια αναπαραμέτριση μοναδιαίας ταχύτητας της $\boldsymbol{\gamma}$ αν και μόνο αν:

$$\frac{du}{dt} = \pm\left\|\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}\right\| = \pm\frac{ds}{dt} \quad \text{(βλ. Εξ. 1.5).}$$

Άρα, $u = \pm s + c$ για κάποια σταθερά c. $\square$

Αν και κάθε κανονική καμπύλη έχει μια αναπαραμέτριση μοναδιαίας ταχύτητας, αυτή μπορεί να είναι εξαιρετικά πολύπλοκο, έως και αδύνατο να γραφεί «επακριβώς», όπως φαίνεται από τα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.3.8

Για την λογαριθμική σπείρα $\boldsymbol{\gamma}(t) = (e^{kt}\cos t, e^{kt}\sin t)$, έχουμε βρει στο Παράδειγμα 1.2.2 ότι $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\|^2 = (k^2+1)e^{2kt}$. Αυτό δεν είναι ποτέ μηδέν, άρα η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι κανονική. Το μήκος τόξου της $\boldsymbol{\gamma}$ με σημείο εκκίνησης το σημείο $(1,0)$ έχει βρεθεί να είναι $s = \sqrt{k^2+1}(e^{kt}-1)/k$[6]. Άρα, $t = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{ks}{\sqrt{k^2+1}}+1\right)$, και μια αναπαραμέτριση μοναδιαίας ταχύτητας της $\boldsymbol{\gamma}$ δίνεται από τον μάλλον δύσχρηστο τύπο

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s) \quad = \quad \left(A(s)\cos\left(\frac{1}{k}\ln(A(s))\right), A(s)\sin\left(\frac{1}{k}\ln(A(s))\right)\right),$$

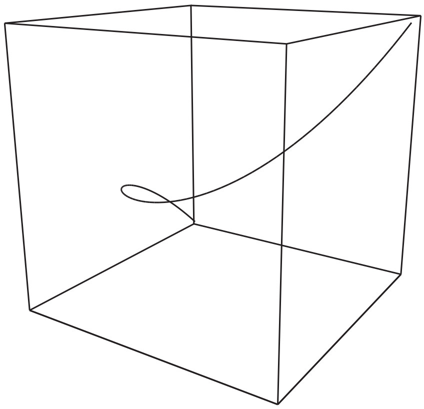
[6]Σ.τ.Μ. Από το Παράδειγμα 1.2.2.

όπου $A(s) = \frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} + 1$.

Παράδειγμα 1.3.9

Η *στρεβλωμένη κυβική*[7] είναι η καμπύλη του χώρου

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t^2, t^3), \quad -\infty < t < \infty.$$



Σχήμα 1.9. Η στρεβλωμένη κυβική.

Έχουμε $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (1, 2t, 3t^2)$ και άρα

$$\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}.$$

Αυτό δεν είναι ποτέ μηδέν, έτσι η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι κανονική. Το μήκος τόξου με σημείο εκκίνησης το $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{0}$ είναι

$$s = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4}du.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό δεν μπορεί να υπολογιστεί μέσω γνωστών συναρτήσεων όπως η λογαριθμική και η εκθετική, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, κλπ. (Είναι ένα παράδειγμα *ελλειπτικού ολοκληρώματος*[8].)

Το τελευταίο μας παράδειγμα δείχνει ότι μια καμπύλη στάθμης μπορεί να έχει ταυτόχρονα κανονικές και μη κανονικές παραμετρίσεις.

Παράδειγμα 1.3.10

Για την παραμέτριση

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t^2)$$

της παραβολής $y = x^2$, η $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (1, 2t)$ είναι προφανώς μη μηδενική, άρα η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι κανονική.

---

[7] Σ.τ.Μ. Ο συγγραφέας χρησιμοποιεί τον όρο twisted cubic.

[8] Σ.τ.Μ. Για τα ελλειπτικά ολοκληρώματα, μπορείτε να δείτε ενδεικτικά την ιστοσελίδα http://mathworld.wolfram.com/EllipticIntegral.html

Όμως η $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (t^3, t^6)$ είναι επίσης μια παραμέτριση της ίδιας παραβολής. Αυτή τη φορά η παράγωγος $\dot{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}} = (3t^2, 6t^3)$, η οποία είναι μηδέν όταν $t = 0$, συνεπώς η $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ *δεν* είναι κανονική.

Ασκήσεις

1.3.1 Ποιές από τις παρακάτω καμπύλες είναι κανονικές;

(i) $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$ όπου $t \in \mathbb{R}$,

(ii) η ίδια καμπύλη όπως στο (i) αλλά με $0 < t < \pi/2$,

(iii) $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, \cosh t)$ όπου $t \in \mathbb{R}$.

Βρείτε αναπαραμετρίσεις μοναδιαίας ταχύτητας για τις κανονικές καμπύλες.

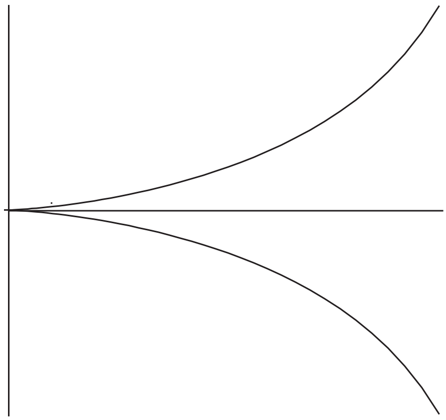
1.3.2 Η *κισσοειδής του Διοκλέους*[9] (βλ. Σχήμα 1.10) είναι η καμπύλη της οποίας η εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) είναι

$$r = \sin\theta \tan\theta, \ -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

Γράψτε μια παραμέτριση της κισσοειδούς χρησιμοποιώντας το θ σαν παράμετρο και δείξτε ότι η

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(t^2, \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\right), \ -1 < t < 1,$$

είναι μια αναπαραμέτρισή της.



Σχήμα 1.10. Η κισσοειδής του Διοκλέους.

1.3.3 Ο απλούστερος τύπος ιδιάζοντος σημείου μιας καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$ είναι η *συνήθης ακίδα*: ένα σημείο $\boldsymbol{p}$ της $\boldsymbol{\gamma}$, που αντιστοιχεί στην παραμετρική τιμή έστω την t_0, είναι συνήθης ακίδα αν $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t_0) = \mathbf{0}$ και τα διανύσματα $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t_0)$ και $\dddot{\boldsymbol{\gamma}}(t_0)$ είναι

[9]Σ.τ.Μ. Ο Διοκλής (240–180 π.Χ.) ήταν Έλληνας γεωμέτρης για τον οποίο ελάχιστα είναι γνωστά. Σπαράγματα του έργου του διασώθηκαν από τον Ευτόκιο, στα σχόλιά του στο *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* του Αρχιμήδη.

γραμμικά ανεξάρτητα (ειδικότερα, και τα δύο αυτά διανύσματα πρέπει να είναι διάφορα του μηδενός). Δείξτε ότι:

(i) Η καμπύλη $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t^m, t^n)$, όπου m και n είναι θετικοί ακέραιοι, έχει μία συνήθη ακίδα στην αρχή αν και μόνο αν $(m, n) = (2, 3)$ ή $(3, 2)$.

(ii) Η κισσοειδής της Άσκησης 1.3.2 έχει μία συνήθη ακίδα στην αρχή.

(iii) Εάν η $\boldsymbol{\gamma}$ έχει μία συνήθη ακίδα στο σημείο $\boldsymbol{p}$, τότε το ίδιο ισχύει και για οποιαδήποτε αναπαραμέτρισή της.

1.3.4 Δείξτε ότι:

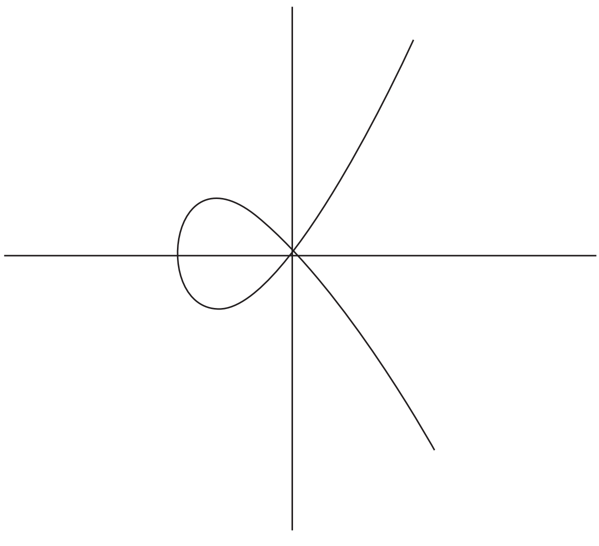
(i) Εάν η $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι αναπαραμέτριση μιας καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$, τότε η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι αναπαραμέτριση της $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$.

(ii) Εάν η $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι αναπαραμέτριση μιας καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$, και η $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι αναπαραμέτριση της $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$, τότε η $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι αναπαραμέτριση της $\boldsymbol{\gamma}$.

1.4 Κλειστές καμπύλες

Είναι προφανές ότι κάποιες καμπύλες «κλείνουν», όπως ένας κύκλος ή μία έλλειψη, ενώ κάποιες άλλες όχι, όπως μία ευθεία ή μία παραβολή. Εάν ένα σημείο κινείται, ας πούμε με σταθερή ταχύτητα, πάνω σε μία καμπύλη που κλείνει, θα επιστρέψει στο σημείο εκκίνησης ύστερα από κάποιο χρονικό διάστημα, και κατόπιν θα διανύσει την καμπύλη ξανά από την αρχή. Από την άλλη, εάν ένα σημείο κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω σε μία ευθεία ή μία παραβολή, δεν επιστρέφει ποτέ στο σημείο εκκίνησης. Αλλά υπάρχουν και κάποιες ενδιάμεσες περιπτώσεις όπως η καμπύλη (Σχήμα 1.11)

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (t^2 - 1, t^3 - 1).$$



Σχήμα 1.11. Μη κλειστή καμπύλη με μία αυτοτομή.

Ένα σημείο που κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω στην καμπύλη αυτή, μπορεί να επιστρέψει στο σημείο εκκίνησης εάν το σημείο εκκίνησης είναι η αρχή· σε κάθε αλλη περίπτωση αυτό είναι αδύνατο. Συνεπώς μας είναι χρήσιμος ένας προσεκτικός ορισμός της «κλειστής» καμπύλης.

Ορισμός 1.4.1

Έστω $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ λεία καμπύλη και έστω $T \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι T-περιοδική αν

$$\boldsymbol{\gamma}(t+T) = \boldsymbol{\gamma}(t) \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Εάν η $\boldsymbol{\gamma}$ δεν είναι σταθερή και είναι T-περιοδική για κάποιο $T \neq 0$, τότε η $\boldsymbol{\gamma}$ ονομάζεται *κλειστή*.

Άρα, εάν η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι T-περιοδική, ένα σημείο που κινείται πάνω στην $\boldsymbol{\gamma}$ επιστρέφει στο σημείο εκκίνησής του ύστερα από χρόνο T, οποιοδήποτε και αν είναι το σημείο εκκίνησης. Ασφαλώς, κάθε καμπύλη είναι 0-περιοδική.

Σχόλιο

Εάν η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι T-περιοδική, είναι φανερό ότι η $\boldsymbol{\gamma}$ προσδιορίζεται από τον περιορισμό της σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους $|T|$. Αντιστρόφως, οι κλειστές καμπύλες συχνά μας δίνονται σαν καμπύλες που ορίζονται σε ένα κλειστό διάστημα, έστω $\boldsymbol{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Εάν η $\boldsymbol{\gamma}$ και όλες οι παράγωγοί της[10] παίρνουν την ίδια τιμή στα a και b, υπάρχει μοναδικός τρόπος να επεκτείνουμε την $\boldsymbol{\gamma}$ σε μία $(b-a)$-περιοδική (λεία) καμπύλη $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Κατά συνέπεια, η παρακάτω συζήτηση εφαρμόζεται και σε καμπύλες που ορίζονται σε κλειστά διαστήματα.

Ορισμός 1.4.2

Η *περίοδος* μίας κλειστής καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$ είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός T για τον οποίο η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι T-περιοδική.

Δεν είναι και τόσο προφανής η ύπαρξη του αριθμού T (θυμηθείτε ότι δεν υπάρχει εν γένει ελάχιστο στοιχείο σε ένα σύνολο θετικών πραγματικών αριθμών). Μία απόδειξη της ύπαρξης του T βρίσκεται στις ασκήσεις.

Παράδειγμα 1.4.3

Η έλλειψη $\boldsymbol{\gamma}(t) = (p\cos t, q\sin t)$ (Άσκηση 1.1.6) είναι κλειστή καμπύλη με περίοδο 2π διότι κάθε μία από τις συνιστώσες της είναι 2π-περιοδική συνάρτηση (όπως προκύπτει από γνωστές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων).[11]

Εάν η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι κανονική κλειστή καμπύλη, μία μοναδιαίας ταχύτητας αναπαραμέτριση της $\boldsymbol{\gamma}$ είναι πάντοτε κλειστή. Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι εφόσον κάθε σημείο στην εικόνα της κλειστής καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$ περιόδου T προκύπτει καθώς η παράμετρος t της $\boldsymbol{\gamma}$ μεταβάλλεται σε κάθε διάστημα μήκους T, για παράδειγμα στο $[0,T]$, είναι εύλογο να ορίσουμε το *μήκος* της $\boldsymbol{\gamma}$ ως το

$$l(\boldsymbol{\gamma}) = \int_0^T \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|dt.$$

---

[10] Οι παράγωγοι στα άκρα a και b πρέπει να ορίζονται με την πλευρική έννοια.

[11] Σ.τ.Μ. Αντιπαραβάλλετε τον ορισμό της T-περιοδικής καμπύλης με αυτόν της περιοδικής συνάρτησης.

Από την απόδειξη της Πρότασης 1.3.6, χρησιμοποιώντας το μήκος τόξου

$$s = \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\| du$$

της $\boldsymbol{\gamma}$ ως παράμετρο, παίρνουμε μία μοναδιαίας ταχύτητας αναπαραμέτριση $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ της $\boldsymbol{\gamma}$ (ώστε $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \boldsymbol{\gamma}(t)$). Παρατηρούμε ότι

$$s(t+T) = \int_0^{t+T} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\| du = \int_0^{T} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\| du + \int_T^{t+T} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\| du = l(\boldsymbol{\gamma}) + s(t),$$

επειδή, θέτοντας $v = u - T$ και χρησιμποιώντας τη σχέση $\boldsymbol{\gamma}(u-T) = \boldsymbol{\gamma}(u)$ (άρα και την $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u-T) = \dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)$ όπως προκύπτει από την παραγώγιση), παίρνουμε

$$\int_T^{t+T} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u) du = \int_0^t \|dot\boldsymbol{\gamma}(v) dv = s(t).$$

Συνεπώς,

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s(t)) = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s(t')) \Longleftrightarrow \boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t') \Longleftrightarrow t' - t = kT \Longleftrightarrow s(t') - s(t) = kl(\boldsymbol{\gamma}),$$

όπου k είναι ακέραιος. Αυτό δείχνει ότι η $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι κλειστή καμπύλη με περίοδο $l(\boldsymbol{\gamma})$. Ας σημειώσουμε ότι εφόσον η $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι μοναδιαίας ταχύτητας, το $l(\boldsymbol{\gamma})$ είναι ίσο με το μήκος της $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$. Εν συντομία, *μπορούμε πάντοτε να υποθέτουμε ότι μία κλειστή καμπύλη είναι μοναδιαίας ταχύτητας και ότι η περίοδός της είναι ίση με το μήκος της.*

Επιστρέφοντας στην καμπύλη του Σχήματος 1.11, διαπιστώνουμε τώρα ότι δεν είναι κλειστή· παρ' όλα αυτά, εάν ένα σημείο ξεκινά από την αρχή και κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω στον βρόχο του χωρίου $x < 0$, θα επιστρέψει στο σημείο εκκίνησης. Προκύπτει λοιπόν ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 1.4.4

Μία καμπύλη $\boldsymbol{\gamma}$ λέγεται ότι έχει *αυτοτομή* στο σημείο της $\boldsymbol{p}$ εάν υπάρχουν παραμετρικές τιμές $a \neq b$ τέτοιες ώστε

(i) $\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\gamma}(b) = \boldsymbol{p}$, και

(ii) εάν η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι κλειστή με περίοδο T, τότε το $a - b$ δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του T.

Παράδειγμα 1.4.5

Η κοχλιοειδής του Παραδείγματος 1.1.7 είναι κλειστή καμπύλη με περίοδο 2π. Είναι φανερό από την εικόνα ότι έχει ακριβώς μία αυτοτομή, στην αρχή. (Αυτό μπορεί επίσης να βεβαιωθεί αναλυτικά – βλ. την Άσκηση 1.4.1 και την λύση της.)

Ασκήσεις

1.4.1 Δείξτε ότι η *έκτη του Cayley*[12]

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos^3 t \cos 3t, \cos^3 t \sin 3t), \quad t \in \mathbb{R},$$

είναι μία κλειστή καμπύλη που έχει ακριβώς μία αυτοτομή. Ποια είναι η περίοδός της; (Το όνομα αυτής της καμπύλης οφείλεται στο γεγονός ότι η καρτεσιανή της εξίσωση εμπεριέχει ένα πολυώνυμο 6ου βαθμού).

1.4.2 Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι μία αναπαραμέτριση κλειστής καμπύλης δεν είναι κατ' ανάγκη κλειστή.

1.4.3 Δείξτε ότι αν η καμπύλη $\boldsymbol{\gamma}$ είναι T_1-περιοδική και T_2-περιοδική, τότε είναι και $(k_1 T_1 + k_2 T_2)$ −περιοδική για όλους τους ακέραιους k_1 και k_2.

1.4.4 Έστω $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ καμπύλη και υποθέτουμε ότι ο T_0 είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός για τον οποίο η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι T_0-περιοδική. Αποδείξτε ότι η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι T-περιοδική αν και μόνο αν $T = kT_0$ για κάποιον ακέραιο k.

1.4.5 Υποθέτουμε ότι η *μη σταθερή* συνάρτηση $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι T-περιοδική για κάποιο $T \neq 0$. Αυτή η άσκηση δείχνει την ύπαρξη *ελάχιστου* θετικού αριθμού T_0 ώστε η $\boldsymbol{\gamma}$ να είναι T_0-περιοδική. Η απόδειξη χρησιμοποιεί λίγη πραγματική ανάλυση. Με απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει ελάχιστος T_0.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $T_1, T_2, T_3, \ldots$ τέτοια ώστε $T_1 > T_2 > T_3 > \cdots > 0$ και ότι η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι T_r-περιοδική για κάθε $r \geq 1$.

(ii) Δείξτε ότι η ακολουθία $\{T_r\}$ του (i) μπορεί να επιλεχθεί ώστε $T_r \to 0$ καθώς $r \to \infty$.

(iii) Δείξτε ότι η ύπαρξη ακολουθίας $\{T_r\}$ όπως στο (i) τέτοιας ώστε $T_r \to 0$ καθώς $r \to \infty$ συνεπάγεται ότι η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι σταθερή.

1.4.6 Έστω $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ μία μη σταθερή καμπύλη που είναι T-περιοδική για κάποιο $T > 0$. Δείξτε ότι η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι κλειστή.

1.5 Καμπύλες στάθμης – Παραμετρισμένες καμπύλες

Θα προσπαθήσουμε τώρα να καταστήσουμε φανερή την ακριβή σχέση μεταξύ των δύο τύπων καμπυλών που έχουμε θεωρήσει στις προηγούμενες παραγράφους.

Στο γενικό πλαίσιο που τις έχουμε ορίσει, οι καμπύλες στάθμης δεν είναι πάντοτε το είδος των αντικειμένων που θα ονομάζαμε καμπύλες. Για παράδειγμα, η «καμπύλη» στάθμης $x^2 + y^2 = 0$ είναι ένα μοναδικό σημείο. Το ακόλουθο θεώρημα περιέχει τις σωστές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η $f(x, y)$ ώστε η $f(x, y) = c$, όπου c είναι σταθερά, να είναι μια αποδεκτή καμπύλη στάθμης του επιπέδου, που μπορεί να παραμετρισθεί. Σημειώνουμε ότι μπορούμε χωρίς βλάβη να υποθέσουμε ότι $c = 0$ (αφού μπορούμε να αντικαταστήσουμε την f με την $f - c$).

[12]Σ.τ.Μ. Λεπτομέρειες για την έκτη του Cayley (Cayley's sextic) μπορείτε να βρείτε λ.χ. και εδώ: http://mathworld.wolfram.com/CayleysSextic.html

Θεώρημα 1.5.1

Έστω $f(x, y)$ μια λεία συνάρτηση δύο μεταβλητών (που σημαίνει ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f, κάθε τάξης, υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις). Υποθέτουμε ότι, σε κάθε σημείο της καμπύλης στάθμης

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\},$$

οι $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$ δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν. Εάν $\boldsymbol{p}$ είναι ένα σημείο της $\mathcal{C}$, με συντεταγμένες έστω (x_0, y_0), τότε υπάρχει μια κανονική παραμετρισμένη καμπύλη $\boldsymbol{\gamma}(t)$, ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το 0, τέτοια ώστε να περνά από το $\boldsymbol{p}$ όταν $t = 0$ και να περιέχεται στην $\mathcal{C}$ για όλα τα t.

Στην απόδειξη του θεωρήματος αυτού χρησιμοποιούμε το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης (μία μορφή του οποίου χρησιμοποιήθηκε ήδη στην απόδειξη της Πρότασης 1.3.6). Προς στιγμήν, θα προσπαθήσουμε μόνο να πείσουμε τον αναγνώστη για την αλήθεια αυτού του θεωρήματος. Η απόδειξη θα δοθεί σε μια επόμενη άσκηση (Άσκηση 5.6.2) όταν θα έχουμε εισάγει αυστηρά το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης και θα το έχουμε χρησιμοποιήσει στη συζήτησή μας για τις επιφάνειες.

Για να καταλάβουμε τη σημασία της συνθήκης για την f στο Θεώρημα 1.5.1, υποθέτουμε ότι το $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ είναι ένα σημείο της $\mathcal{C}$ κοντά στο $\boldsymbol{p}$, τέτοιο ώστε

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0.$$

Από το θεώρημα του Taylor για τις δύο μεταβλητές προκύπτει

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}$$

όπου παραλείπουμε τα γινόμενα των μικρών ποσοτήτων Δx και Δy (οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο (x_0, y_0)). Άρα,

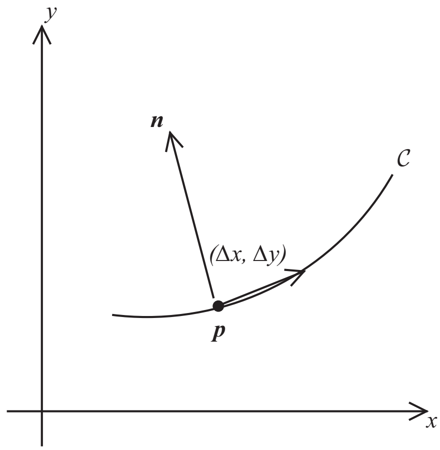
$$\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{1.8}$$

Αφού τα Δx και Δy είναι μικρά, το διάνυσμα $(\Delta x, \Delta y)$ είναι περίπου εφαπτόμενο της $\mathcal{C}$ στο $\boldsymbol{p}$. Άρα, η Εξ. 1.8 μας λέει ότι το *διάνυσμα* $\boldsymbol{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ είναι *κάθετο* της $\mathcal{C}$ στο $\boldsymbol{p}$ (Σχήμα 1.12).

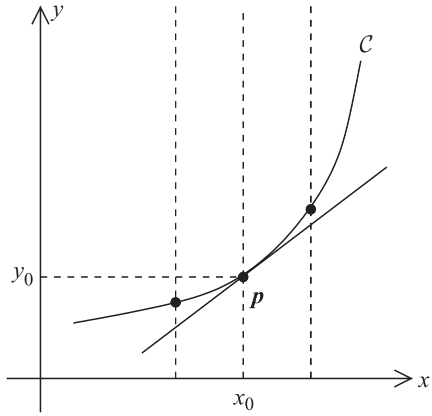
Η υπόθεση του Θεωρήματος 1.5.1 μας λέει ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{n}$ είναι μη μηδενικό σε κάθε σημείο της $\mathcal{C}$. Τότε, το $\boldsymbol{n}$ δεν είναι παράλληλο στον άξονα x στο $\boldsymbol{p}$, έτσι η εφαπτομένη της $\mathcal{C}$ στο $\boldsymbol{p}$ δεν είναι παράλληλη με τον άξονα y (Σχήμα 1.13). Αυτό συνεπάγεται ότι οι κάθετες ευθείες $x =$ σταθ. κοντά στο $x = x_0$ τέμνουν την $\mathcal{C}$ σε ένα μοναδικό σημείο (x, y) κοντά στο $\boldsymbol{p}$. Με άλλα λόγια, *η εξίσωση*

$$f(x, y) = 0 \tag{1.9}$$

έχει μοναδική λύση y κοντά στο y_0 για κάθε x κοντά στο x_0. Σημειώνουμε ότι αυτό μπορεί να μην ισχύει στην περίπτωση όπου η εφαπτομένη της $\mathcal{C}$ στο $\boldsymbol{p}$ είναι παράλληλη με τον άξονα y (δηλαδή όταν $\partial f/\partial y = 0$), όπως λόγου χάρη στο Σχήμα 1.14. Στο παράδειγμα αυτό, οι ευθείες $x =$ σταθ. στα αριστερά του $x = x_0$ δεν τέμνουν την $\mathcal{C}$ κοντά στο $\boldsymbol{p}$, αν και, αυτές στα δεξιά του $x = x_0$ τέμνουν την $\mathcal{C}$ σε περισσότερα του ενός σημεία κοντά στο $\boldsymbol{p}$.



Σχήμα 1.12.



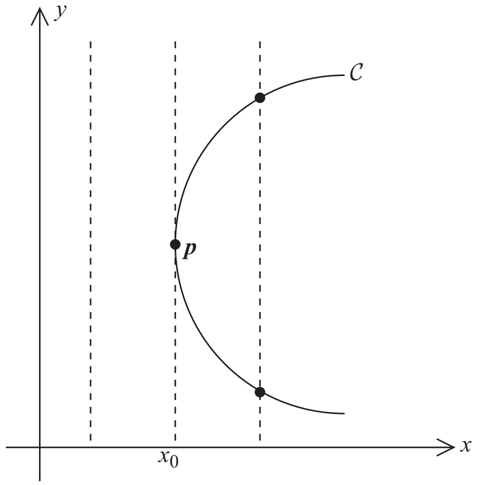
Σχήμα 1.13.

Από την ιδιότητα της f που τονίσαμε με πλάγια γράμματα παραπάνω, προκύπτει ότι υπάρχει μια συνάρτηση $g(x)$, ορισμένη για τα x κοντά στο x_0, τέτοια ώστε η $y = g(x)$ είναι η μοναδική λύση της Εξ. 1.9 κοντά στο x_0. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε μια παραμέτριση $\boldsymbol{\gamma}$ ενός τμήματος της $\mathcal{C}$ κοντά στο $\boldsymbol{p}$ από την

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, g(t)).$$

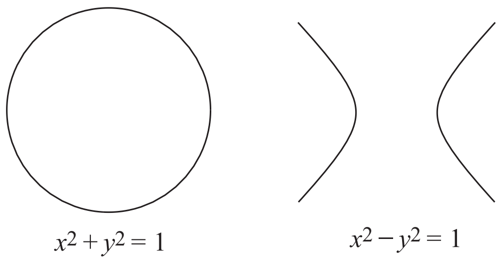
Εάν δεχθούμε ότι η g είναι λεία (το οποίο προκύπτει από το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης), τότε η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι βεβαίως κανονική καμπύλη εφόσον το διάνυσμα $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = (1, \dot{g})$ δεν είναι προφανώς πουθενά μηδέν. Με τον τρόπο αυτόν «αποδεικνύεται» το Θεώρημα 1.5.1.

Είναι επιπλέον δυνατό να αποδείξουμε κάτι περισσότερο από το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 1.5.1. Έστω ότι η $f(x, y)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος, και υποθέτουμε επιπρόσθετα ότι η καμπύλη στάθμης $\mathcal{C}$ που δίνεται από την $f(x, y) = 0$ εί-



Σχήμα 1.14. Η μερική παράγωγος ως προς y είναι 0 στο P.

ναι *συνεκτική*. Για τους αναγνώστες που δεν είναι εξοικειωμένοι με την τοπολογία, αυτό σημαίνει στην ουσία ότι η $\mathcal{C}$ είναι «ένα κομμάτι». Για παράδειγμα, ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ είναι συνεκτικός, ενώ η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$ όχι (Σχήμα 1.15):



Σχήμα 1.15. Μία συνεκτική και μία μη συνεκτική καμπύλη.

Με αυτές τις υποθέσεις για την f, υπάρχει μια κανονική παραμετρισμένη καμπύλη $\boldsymbol{\gamma}$ της οποίας η εικόνα είναι «όλη» η $\mathcal{C}$. Επιπλέον, εάν η $\mathcal{C}$ δεν κλειστή, η $\boldsymbol{\gamma}$ μπορεί να ληφθεί ως 1–1· εάν η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή, τότε η $\boldsymbol{\gamma}$ απεικονίζει κάποιο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ *επί* της $\mathcal{C}$, $\boldsymbol{\gamma}(\alpha) = \boldsymbol{\gamma}(\beta)$ και η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι 1–1 στο ανοικτό διάστημα (α, β).

Ένα παρόμοιο επιχείρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το πέρασμα από τις παραμετρισμένες καμπύλες στις καμπύλες στάθμης:

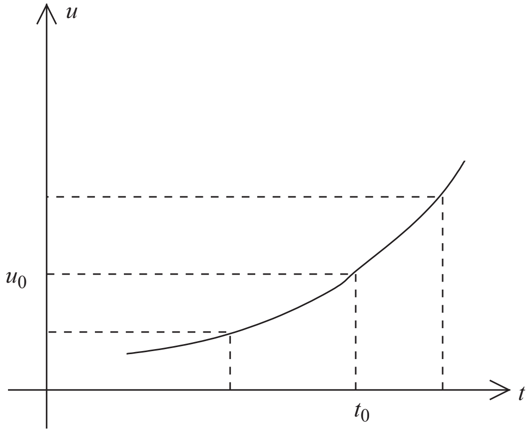
Θεώρημα 1.5.2

Έστω $\boldsymbol{\gamma}$ μία κανονική παραμετρισμένη καμπύλη του επιπέδου, και έστω $\boldsymbol{\gamma}(t_0) = (x_0, y_0)$ ένα σημείο της εικόνας της $\boldsymbol{\gamma}$. Τότε, υπάρχει μια λεία, πραγματικών τιμών συνάρτηση $f(x, y)$, ορισμένη για x και y που ανήκουν σε ανοικτά διαστήματα που περιέχουν τα x_0 και y_0 αντίστοιχα και ικανοποιούν τις συνθήκες του Θεωρήματος 1.5.1, τέτοια ώστε η $\boldsymbol{\gamma}(t)$ περιέχεται στην καμπύλη στάθμης $f(x, y) = 0$ για κάθε τιμή του t σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το t_0.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.5.2 είναι παρόμοια με αυτήν του Θεωρήματος 1.5.1. Έστω

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (u(t), v(t)),$$

όπου u και v είναι λείες συναρτήσεις. Αφού η $\boldsymbol{\gamma}$ είναι κανονική, τουλάχιστον μία από τις $\dot{u}(t_0)$ και $\dot{v}(t_0)$ είναι διάφορη του μηδενός, έστω η $\dot{u}(t_0)$. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα της u ως συνάρτησης του t δεν είναι παράλληλο στον άξονα t στο t_0:



Σχήμα 1.16.

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.5.1, αυτό συνεπάγεται ότι κάθε ευθεία παράλληλη με τον άξονα t κοντά στο $u = x_0$ τέμνει το γράφημα της x σε ένα μοναδικό σημείο $u(t)$, με το t να είναι κοντά στο t_0. Προκύπτει μία συνάρτηση $h(x)$, ορισμένη για x εντός ενός ανοικτού διαστήματος που περιέχει το x_0, τέτοια ώστε η $t = h(x)$ να είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $u(t) = x$ όταν το x είναι κοντά στο x_0 και το t είναι κοντά στο t_0. Το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης μας λέει τότε ότι η h είναι λεία. Η συνάρτηση

$$f(x, y) = y - v(h(x))$$

έχει τις ιδιότητες που επιθυμούμε.

Δεν είναι γενικά δυνατό να βρούμε *μοναδική* συνάρτηση $f(x, y)$ που να ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 1.5.1, τέτοια ώστε η εικόνα της $\boldsymbol{\gamma}$ να περιέχεται στην καμπύλη στάθμης $f(x, y) = 0$, και αυτό διότι η $\boldsymbol{\gamma}$ μπορεί να έχει αυτοτομές όπως η κοχλιοειδής του Παραδείγματος 1.1.7. Από το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης προκύπτει ότι δεν υπάρχει μοναδική συνάρτηση f που να ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 1.5.1 και να περιγράφει την καμπύλη κοντά στο σημείο αυτοτομής.

Ασκήσεις

1.5.1 Δείξτε ότι η καμπύλη $\mathcal{C}$ με καρτεσιανή εξίσωση

$$y^2 = x(1 - x^2)$$

δεν είναι συνεκτική. Για ποιο εύρος τιμών του t η

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, \sqrt{t - t^3})$$

είναι παραμέτριση της $\mathcal{C}$; Ποια είναι η εικόνα αυτής της παραμέτρισης;

1.5.2 Διατυπώστε μια γενίκευση του Θεωρήματος 1.5.1 για καμπύλες στάθμης του $\mathbb{R}^3$ που δίνονται από τις σχέσεις $f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0$.

1.5.3 Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο του Θεωρήματος 1.5.2 για καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ (ή ακόμα του $\mathbb{R}^n$). (Αυτό είναι εύκολο.)

Στο υπόλοιπο αυτού του βιβλίου, θα μιλάμε απλώς για «καμπύλες», εκτός και αν υπάρχει σοβαρός κίνδυνος σύγχυσης για το ποιον τύπο (στάθμης ή παραμετρισμένη) εννοούμε.