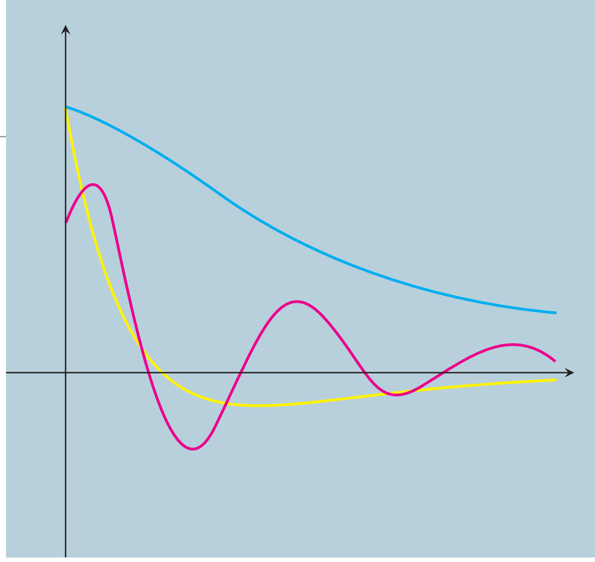
# 17

# Διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης



**ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ** Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε τις διαφορικές εξισώσεις *δεύτερης τάξης*. Εξισώσεις σαν αυτές ανακύπτουν σε πολλές εφαρμογές στις φυσικές επιστήμες και στις επιστήμες μηχανικών. Παραδείγματος χάριν, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη ταλαντούμενων χορδών καθώς και ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε αρκετές μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης.

## 17.1 Γραμμικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Μια εξίσωση της μορφής

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x), \tag{1}$$

που είναι γραμμική ως προς τη συνάρτηση $y$ και τις παραγώγους της, ονομάζεται **γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης**. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $P$, $Q$, $R$, και $G$ είναι παντού συνεχείς σε κάποιο ανοιχτό διάστημα $I$. Αν η $G(x)$ είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν στο $I$, η εξίσωση ονομάζεται **ομογενής** ενώ στην αντίθετη περίπτωση ονομάζεται **μη ομογενής**. Επομένως, η μορφή μιας ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης είναι

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0. \tag{2}$$

Υποθέτουμε επίσης ότι το $P(x)$ δεν μηδενίζεται ποτέ για οποιοδήποτε $x \in I$.

Στην επίλυση της Εξίσωσης (2) παίζουν σημαντικό ρόλο δύο θεμελιώδεις προτάσεις. Η πρώτη λέει ότι αν γνωρίζουμε δύο λύσεις $y_1$ και $y_2$ της γραμμικής ομογενούς εξίσωσης, τότε κάθε **γραμμικός συνδυασμός** $y = c_1y_1 + c_2y_2$ αποτελεί επίσης λύση για τυχούσες σταθερές $c_1$ και $c_2$.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1—Αρχή της επαλληλίας**
Αν $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι δύο λύσεις της γραμμικής ομογενούς εξίσωσης (2), τότε, για τυχούσες σταθερές $c_1$ και $c_2$, η συνάρτηση

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

είναι επίσης λύση της Εξίσωσης (2).

**Απόδειξη** Αντικαθιστώντας την $y$ στην Εξίσωση (2), έχουμε

$$\begin{aligned}
&P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y \\
&\quad = P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&\quad = P(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + Q(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&\quad = c_1\underbrace{(P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1)}_{=\,0,\ \text{η } y_1 \text{ είναι λύση}} + c_2\underbrace{(P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2)}_{=\,0,\ \text{η } y_2 \text{ είναι λύση}} \\
&\quad = c_1(0) + c_2(0) = 0.
\end{aligned}$$

Επομένως, η $y = c_1y_1 + c_2y_2$ είναι λύση της Εξίσωσης (2). ■

Από το Θεώρημα 1 προκύπτουν τα ακόλουθα ως προς τις λύσεις της γραμμικής ομογενούς εξίσωσης.

**1.** Το άθροισμα $y_1 + y_2$ δύο λύσεων της Εξίσωσης (2) αποτελεί επίσης λύση. (Θέτουμε $c_1 = c_2 = 1$.)

**2.** Κάθε σταθερό πολλαπλάσιο $ky_1$ οποιασδήποτε λύσης $y_1$ της Εξίσωσης (2) αποτελεί επίσης λύση. (Θέτουμε $c_1 = k$ και $c_2 = 0$.)

**3.** Η **τετριμμένη λύση** $y(x) \equiv 0$ αποτελεί πάντοτε λύση της γραμμικής ομογενούς εξίσωσης. (Θέτουμε $c_1 = c_2 = 0$.)

Η δεύτερη θεμελιώδης πρόταση ως προς τις λύσεις της γραμμικής ομογενούς εξίσωσης αφορά τη **γενική λύση**, δηλαδή τη λύση που περιέχει όλες τις λύσεις. Η πρόταση αυτή λέει ότι υπάρχουν δύο λύσεις $y_1$ και $y_2$ τέτοιες ώστε κάθε λύση μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός τους με κατάλληλες σταθερές $c_1$ και $c_2$. Ωστόσο, δεν είναι οποιοδήποτε ζεύγος λύσεων κατάλληλο. Οι λύσεις πρέπει να είναι **γραμμικά ανεξάρτητες**, που σημαίνει ότι οι $y_1$ και $y_2$ δεν μπορούν να είναι η μια σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης. Παραδείγματος χάριν, οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = xe^x$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ενώ οι $f(x) = x^2$ και $g(x) = 7x^2$ δεν είναι (οπότε είναι γραμμικά εξαρτημένες). Οι προτάσεις αυτές καθώς και το ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύονται σε πιο προχωρημένα μαθήματα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2** Αν οι $P$, $Q$, και $R$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο ανοιχτό διάστημα $I$ και η $P(x)$ δεν μηδενίζεται ποτέ στο $I$, τότε η γραμμική ομογενής εξίσωση (2) έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $y_1$ και $y_2$ στο $I$. Επιπλέον, αν οι $y_1$ και $y_2$ είναι δύο *οποιεσδήποτε* γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της Εξίσωσης (2), τότε η γενική λύση δίνεται από την

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

όπου $c_1$ και $c_2$ αυθαίρετες σταθερές.

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στην εύρεση δύο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων για την ειδική περίπτωση της Εξίσωσης (2), όπου οι $P$, $Q$, και $R$ είναι σταθερές συναρτήσεις.

## Ομογενείς εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την ομογενή διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3}$$

όπου τα $a$, $b$, και $c$ είναι σταθερά. Για να λύσουμε την Εξίσωση (3), αναζητούμε μια συνάρτηση η οποία όταν πολλαπλασιαστεί με μια σταθερά, προστεθεί στο γινόμενο μιας σταθεράς με την πρώτη της παράγωγο και τέλος προστεθεί στο γινόμενο μιας σταθεράς επί την δεύτερη παράγωγό της, το αποτέλεσμα ισούται ταυτοτικά με το μηδέν. Μια συνάρτηση που συμπεριφέρεται με αυτόν τον τρόπο είναι η εκθετική συνάρτηση $y = e^{rx}$, όπου $r$ σταθερά. Αν παραγωγίσουμε δύο φορές αυτή την εκθετική συνάρτηση, παίρνουμε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2e^{rx}$, που δεν είναι παρά σταθερά πολλαπλάσια της αρχικής συνάρτησης. Αν αντικαταστήσουμε την $y = e^{rx}$ στην Εξίσωση (3), προκύπτει

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0.$$

Εφόσον η εκθετική συνάρτηση δεν μηδενίζεται ποτέ, μπορούμε να διαιρέσουμε την τελευταία εξίσωση με $e^{rx}$. Έτσι, η $y = e^{rx}$ αποτελεί λύση της Εξίσωσης (3) αν και μόνο αν το $r$ είναι λύση της αλγεβρικής εξίσωσης

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0.} \tag{4}$$

Η Εξίσωση (4) ονομάζεται **βοηθητική εξίσωση** (ή **χαρακτηριστική εξίσωση**) της διαφορικής εξίσωσης $ay'' + by' + cy = 0$. Η βοηθητική εξίσωση είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{και} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ανάλογα με την τιμή της διακρίνουσας $b^2 - 4ac$, εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις:

**Περίπτωση 1:** $b^2 - 4ac > 0$. Σε αυτή την περίπτωση, η βοηθητική εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες $r_1$ και $r_2$. Τότε, οι $y_1 = c_1e^{r_1x}$ και $y_2 = c_2e^{r_2x}$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της Εξίσωσης (3), διότι η $e^{r_2x}$ δεν είναι σταθερό πολλαπλάσιο της $e^{r_1x}$ (δείτε την Άσκηση 61). Βάσει του Θεωρήματος 2 καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα.

> **ΘΕΩΡΗΜΑ 3** Αν $r_1$ και $r_2$ είναι δύο πραγματικές και άνισες λύσεις της βοηθητικής εξίσωσης $ar^2 + br + c = 0$, τότε η
> $$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$
> είναι η γενική λύση της $ay'' + by' + cy = 0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1** Βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

**Λύση** Αντικαθιστώντας $y = e^{rx}$ στη διαφορική εξίσωση, παίρνουμε τη βοηθητική εξίσωση

$$r^2 - r - 6 = 0,$$

η οποία γράφεται στη μορφή

$$(r - 3)(r + 2) = 0.$$

Οι δύο ρίζες είναι $r_1 = 3$ και $r_2 = -2$. Συνεπώς, η γενική λύση είναι

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}.$$ ■

**Περίπτωση 2:** $b^2 - 4ac = 0$. Σε αυτή την περίπτωση, $r_1 = r_2 = -b/2a$. Για να απλουστεύσουμε τον συμβολισμό, θέτουμε $r = -b/2a$. Οπότε, έχουμε μία λύση $y_1 = e^{rx}$ με $2ar + b = 0$. Εφόσον ο πολλαπλασιασμός της $e^{rx}$ με μια σταθερά δεν παράγει μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση, δοκιμάζουμε να την πολλαπλασιάσουμε με μια *συνάρτηση*. Η απλούστερη τέτοια συνάρτηση θα ήταν η $u(x) = x$, οπότε θα εξετάσουμε αν η $y_2 = xe^{rx}$ είναι επίσης λύση. Αντικαθιστώντας την $y_2$ στη διαφορική εξίσωση, παίρνουμε

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx} \\ &= (2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx} \\ &= (0)e^{rx} + (0)xe^{rx} = 0. \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος μηδενίζεται διότι $r = -b/2a$. Ο δεύτερος όρος μηδενίζεται διότι η $r$ είναι λύση της βοηθητικής εξίσωσης. Οι συναρτήσεις $y_1 = e^{rx}$ και $y_2 = xe^{rx}$ είναι επομένως γραμμικά ανεξάρτητες (δείτε την Άσκηση 62). Βάσει του Θεωρήματος 2 καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

> **ΘΕΩΡΗΜΑ 4** Αν η $r$ είναι η μοναδική (διπλή) πραγματική ρίζα της βοηθητικής εξίσωσης $ar^2 + br + c = 0$, τότε η
> $$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$$
> είναι η γενική λύση της $ay'' + by' + cy = 0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2** Βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

**Λύση** Η βοηθητική εξίσωση είναι

$$r^2 + 4r + 4 = 0,$$

η οποία γράφεται

$$(r + 2)^2 = 0.$$

Συνεπώς, η $r = -2$ είναι διπλή λύση. Επομένως, η γενική λύση είναι

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

■

**Περίπτωση 3:** $b^2 - 4ac < 0$. Σε αυτή την περίπτωση, η βοηθητική εξίσωση έχει δύο μιγαδικές ρίζες $r_1 = \alpha + i\beta$ και $r_2 = \alpha - i\beta$, όπου $\alpha$ και $\beta$ πραγματικοί αριθμοί και $i^2 = -1$. (Οι πραγματικοί αριθμοί είναι οι $\alpha = -b/2a$ και $\beta = \sqrt{4ac - b^2}/2a$.) Οι δύο αυτές μιγαδικές ρίζες παράγουν τότε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

και

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

(Οι εκφράσεις με τα ημίτονα και τα συνημίτονα προκύπτουν από την ταυτότητα του Euler που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 9.9.) Ωστόσο, οι λύσεις $y_1$ και $y_2$ είναι *μιγαδικές* και όχι πραγματικές. Όμως, λόγω της αρχής της επαλληλίας (Θεώρημα 1), μπορούμε από αυτές να πάρουμε τις δύο πραγματικές λύσεις

$$y_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = e^{\alpha x}\cos \beta x \quad \text{και} \quad y_4 = \frac{1}{2i}y_1 - \frac{1}{2i}y_2 = e^{\alpha x}\sin \beta x.$$

Οι συναρτήσεις $y_3$ και $y_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες (δείτε την Άσκηση 63). Βάσει του Θεωρήματος 2 καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 5** Αν $r_1 = \alpha + i\beta$ και $r_2 = \alpha - i\beta$ είναι δύο μιγαδικές ρίζες της βοηθητικής εξίσωσης $ar^2 + br + c = 0$, τότε η

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

είναι η γενική λύση της $ay'' + by' + cy = 0$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3** Βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

**Λύση** Η βοηθητική εξίσωση είναι

$$r^2 - 4r + 5 = 0.$$

Οι ρίζες είναι το μιγαδικό ζεύγος $r = \left(4 \pm \sqrt{16 - 20}\right)/2$ ή $r_1 = 2 + i$ και $r_2 = 2 - i$. Επομένως, τα $\alpha = 2$ και $\beta = 1$ δίνουν τη γενική λύση

$$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

■

## Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών

Για να προσδιορίσουμε τη μοναδική λύση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης, ήταν αρκετό να καθορίσουμε την τιμή της λύσης σε ένα σημείο. Όμως, η γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές, συνεπώς χρειάζεται να καθορίσουμε δύο συνθήκες. Ένας τρόπος είναι να καθορίσουμε την τιμή της συνάρτησης λύσης και της παραγώγου της σε ένα σημείο: $y(x_0) = y_0$ και $y'(x_0) = y_1$. Οι συνθήκες αυτές ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**. Το ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύεται σε πιο προχωρημένα μαθήματα και εγγυάται την ύπαρξη μοναδικής λύσης τόσο για ομογενή όσο και για μη ομογενή γραμμικά προβλήματα αρχικών τιμών δεύτερης τάξης.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 6** Αν οι $P$, $Q$, $R$, και $G$ είναι παντού συνεχείς σε ένα ανοιχτό διάστημα $I$, τότε υπάρχει μία και μόνη συνάρτηση που ικανοποιεί ταυτόχρονα τη διαφορική εξίσωση

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

στο διάστημα $I$, καθώς και τις αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{και} \quad y'(x_0) = y_1$$

στο καθορισμένο σημείο $x_0 \in I$.

Είναι σημαντικό να κατανοήσετε ότι το Θεώρημα 6 ισχύει για οποιεσδήποτε πραγματικές τιμές των $y_0$ και $y_1$. Ακολουθεί ένα παράδειγμα προβλήματος αρχικών τιμών για μια ομογενή εξίσωση.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4** Βρείτε την ειδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y'' - 2y' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

**Λύση** Η βοηθητική εξίσωση είναι

$$r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0.$$

Η διπλή πραγματική ρίζα είναι η $r = 1$, που δίνει τη γενική λύση

$$y = c_1e^x + c_2xe^x.$$

Τότε,

$$y' = c_1e^x + c_2(x + 1)e^x.$$

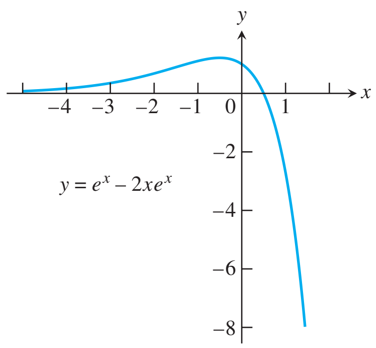
Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$1 = c_1 + c_2 \cdot 0 \quad \text{και} \quad -1 = c_1 + c_2 \cdot 1.$$

Συνεπώς, $c_1 = 1$ και $c_2 = -2$. Η μοναδική λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι η

$$y = e^x - 2xe^x.$$

Η καμπύλη λύσης φαίνεται στο Σχήμα 17.1 ■




**ΣΧΗΜΑ 17.1** Η καμπύλη της ειδικής λύσης για το Παράδειγμα 4.

Μια άλλη προσέγγιση για να καθορίσουμε τις τιμές των δύο αυθαίρετων σταθερών της γενικής λύσης μιας δευτεροτάξιας διαφορικής εξίσωσης είναι να καθορίσουμε τις τιμές της συνάρτησης λύσης σε *δύο διαφορετικά σημεία* του διαστήματος $I$. Δηλαδή, λύνουμε τη διαφορική εξίσωση υπό τις **συνοριακές συνθήκες**

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{και} \quad y(x_2) = y_2,$$

όπου τα $x_1$ και $x_2$ ανήκουν και τα δύο στο $I$. Εδώ, τα $y_1$ και $y_2$ μπορούν και πάλι να πάρουν οποιεσδήποτε πραγματικές τιμές. Η διαφορική εξίσωση σε συνδυασμό με τις εκάστοτε συνοριακές συνθήκες ονομάζεται **πρόβλημα συνοριακών τιμών**. Αντίθετα με τα όσα διατυπώνονται στο Θεώρημα 6, τα προβλήματα συνοριακών τιμών δεν διαθέτουν πάντοτε λύση ή ενδεχομένως να διαθέτουν περισσότερες της μίας λύσης (δείτε την Άσκηση 65). Τα προβλήματα αυτά μελετώνται σε πιο προχωρημένα μαθήματα, αλλά εδώ παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα όπου υπάρχει μοναδική λύση.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5** Λύστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' + 4y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1.$$

**Λύση** Η βοηθητική εξίσωση είναι η $r^2 + 4r = 0$, που έχει τις μιγαδικές ρίζες $r = \pm 2i$. Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Οι συνοριακές συνθήκες ικανοποιούνται αν

$$y(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{12}\right) = c_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

Έπεται ότι $c_1 = 0$ και $c_2 = 2$. Η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών είναι η

$$y = 2 \sin 2x.$$ ■

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 17.1

Στις Ασκήσεις 1-30, βρείτε τη γενική λύση των εξισώσεων που δίνονται.

**1.** $y'' - y' - 12y = 0$

**2.** $3y'' - y' = 0$

**3.** $y'' + 3y' - 4y = 0$

**4.** $y'' - 9y = 0$

**5.** $y'' - 4y = 0$

**6.** $y'' - 64y = 0$

**7.** $2y'' - y' - 3y = 0$

**8.** $9y'' - y = 0$

**9.** $8y'' - 10y' - 3y = 0$

**10.** $3y'' - 20y' + 12y = 0$

**11.** $y'' + 9y = 0$

**12.** $y'' + 4y' + 5y = 0$

**13.** $y'' + 25y = 0$

**14.** $y'' + y = 0$

**15.** $y'' - 2y' + 5y = 0$

**16.** $y'' + 16y = 0$

**17.** $y'' + 2y' + 4y = 0$

**18.** $y'' - 2y' + 3y = 0$

**19.** $y'' + 4y' + 9y = 0$

**20.** $4y'' - 4y' + 13y = 0$

**21.** $y'' = 0$

**22.** $y'' + 8y' + 16y = 0$

**23.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

**24.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

**25.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

**26.** $4\dfrac{d^2y}{dx^2} - 12\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

**27.** $4\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

**28.** $4\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

**29.** $9\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

**30.** $9\dfrac{d^2y}{dx^2} - 12\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

Στις Ασκήσεις 31-40, βρείτε τη μοναδική λύση του εκάστοτε προβλήματος αρχικών τιμών δεύτερης τάξης.

**31.** $y'' + 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 3$

**32.** $y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = -2$

**33.** $y'' + 12y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

**34.** $12y'' + 5y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$

**35.** $y'' + 8y = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 2$

**36.** $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

**37.** $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

**38.** $4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 4, y'(0) = 4$

**39.** $4\dfrac{d^2y}{dx^2} + 12\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0, \quad y(0) = 2, \dfrac{dy}{dx}(0) = 1$

**40.** $9\dfrac{d^2y}{dx^2} - 12\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0, \quad y(0) = -1, \dfrac{dy}{dx}(0) = 1$

Στις Ασκήσεις 41-55, βρείτε τη γενική λύση.

**41.** $y'' - 2y' - 3y = 0$

**42.** $6y'' - y' - y = 0$

**43.** $4y'' + 4y' + y = 0$

**44.** $y'' + 2y' + 2y = 0$

**45.** $4y'' + 20y = 0$

**46.** $6y'' + 13y' - 5y = 0$

**47.** $25y'' + 10y' + y = 0$

**48.** $6y'' + 13y' - 5y = 0$

**49.** $4y'' + 4y' + 5y = 0$

**50.** $y'' + 4y' + 6y = 0$

**51.** $16y'' - 24y' + 9y = 0$

**52.** $6y'' - 5y' - 6y = 0$

**53.** $9y'' + 24y' + 16y = 0$

**54.** $4y'' + 16y' + 52y = 0$

**55.** $6y'' - 5y' - 4y = 0$

Στις Ασκήσεις 56-60, λύστε το εκάστοτε πρόβλημα αρχικών τιμών.

**56.** $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2$

**57.** $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$

**58.** $4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 2$

**59.** $3y'' + y' - 14y = 0, \quad y(\pi) = 1, y'(\pi) = 0$

**60.** $4y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1$

**61.** Αποδείξτε ότι οι δύο συναρτήσεις λύσεις του Θεωρήματος 3 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

**62.** Αποδείξτε ότι οι δύο συναρτήσεις λύσεις του Θεωρήματος 4 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

**63.** Αποδείξτε ότι οι δύο συναρτήσεις λύσεις του Θεωρήματος 5 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

**64.** Αποδείξτε ότι αν οι $y_1$ και $y_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης (2), τότε οι συναρτήσεις $y_3 = y_1 + y_2$ και $y_4 = y_1 - y_2$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

**65.** **α.** Δείξτε ότι δεν υπάρχει λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 1.$$

**β.** Δείξτε ότι υπάρχουν άπειρες το πλήθος λύσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$

**66.** Δείξτε ότι αν $a$, $b$, και $c$ θετικές σταθερές, τότε όλες οι λύσεις της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = 0$$

τείνουν στο μηδέν καθώς $x \to \infty$.

# 17.2 Μη ομογενείς γραμμικές εξισώσεις

Στην ενότητα αυτή μελετάμε δύο μεθόδους επίλυσης μη ομογενών δευτεροτάξιων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Πρόκειται για τις μεθόδους *απροσδιόριστων συντελεστών* και *μεταβολής των παραμέτρων*. Ξεκινάμε εξετάζοντας τη μορφή της γενικής λύσης.

## Μορφή της γενικής λύσης

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε τη μη ομογενή εξίσωση

$$ay'' + by' + cy = G(x), \tag{1}$$

όπου $a$, $b$, και $c$ σταθερές και η $G$ είναι συνεχής σε κάποιο ανοιχτό διάστημα $I$. Έστω $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ η γενική λύση της αντίστοιχης **συμπληρωματικής εξίσωσης**

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

(Μάθαμε πώς βρίσκουμε την $y_c$ στην Ενότητα 17.1.) Έστω τώρα ότι μπορούμε με κάποιον τρόπο να βρούμε μια ειδική λύση $y_p$ της μη ομογενούς εξίσωσης (1). Τότε το άθροισμα

$$y = y_c + y_p \tag{3}$$

αποτελεί επίσης λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (1) διότι

$$\begin{aligned} a(y_c + y_p)'' &+ b(y_c + y_p)' + c(y_c + y_p) \\ &= (ay_c'' + by_c' + cy_c) + (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= 0 + G(x) \qquad \text{Η } y_c \text{ είναι λύση της Εξ. (2) και η } y_p \text{ της Εξ. (1)} \\ &= G(x). \end{aligned}$$

Επιπλέον, αν η $y = y(x)$ είναι η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (1), τότε οφείλει να έχει τη μορφή της Εξίσωσης (3). Αυτό αιτιολογείται από την παρατήρηση ότι για κάθε συνάρτηση $y_p$ που ικανοποιεί την Εξίσωση (1), έχουμε

$$\begin{aligned} a(y - y_p)'' &+ b(y - y_p)' + c(y - y_p) \\ &= (ay'' + by' + cy) - (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= G(x) - G(x) = 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η $y_c = y - y_p$ είναι η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης (2). Αποδείξαμε λοιπόν την ακόλουθη πρόταση.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 7** Η γενική λύση $y = y(x)$ της μη ομογενούς εξίσωσης (1) έχει τη μορφή

$$y = y_c + y_p$$

όπου η **συμπληρωματική λύση** $y_c$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (2) και η $y_p$ είναι οποιαδήποτε **ειδική λύση** της μη ομογενούς εξίσωσης (1).

## Η μέθοδος των απροσδιόριστων συντελεστών

Η συγκεκριμένη μέθοδος εύρεσης μιας ειδικής λύσης $y_p$ της μη ομογενούς εξίσωσης (1) εφαρμόζεται σε ειδικές περιπτώσεις όπου η $G(x)$ είναι άθροισμα όρων ποικίλων πολυωνύμων $p(x)$ που πολλαπλασιάζουν ένα εκθετικό με πιθανούς παράγοντες ημιτόνων ή συνημιτόνων. Δηλαδή, η $G(x)$ είναι άθροισμα όρων των μορφών:

$$p_1(x)e^{rx}, \qquad p_2(x)e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad p_3(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Παραδείγματος χάριν, τα $1 - x$, $e^{2x}$, $xe^x$, $\cos x$ και $5e^x - \sin 2x$ αναπαριστούν συναρτήσεις αυτής της κατηγορίας. (Ουσιαστικά, πρόκειται για συναρτήσεις που επιλύουν ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, αλλά η τάξη των εξισώσεων μπορεί να είναι μεγαλύτερη του δύο.) Ακολουθούν αρκετά παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1** Λύστε τη μη ομογενή εξίσωση

$$y'' - 2y' - 3y = 1 - x^2.$$

**Λύση** Για τη συμπληρωματική εξίσωση $y'' - 2y' - 3y = 0$, η βοηθητική εξίσωση είναι η

$$r^2 - 2r - 3 = (r + 1)(r - 3) = 0.$$

Οι ρίζες της είναι $r = -1$ και $r = 3$, που δίνουν τη συμπληρωματική λύση

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}.$$

Τώρα, η $G(x) = 1 - x^2$ είναι πολυώνυμο βαθμού 2. Θα ήταν εύλογο να υποθέσουμε ότι μια ειδική λύση της δεδομένης μη ομογενούς εξίσωσης θα είναι επίσης πολυώνυμο βαθμού 2 διότι αν η $y$ είναι πολυώνυμο βαθμού 2, τότε η $y'' - 2y' - 3y$ θα είναι επίσης πολυώνυμο βαθμού 2. Έτσι αναζητούμε μια ειδική λύση της μορφής

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Πρέπει να προσδιορίσουμε τους άγνωστους συντελεστές $A$, $B$, και $C$. Αντικαθιστώντας το πολυώνυμο $y_p$ και τις παραγώγους του στη δεδομένη μη ομογενή εξίσωση, έχουμε

$$2A - 2(2Ax + B) - 3(Ax^2 + Bx + C) = 1 - x^2$$

ή, με αναγωγή των όμοιων όρων του $x$,

$$-3Ax^2 + (-4A - 3B)x + (2A - 2B - 3C) = 1 - x^2.$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση ισχύει για όλες τις τιμές του $x$ αν τα δύο μέλη της είναι ταυτοτικά ίσα πολυώνυμα δεύτερου βαθμού. Συνεπώς, εξισώνουμε τους συντελεστές των όμοιων δυνάμεων του $x$ και παίρνουμε

$$-3A = -1, \qquad -4A - 3B = 0, \quad \text{και} \quad 2A - 2B - 3C = 1.$$

Οι εξισώσεις αυτές συνεπάγονται με τη σειρά τους ότι $A = 1/3$, $B = -4/9$, και $c = 5/27$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στη δευτεροβάθμια έκφραση της ειδικής λύσης μας, παίρνουμε

$$y_p = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{5}{27}.$$

Βάσει του Θεωρήματος 7, η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι

$$y = y_c + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{5}{27}.$$ ■

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2** Βρείτε μια ειδική λύση της $y'' - y' = 2 \sin x$.

**Λύση** Αν δοκιμάσουμε να βρούμε μια ειδική λύση της μορφής

$$y_p = A \sin x$$

και αντικαταστήσουμε τις παραγώγους της $y_p$ στη δεδομένη εξίσωση, βρίσκουμε ότι το $A$ πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$-A \sin x + A \cos x = 2 \sin x$$

για όλες τις τιμές του $x$. Εφόσον αυτό απαιτεί το $A$ να ισούται ταυτόχρονα με $-2$ και με 0, συμπεραίνουμε ότι η μη ομογενής διαφορική εξίσωση δεν έχει λύση της μορφής $A \sin x$.

Όπως θα φανεί, η απαιτούμενη μορφή είναι το άθροισμα

$$y_p = A \sin x + B \cos x.$$

Το αποτέλεσμα της αντικατάστασης των παραγώγων αυτής της νέας δοκιμαστικής λύσης στη διαφορική εξίσωση είναι

$$-A \sin x - B \cos x - (A \cos x - B \sin x) = 2 \sin x$$

ή

$$(B - A) \sin x - (A + B) \cos x = 2 \sin x.$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση οφείλει να είναι ταυτότητα. Εξισώνοντας τους συντελεστές των όμοιων όρων σε κάθε μέλος, παίρνουμε

$$B - A = 2 \quad \text{και} \quad A + B = 0.$$

Η λύση του συστήματος των δύο αυτών εξισώσεων είναι $A = -1$ και $B = 1$. Η ειδική μας λύση είναι λοιπόν η

$$y_p = \cos x - \sin x.$$ ■

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3** Βρείτε μια ειδική λύση της $y'' - 3y' + 2y = 5e^x$.

**Λύση** Αν αντικαταστήσουμε την

$$y_p = Ae^x$$

και τις παραγώγους της στη διαφορική εξίσωση, βρίσκουμε ότι

$$Ae^x - 3Ae^x + 2Ae^x = 5e^x$$

ή

$$0 = 5e^x.$$

Ωστόσο, η εκθετική συνάρτηση δεν μηδενίζεται ποτέ. Το πρόβλημα έγκειται στο ότι η $y = e^x$ είναι ήδη λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Η βοηθητική εξίσωση είναι

$$r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2) = 0,$$

η οποία έχει ως ρίζα το $r = 1$. Όταν λοιπόν αντικαθιστούμε την $Ae^x$ στο αριστερό μέλος της διαφορικής εξίσωσης, το αποτέλεσμα ισούται αναμενόμενα με το μηδέν.

Η κατάλληλη τροποποίηση της δοκιμαστικής λύσης σε αυτή την περίπτωση είναι ο πολλαπλασιασμός της $Ae^x$ με το $x$. Έτσι, η νέα μας δοκιμαστική λύση είναι η

$$y_p = Axe^x.$$

Το αποτέλεσμα της αντικατάστασης των παραγώγων αυτής της νέας υποψήφιας λύσης στη διαφορική εξίσωση είναι

$$(Axe^x + 2Ae^x) - 3(Axe^x + Ae^x) + 2Axe^x = 5e^x$$

ή

$$-Ae^x = 5e^x$$

Επομένως, το $A = -5$ δίνει την ειδική λύση

$$y_p = -5xe^x.$$ ■

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4** Βρείτε μια ειδική λύση της $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$.

**Λύση** Η βοηθητική εξίσωση της συμπληρωματικής εξίσωσης είναι η

$$r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2 = 0$$

και έχει ως διπλή ρίζα το $r = 3$. Η κατάλληλη επιλογή για την $y_p$ σε αυτή την περίπτωση δεν είναι ούτε η $Ae^{3x}$ ούτε η $Axe^{3x}$ διότι η συμπληρωματική λύση περιέχει ήδη και τους δύο αυτούς όρους. Έτσι, επιλέγουμε έναν όρο που περιέχει ως παράγοντα την αμέσως μεγαλύτερη δύναμη του $x$. Όταν αντικαταστήσουμε την

$$y_p = Ax^2e^{3x}$$

και τις παραγώγους της στη δεδομένη διαφορική εξίσωση, παίρνουμε

$$(9Ax^2e^{3x} + 12Axe^{3x} + 2Ae^{3x}) - 6(3Ax^2e^{3x} + 2Axe^{3x}) + 9Ax^2e^{3x} = e^{3x}$$

ή

$$2Ae^{3x} = e^{3x}.$$

Συνεπώς, $A = 1/2$, και η ειδική λύση είναι η

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^{3x}.$$ ■

Όταν θέλουμε να βρούμε μια ειδική λύση της Εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $G(x)$ είναι άθροισμα δύο ή περισσότερων όρων, επιλέγουμε μια δοκιμαστική συνάρτηση για κάθε όρο της $G(x)$ και τις προσθέτουμε.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5** Βρείτε τη γενική λύση της $y'' - y' = 5e^x - \sin 2x$.

**Λύση** Εξετάζουμε πρώτα τη βοηθητική εξίσωση

$$r^2 - r = 0.$$

Οι ρίζες της είναι $r = 1$ και $r = 0$. Επομένως, η συμπληρωματική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$y_c = c_1e^x + c_2.$$

Αναζητούμε τώρα μια ειδική λύση $y_p$. Δηλαδή, ψάχνουμε μια συνάρτηση που θα παράγει την $5e^x - \sin 2x$ όταν αντικατασταθεί στο αριστερό μέλος της δεδομένης διαφορικής εξίσωσης. Το ένα μέρος της $y_p$ θα πρέπει να δίνει το $5e^x$, και το άλλο μέρος της να δίνει το $-\sin 2x$.

Εφόσον κάθε συνάρτηση της μορφής $c_1e^x$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης, επιλέγουμε ως δοκιμαστική λύση $y_p$ το άθροισμα

$$y_p = Axe^x + B\cos 2x + C\sin 2x,$$

που περιέχει το $xe^x$ ενώ αλλιώς ίσως να είχαμε συμπεριλάβει μόνο το $e^x$. Όταν αντικαταστήσουμε τις παραγώγους της $y_p$ στη διαφορική εξίσωση, προκύπτει η εξίσωση

$$\begin{aligned}&(Axe^x + 2Ae^x - 4B\cos 2x - 4C\sin 2x)\\ &\qquad - (Axe^x + Ae^x - 2B\sin 2x + 2C\cos 2x) = 5e^x - \sin 2x.\end{aligned}$$

ή

$$Ae^x - (4B + 2C)\cos 2x + (2B - 4C)\sin 2x = 5e^x - \sin 2x.$$

Η εξίσωση αυτή θα ισχύει αν

$$A = 5, \quad 4B + 2C = 0, \quad 2B - 4C = -1.$$

ή $A = 5$, $B = -1/10$, και $C = 1/5$. Η ειδική μας λύση είναι η

$$y_p = 5xe^x - \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{1}{5}\sin 2x.$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2 + 5xe^x - \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{1}{5}\sin 2x. \qquad \blacksquare$$

Ο ακόλουθος πίνακας θα σας φανεί χρήσιμος στην επίλυση των προβλημάτων της ενότητας αυτής.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 17.1** Η μέθοδος των απροσδιόριστων συντελεστών για επιλεγμένες εξισώσεις της μορφής $ay'' + by' + cy = G(x)$.

| **Αν η $G(x)$ έχει έναν όρο που είναι σταθερό πολλαπλάσιο της . . .** | **και αν** | **τότε συμπεριλαμβάνουμε αυτή την έκφραση στη δοκιμαστική συνάρτηση για την $y_p$** |
|---|---|---|
| $e^{rx}$ | η $r$ δεν είναι ρίζα της βοηθητικής εξίσωσης | $Ae^{rx}$ |
| | η $r$ είναι απλή ρίζα της βοηθητικής εξίσωσης | $Axe^{rx}$ |
| | η $r$ είναι διπλή ρίζα της βοηθητικής εξίσωσης | $Ax^2e^{rx}$ |
| $\sin kx$, $\cos kx$ | το $ki$ δεν είναι ρίζα της βοηθητικής εξίσωσης | $B\cos kx + C\sin kx$ |
| $px^2 + qx + m$ | το 0 δεν είναι ρίζα της βοηθητικής εξίσωσης | $Dx^2 + Ex + F$ |
| | το 0 είναι απλή ρίζα της βοηθητικής εξίσωσης | $Dx^3 + Ex^2 + Fx$ |
| | το 0 είναι διπλή ρίζα της βοηθητικής εξίσωσης | $Dx^4 + Ex^3 + Fx^2$ |

## Η μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων

Πρόκειται για μια γενική μέθοδο εύρεσης μιας ειδικής λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης (1) όταν είναι γνωστή η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης. Πιο συγκεκριμένα, αντικαθιστούμε τις σταθερές $c_1$ και $c_2$ της συμπληρωματικής λύσης με τις συναρτήσεις $v_1 = v_1(x)$ και $v_2 = v_2(x)$ και απαιτούμε (με τρόπο που θα εξηγήσουμε) η προκύπτουσα έκφραση να ικανοποιεί τη μη ομογενή εξίσωση (1). Πρέπει όμως να προσδιορίσουμε δύο συναρτήσεις, και η απαίτηση να ικανοποιείται η Εξίσωση (1) είναι μόνο μία συνθήκη. Ως δεύτερη συνθήκη, απαιτούμε επίσης να ισχύει

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0. \tag{4}$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} y &= v_1y_1 + v_2y_2, \\ y' &= v_1y_1' + v_2y_2', \\ y'' &= v_1y_1'' + v_2y_2'' + v_1'y_1' + v_2'y_2'. \end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε αυτές τις εκφράσεις στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (1), παίρνουμε

$$v_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + v_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(v_1'y_1' + v_2'y_2') = G(x).$$

Οι όροι των δύο πρώτων παρενθέσεων μηδενίζονται αφού οι $y_1$ και $y_2$ είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (2). Έτσι, η μη ομογενής εξίσωση (1) ικανοποιείται αν, επιπλέον της εξίσωσης (4), απαιτήσουμε να ισχύει

$$a(v_1'y_1' + v_2'y_2') = G(x). \tag{5}$$

Οι Εξισώσεις (4) και (5) μπορούν να λυθούν ως σύστημα

$$\begin{aligned} v_1'y_1 + v_2'y_2 &= 0, \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' &= \frac{G(x)}{a} \end{aligned}$$

με αγνώστους τις συναρτήσεις $v_1'$ και $v_2'$. Η συνήθης διαδικασία επίλυσης αυτού του απλού συστήματος είναι η χρήση της *μεθόδου των οριζουσών* (που είναι γνωστή και ως *κανόνας του Cramer*), την οποία θα παρουσιάσουμε στα παραδείγματα που ακολουθούν. Από τη στιγμή που γνωρίζουμε τις παραγώγους συναρτήσεις $v_1'$ και $v_2'$, οι συναρτήσεις $v_1 = v_1(x)$ και $v_2 = v_2(x)$ μπορούν να βρεθούν με ολοκλήρωση. Ακολουθεί μια σύνοψη της μεθόδου.

**Διαδικασία μεθόδου μεταβολής παραμέτρων**

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων για να βρούμε μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = G(x),$$

μπορούμε να εργαστούμε απευθείας με τις Εξισώσεις (4) και (5). Δεν είναι απαραίτητο να τις συναγάγουμε ξανά. Τα βήματα είναι τα ακόλουθα.

1. Λύνουμε την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

$$ay'' + by' + cy = 0$$

για να βρούμε τις συναρτήσεις $y_1$ και $y_2$.

2. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} v_1'y_1 + v_2'y_2 &= 0, \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' &= \frac{G(x)}{a} \end{aligned}$$

ως προς τις παραγώγους συναρτήσεις $v_1'$ και $v_2'$.

3. Ολοκληρώνουμε τις $v_1'$ και $v_2'$ και βρίσκουμε τις συναρτήσεις $v_1 = v_1(x)$ και $v_2 = v_2(x)$.

4. Γράφουμε την ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (1) ως

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6** Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + y = \tan x.$$

**Λύση** Η λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$y'' + y = 0$$

δίνεται από την

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Εφόσον $y_1(x) = \cos x$ και $y_2(x) = \sin x$, οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται στις Εξισώσεις (4) και (5) είναι οι

$$\begin{aligned} v_1' \cos x + v_2' \sin x &= 0, \\ -v_1' \sin x + v_2' \cos x &= \tan x. \qquad a = 1 \end{aligned}$$

Επιλύοντας το σύστημα παίρνουμε

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-\tan x \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}.$$

Ομοίως,

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \sin x.$$

Αφού ολοκληρώσουμε τις $v_1'$ και $v_2'$, έχουμε

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \int \frac{-\sin^2 x}{\cos x}\, dx \\ &= -\int (\sec x - \cos x)\, dx \\ &= -\ln|\sec x + \tan x| + \sin x, \end{aligned}$$

και

$$v_2(x) = \int \sin x\, dx = -\cos x.$$

Προσέξτε ότι έχουμε παραλείψει τις σταθερές ολοκλήρωσης κατά την εύρεση των $v_1$ και $v_2$. Ο λόγος είναι ότι απλά θα απορροφούνταν στις αυθαίρετες σταθερές της συμπληρωματικής λύσης.

Αντικαθιστώντας τις $v_1$ και $v_2$ στην έκφραση της $y_p$ στο Βήμα 4, παίρνουμε

$$\begin{aligned} y_p &= [-\ln|\sec x + \tan x| + \sin x] \cos x + (-\cos x) \sin x \\ &= (-\cos x) \ln|\sec x + \tan x|. \end{aligned}$$

Η γενική λύση είναι

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - (\cos x) \ln|\sec x + \tan x|.$$ ■

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7** Λύστε τη μη ομογενή εξίσωση

$$y'' + y' - 2y = xe^x.$$

**Λύση** Η βοηθητική εξίσωση είναι

$$r^2 + r - 2 = (r + 2)(r - 1) = 0$$

που δίνει τη συμπληρωματική λύση

$$y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x.$$

Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται στις Εξισώσεις (4) και (5) είναι οι

$$v_1' e^{-2x} + v_2' e^x = 0,$$

$$-2v_1' e^{-2x} + v_2' e^x = xe^x. \qquad a = 1$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα ως προς $v_1'$ και $v_2'$, παίρνουμε

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ xe^x & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^x \\ -2e^{-2x} & e^x \end{vmatrix}} = \frac{-xe^{2x}}{3e^{-x}} = -\frac{1}{3}xe^{3x}.$$

Ομοίως

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & xe^x \end{vmatrix}}{3e^{-x}} = \frac{xe^{-x}}{3e^{-x}} = \frac{x}{3}.$$

Ολοκληρώνοντας για να βρούμε τις παραμετρικές συναρτήσεις, έχουμε

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \int -\frac{1}{3}xe^{3x}\,dx \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{27}(1 - 3x)e^{3x}, \end{aligned}$$

και

$$v_2(x) = \int \frac{x}{3}\,dx = \frac{x^2}{6}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} y_p &= \left[\frac{(1 - 3x)e^{3x}}{27}\right]e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{6}\right)e^x \\ &= \frac{1}{27}e^x - \frac{1}{9}xe^x + \frac{1}{6}x^2e^x. \end{aligned}$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x - \frac{1}{9}xe^x + \frac{1}{6}x^2 e^x,$$

όπου ο όρος $(1/27)e^x$ της $y_p$ έχει απορροφηθεί στον όρο $c_2 e^x$ της συμπληρωματικής λύσης. ■

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 17.2

Λύστε τις εξισώσεις των Ασκήσεων 1-16 με τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών.

1. $y'' - 3y' - 10y = -3$
2. $y'' - 3y' - 10y = 2x - 3$
3. $y'' - y' = \sin x$
4. $y'' + 2y' + y = x^2$
5. $y'' + y = \cos 3x$
6. $y'' + y = e^{2x}$
7. $y'' - y' - 2y = 20 \cos x$
8. $y'' + y = 2x + 3e^x$
9. $y'' - y' = e^x + x^2$
10. $y'' + 2y' + y = 6 \sin 2x$
11. $y'' - y' - 6y = e^{-x} - 7 \cos x$
12. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x} + e^{-2x} - x$
13. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} = 15x^2$
14. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = -8x + 3$
15. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} = e^{3x} - 12x$

**16.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 7\dfrac{dy}{dx} = 42x^2 + 5x + 1$

Λύστε τις εξισώσεις των Ασκήσεων 17-28 με μεταβολή των παραμέτρων.

**17.** $y'' + y = x$

**18.** $y'' + y = \tan x, \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

**19.** $y'' + y' = \sin x$

**20.** $y'' + 2y' + y = e^x$

**21.** $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

**22.** $y'' - y = x$

**23.** $y'' - y = e^x$

**24.** $y'' - y = \sin x$

**25.** $y'' + 4y' + 5y = 10$

**26.** $y'' - y' = 2^x$

**27.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x, \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

**28.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = e^x \cos x, \quad x > 0$

Σε καθεμιά από τις Ασκήσεις 29-32, η εκάστοτε διαφορική εξίσωση έχει την ειδική λύση $y_p$ που δίνεται. Προσδιορίστε τους συντελεστές στην $y_p$ και έπειτα λύστε τη διαφορική εξίσωση.

**29.** $y'' - 5y' = xe^{5x}, \quad y_p = Ax^2e^{5x} + Bxe^{5x}$

**30.** $y'' - y' = \cos x + \sin x, \quad y_p = A\cos x + B\sin x$

**31.** $y'' + y' = 2\cos x + \sin x, \quad y_p = Ax\cos x + Bx\sin x$

**32.** $y'' + y' - 2y = xe^x, \quad y_p = Ax^2e^x + Bxe^x$

Στις Ασκήσεις 33-36, λύστε τις διαφορικές εξισώσεις **(α)** με μεταβολή παραμέτρων και **(β)** με τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών.

**33.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = e^x + e^{-x}$

**34.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 2e^{2x}$

**35.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} - 5y = e^x + 4$

**36.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 9\dfrac{dy}{dx} = 9e^{9x}$

Λύστε τις διαφορικές εξισώσεις των Ασκήσεων 37-46. Κάποιες λύνονται με τη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών, αλλά κάποιες όχι.

**37.** $y'' + y = \cot x, \quad 0 < x < \pi$

**38.** $y'' + y = \csc x, \quad 0 < x < \pi$

**39.** $y'' - 8y' = e^{8x}$

**40.** $y'' + 4y = \sin x$

**41.** $y'' - y' = x^3$

**42.** $y'' + 4y' + 5y = x + 2$

**43.** $y'' + 2y' = x^2 - e^x$

**44.** $y'' + 9y = 9x - \cos x$

**45.** $y'' + y = \sec x \tan x, \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

**46.** $y'' - 3y' + 2y = e^x - e^{2x}$

Η μέθοδος των απροσδιόριστων συντελεστών μπορεί μερικές φορές να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Εφαρμόστε τη για να λύσετε τις διαφορικές εξισώσεις των Ασκήσεων 47-50.

**47.** $y' - 3y = e^x$

**48.** $y' + 4y = x$

**49.** $y' - 3y = 5e^{3x}$

**50.** $y' + y = \sin x$

Λύστε τις διαφορικές εξισώσεις των Ασκήσεων 51 και 52 υπό τις αρχικές συνθήκες που δίνονται.

**51.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \sec^2 x, \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad y(0) = y'(0) = 1$

**52.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = e^{2x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = \dfrac{2}{5}$

Στις Ασκήσεις 53-58, επαληθεύστε ότι η συνάρτηση που δίνεται είναι ειδική λύση της αναφερόμενης μη ομογενούς εξίσωσης. Βρείτε τη γενική λύση και υπολογίστε τις αυθαίρετες σταθερές για να βρείτε τη μοναδική λύση που ικανοποιεί τις δεδομένες αρχικές συνθήκες.

**53.** $y'' + y' = x, \quad y_p = \dfrac{x^2}{2} - x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

**54.** $y'' + y = x, \quad y_p = 2\sin x + x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

**55.** $\dfrac{1}{2}y'' + y' + y = 4e^x(\cos x - \sin x),$

$y_p = 2e^x \cos x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

**56.** $y'' - y' - 2y = 1 - 2x,$

$y_p = x - 1, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

**57.** $y'' - 2y' + y = 2e^x, \quad y_p = x^2e^x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

**58.** $y'' - 2y' + y = x^{-1}e^x, \quad x > 0,$

$y_p = xe^x \ln x, \quad y(1) = e, y'(1) = 0$

Στις Ασκήσεις 59 και 60, δίνονται δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $y_1$ και $y_2$ της ομογενούς εξίσωσης που αντιστοιχεί στη μη ομογενή εξίσωση με μεταβλητούς συντελεστές. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο μεταβολής παραμέτρων για να βρείτε μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης. Θεωρήστε σε κάθε άσκηση $x > 0$.

**59.** $x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2, \quad y_1 = x^{-2}, \quad y_2 = x$

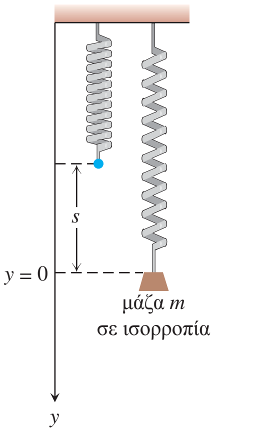
**60.** $x^2y'' + xy' - y = x, \quad y_1 = x^{-1}, \quad y_2 = x$

# 17.3 Εφαρμογές

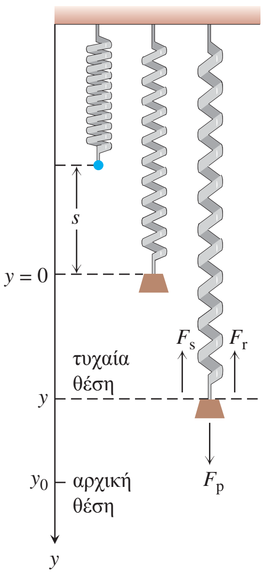
Στην ενότητα αυτή θα εφαρμόσουμε τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης στη μελέτη των ταλαντώσεων και των ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

## Ταλαντώσεις

Το άνω άκρο ενός ελατηρίου είναι στερεωμένο σε οροφή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 17.2. Σώμα μάζας $m$ εξαρτάται από το ελατήριο προκαλώντας του επιμήκυνση $s$ έως τη θέση ισορροπίας. Σύμφωνα με τον νόμο του Hooke (Ενότη-




**Σχημα 17.2** Η μάζα $m$ επιμηκύνει το ελατήριο κατά $s$ έως τη θέση ισορροπίας όπου $y = 0$.




**Σχημα 17.3** Η δύναμη της βαρύτητας $F_p$ έλκει το σώμα προς τα κάτω, ενώ η δύναμη του ελατηρίου $F_s$ και η δύναμη τριβής $F_r$ έχουν φορά προς τα πάνω. Η κίνηση ξεκινά από τη θέση $y = y_0$ και το σώμα ταλαντώνεται σε κατακόρυφη διεύθυνση.

τα 6.5), η δύναμη του ελατηρίου ισούται με $ks$, όπου $k$ η σταθερά του ελατηρίου. Το βάρος του σώματος ισούται με $mg$, επομένως στη θέση ισορροπίας θα ισχύει

$$ks = mg. \tag{1}$$

Έστω ότι εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά $y_0$ προς τα κάτω και το αφήνουμε ελεύθερο. Θέλουμε να μελετήσουμε την κίνησή του, δηλαδή την κατακόρυφη θέση του κέντρου μάζας του σε οποιαδήποτε μεταγενέστερη χρονική στιγμή.

Έστω $y$ η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του σε κάθε χρονική στιγμή $t$ μετά την έναρξη της κίνησης, όπου η θετική φορά λαμβάνεται προς τα κάτω. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι (δείτε το Σχήμα 17.3):

$F_p = mg$, η ελκτική δύναμη της βαρύτητας

$F_s = k(s + y)$, η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου,

$F_r = \delta \dfrac{dy}{dt}$, η δύναμη τριβής που θεωρείται ανάλογη της ταχύτητας.

Η δύναμη τριβής τείνει να επιβραδύνει την κίνηση του σώματος. Η συνισταμένη αυτών των δυνάμεων ισούται με $F = F_p - F_s - F_r$, και από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, $F = ma$, έχουμε

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - ks - ky - \delta\frac{dy}{dt}.$$

Από την Εξίσωση (1) είναι $mg - ks = 0$, οπότε η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \delta\frac{dy}{dt} + ky = 0, \tag{2}$$

υπό τις αρχικές συνθήκες $y(0) = y_0$ και $y'(0) = 0$. (Εδώ χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό με τόνους για να δηλώσουμε την παραγώγιση ως προς τον χρόνο $t$.)

Αυτό που αναμένουμε είναι ότι η κίνηση που περιγράφεται από την Εξίσωση (2) θα είναι μια αποσβεννύμενη ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας $y = 0$ με πλάτος που σταδιακά θα μειώνεται έως ότου μηδενιστεί εξαιτίας της επιβραδύνουσας δύναμης τριβής. Αυτό ισχύει πράγματι, και στη συνέχεια θα δείξουμε πώς οι σταθερές $m$, $\delta$ και $k$ προσδιορίζουν τη φύση της απόσβεσης. Θα δούμε επίσης ότι αν δεν υπάρχει τριβή (οπότε $\delta = 0$), τότε το σώμα θα ταλαντώνεται επ' άπειρον.

## Απλή αρμονική κίνηση

Ας θεωρήσουμε αρχικά ότι δεν υπάρχει τριβή. Τότε $\delta = 0$ και δεν υπάρχει απόσβεση. Αν θέσουμε $\omega = \sqrt{k/m}$ για να απλουστεύσουμε τους υπολογισμούς μας, τότε η δευτεροτάξια εξίσωση (2) γίνεται

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad \text{με} \quad y(0) = y_0 \quad \text{και} \quad y'(0) = 0.$$

Η βοηθητική εξίσωση είναι

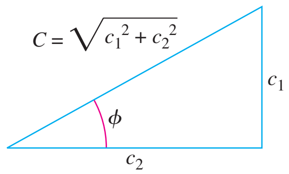
$$r^2 + \omega^2 = 0,$$

που έχει τις μιγαδικές λύσεις $r = \pm\omega i$. Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) είναι

$$y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t. \tag{3}$$

Για να λάβουμε υπόψη τις αρχικές συνθήκες, υπολογίζουμε την

$$y' = -c_1\omega \sin \omega t + c_2\omega \cos \omega t$$




**ΣΧΗΜΑ 17.4** $c_1 = C \sin \phi$ και $c_2 = C \cos \phi$

και έπειτα αντικαθιστούμε τις συνθήκες. Έτσι βρίσκουμε $c_1 = y_0$ και $c_2 = 0$. Η ειδική λύση

$$y = y_0 \cos \omega t \tag{4}$$

περιγράφει την κίνηση του σώματος. Η Εξίσωση (4) αναπαριστά **απλή αρμονική κίνηση** πλάτους $y_0$ και περιόδου $T = 2\pi/\omega$.

Η γενική λύση που δίνεται από την Εξίσωση (3) μπορεί να γραφτεί με έναν όρο χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin(\omega t + \phi) = \cos \omega t \sin \phi + \sin \omega t \cos \phi.$$

Για να εφαρμόσουμε την ταυτότητα παίρνουμε (δείτε το Σχήμα 17.4)

$$c_1 = C \sin \phi \qquad \text{και} \qquad c_2 = C \cos \phi,$$

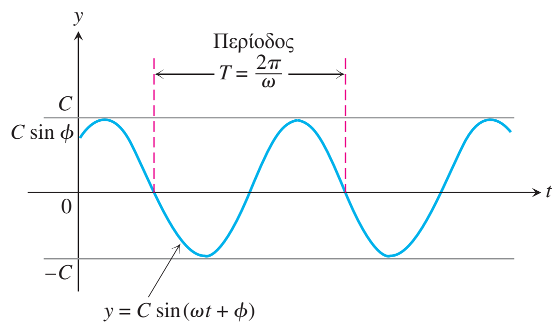
όπου

$$C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \qquad \text{και} \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{c_1}{c_2}.$$

Τότε, η γενική λύση της Εξίσωσης (3) μπορεί να γραφτεί στην εναλλακτική μορφή

$$y = C \sin(\omega t + \phi). \tag{5}$$

Εδώ τα $C$ και $\phi$ μπορούν να θεωρηθούν ως δύο νέες αυθαίρετες σταθερές, που αντικαθιστούν τις σταθερές $c_1$ και $c_2$. Η Εξίσωση (5) αναπαριστά απλή αρμονική κίνηση πλάτους $C$ και περιόδου $T = 2\pi/\omega$. Η γωνία $\omega t + \phi$ ονομάζεται **φάση** της ταλάντωσης, και το $\phi$ μπορεί να ερμηνευτεί ως η αρχική της τιμή. Μια γραφική παράσταση της απλής αρμονικής κίνησης που περιγράφει η Εξίσωση (5) δίνεται στο Σχήμα 17.5.




**ΣΧΗΜΑ 17.5** Απλή αρμονική κίνηση πλάτους $C$ και περιόδου $T$ με αρχική φάση $\phi$ (Εξίσωση 5).

## Φθίνουσα ή αποσβεννύμενη ταλάντωση

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει και τριβή, οπότε $\delta \neq 0$. Αν θέσουμε $\omega = \sqrt{k/m}$ και $2b = \delta/m$, τότε η διαφορική εξίσωση (2) γίνεται

$$y'' + 2by' + \omega^2 y = 0. \tag{6}$$

Η βοηθητική εξίσωση είναι

$$r^2 + 2br + \omega^2 = 0,$$

με ρίζες $r = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις, ανάλογα με τη σχέση των $b$ και $\omega$.

**Περίπτωση 1: $b = \omega$.** Η διπλή ρίζα της βοηθητικής εξίσωσης είναι πραγματική και ισούται με $r = -\omega$. Η γενική λύση της Εξίσωσης (6) είναι η

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{-\omega t}.$$

Αυτή η περίπτωση κίνησης ονομάζεται **κρίσιμη απόσβεση** και δεν είναι ταλαντωτική. Στο Σχήμα 17.6α φαίνεται ένα παράδειγμα αυτού του είδους της φθίνουσας κίνησης.

**Περίπτωση 2: $b > \omega$.** Οι ρίζες της βοηθητικής εξίσωσης είναι πραγματικές και άνισες, και δίνονται από τις σχέσεις $r_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega^2}$ και $r_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega^2}$. Η γενική λύση της Εξίσωσης (6) είναι η

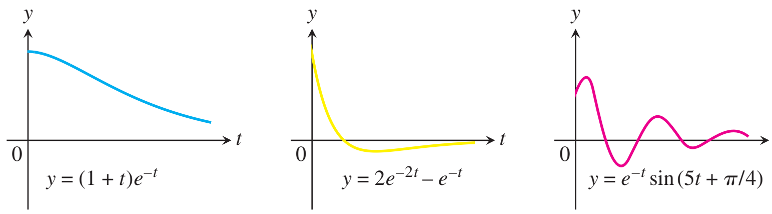
$$y = c_1 e^{(-b+\sqrt{b^2-\omega^2})t} + c_2 e^{(-b-\sqrt{b^2-\omega^2})t}.$$

Εδώ και πάλι η κίνηση δεν είναι ταλαντωτική και τα $r_1$ και $r_2$ είναι και τα δύο αρνητικά. Συνεπώς, το $y$ τείνει στο μηδέν με την πάροδο του χρόνου. Η κίνηση αυτή αναφέρεται ως **ισχυρή απόσβεση** (δείτε το Σχήμα 17.6β).

**Περίπτωση 3: $b < \omega$.** Οι ρίζες της βοηθητικής εξίσωσης είναι μιγαδικές και δίνονται από την $r = -b \pm i\sqrt{\omega^2 - b^2}$. Η γενική λύση της Εξίσωσης (6) δίνεται από την

$$y = e^{-bt}\left(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - b^2}\, t + c_2 \sin\sqrt{\omega^2 - b^2}\, t\right).$$

Η κατάσταση αυτή, που ονομάζεται **ασθενής απόσβεση**, αναπαριστά φθίνουσα ταλαντωτική κίνηση. Είναι ανάλογη με απλή αρμονική κίνηση περιόδου $T = 2\pi/\sqrt{\omega^2 - b^2}$ με τη διαφορά ότι το πλάτος δεν είναι σταθερό αλλά διαμορφώνεται από τον παράγοντα $e^{-bt}$. Επομένως, το πλάτος τείνει στο μηδέν καθώς αυξάνεται το $t$, δηλαδή η ταλάντωση τείνει να αποσβεστεί με την πάροδο του χρόνου. Προσέξτε ότι η περίοδος $T = 2\pi/\sqrt{\omega^2 - b^2}$ είναι μεγαλύτερη από την περίοδο $T_0 = 2\pi/\omega$ του χωρίς τριβή συστήματος. Επιπλέον, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του εκθέτη $b = \delta/2m$, τόσο πιο γρήγορα αποσβένουν οι ταλαντώσεις. Στο Σχήμα 17.6γ φαίνεται μια καμπύλη που απεικονίζει φθίνουσα κίνηση.




**Σχημα 17.6** Τρία παραδείγματα φθίνουσας ταλάντωσης για σύστημα μάζας-ελατηρίου με τριβή ($\delta \neq 0$).

Μπορούμε να προσθέσουμε μια εξωτερική δύναμη στο σύστημα που περιγράφεται από την Εξίσωση (2). Η δύναμη αυτή, που συχνά ονομάζεται *δύναμη διεγέρτη* ή *εξαναγκάζουσα δύναμη*, μπορεί να αναπαριστά μια εξωτερική όχληση στο σύστημα. Παραδείγματος χάριν, αν η εξίσωση περιγράφει το σύστημα ανάρτησης ενός αυτοκινήτου, η εξαναγκάζουσα δύναμη μπορεί να αναπαριστά περιοδικές ανωμαλίες του δρόμου που επηρεάζουν την απόδοση των αναρτήσεων, ή αν αναφερόμαστε στην κατακόρυφη κίνηση μιας κρεμαστής γέφυρας, τον ρόλο του διεγέρτη μπορεί να παίζουν οι άνεμοι που επικρατούν στην περιοχή. Συμπεριλαμβάνοντας μια τέτοια δύναμη, οδηγούμαστε στη δευτεροτάξια μη ομογενή εξίσωση

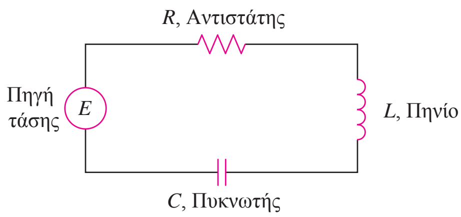
$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \delta\frac{dy}{dt} + ky = F(t). \tag{7}$$

Η μελέτη τέτοιων συστημάτων γίνεται σε πιο προχωρημένα μαθήματα.

## Ηλεκτρικά κυκλώματα

Το βασικό φυσικό μέγεθος στον ηλεκτρισμό είναι το **ηλεκτρικό φορτίο** $q$ (το ανάλογο της μάζας). Σε ηλεκτρικό πεδίο, χρησιμοποιούμε τη ροή φορτίου ή **ηλεκτρικό ρεύμα**, $I = dq/dt$, όπως θα χρησιμοποιούσαμε την ταχύτητα ενός σώματος σε βαρυτικό πεδίο. Υπάρχουν πολλές ομοιότητες μεταξύ της κίνησης σε βαρυτικό πεδίο και της ροής ηλεκτρονίων (των φορέων του φορτίου) σε ηλεκτρικό πεδίο.

Ας θεωρήσουμε το ηλεκτρικό κύκλωμα του Σχήματος 17.7. Αποτελείται από τέσσερα στοιχεία: πηγή τάσης, αντιστάτη, πηνίο (αυτεπαγωγή) και πυκνωτή (χωρητικότητα). Μπορείτε να φανταστείτε την ηλεκτρική ροή ως ροή ρευστού, όπου η πηγή τάσης είναι η αντλία ενώ ο αντιστάτης, το πηνίο και ο πυκνωτής τείνουν να εμποδίσουν τη ροή. Μια μπαταρία ή γεννήτρια αποτελούν παραδείγματα πηγών, οι οποίες παράγουν μια τάση λόγω της οποίας το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα όταν ο διακόπτης είναι κλειστός.




**ΣΧΗΜΑ 17.7** Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα.

Μια ηλεκτρική συσκευή ή ένας λαμπτήρας παρέχουν την αντίσταση. Η αυτεπαγωγή οφείλεται σε ένα μαγνητικό πεδίο που αντιτίθεται σε οποιαδήποτε μεταβολή του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο. Ο πυκνωτής αποτελείται συνήθως από δύο μεταλλικές πλάκες αντίθετου φορτίου. Τα ακόλουθα σύμβολα αντιστοιχούν στα μεγέθη που σχετίζονται με το κύκλωμα:

$q$: το φορτίο σε μια διατομή του αγωγού που μετριέται σε coulomb (C),

$I$: το ρεύμα ή ο ρυθμός μεταβολής φορτίου (ροή ηλεκτρονίων) σε μια διατομή του αγωγού που μετριέται σε ampere (A),

$E$: η ηλεκτρική τάση της πηγής που μετριέται σε volt (V),

$V$: η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων του αγωγού που μετριέται σε volt (V).

Ο γερμανός φυσικός Georg Ohm (1789-1854) παρατήρησε ότι όταν στα άκρα ενός αντιστάτη επικρατεί διαφορά δυναμικού, τότε το ρεύμα $I$ που διαρρέει τον αντιστάτη είναι (περίπου) ανάλογο της διαφοράς δυναμικού (της πτώσης τάσης στον αντιστάτη). Ο Ohm ονόμασε τη σταθερά αναλογίας $1/R$ όπου $R$ η **αντίσταση** του αγωγού. Έτσι, ο *νόμος του Ohm* είναι

$$I = \frac{1}{R}V.$$

Παρόμοια, είναι γνωστό από τη φυσική ότι η πτώση τάσης σε ένα πηνίο και σε έναν πυκνωτή είναι αντίστοιχα

$$L\frac{dI}{dt} \quad \text{και} \quad \frac{q}{C},$$

όπου $L$ ο **συντελεστής αυτεπαγωγής** (ή απλά αυτεπαγωγή) του πηνίου και $C$ η **χωρητικότητα** του πυκνωτή ($q$ είναι το φορτίο του πυκνωτή).

Ο γερμανός φυσικός Gustav R. Kirchhoff (1824-1887) διατύπωσε τον νόμο ότι το άθροισμα των πτώσεων τάσης σε ένα κύκλωμα ισούται με την παρεχόμενη τάση $E(t)$. Με σύμβολα, αυτό γράφεται ως εξής:

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = E(t).$$

Εφόσον $I = dq/dt$, ο νόμος του Kirchhoff γίνεται

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{8}$$

Η δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση (8), που περιγράφει ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, έχει ακριβώς την ίδια μορφή με την Εξίσωση (7) που περιγράφει την ταλαντωτική κίνηση. Και τα δύο μοντέλα μπορούν να επιλυθούν με τις μεθόδους που αναπτύξαμε στην Ενότητα 17.2.

### Σύνοψη

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι αναλογίες που χρησιμοποιούμε στη μελέτη της κίνησης ενός συστήματος μάζας-ελατηρίου και της ροής φορτισμένων σωματιδίων σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα.

**Γραμμικά μοντέλα δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές**

| Μηχανικό σύστημα | | Ηλεκτρικό σύστημα | |
|---|---|---|---|
| $my'' + \delta y' + ky = F(t)$ | | $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t)$ | |
| $y$: | μετατόπιση | $q$: | φορτίο |
| $y'$: | ταχύτητα | $q'$: | ρεύμα |
| $y''$: | επιτάχυνση | $q''$: | ρυθμός μεταβολής ρεύματος |
| $m$: | μάζα | $L$: | αυτεπαγωγή |
| $\delta$: | σταθερά απόσβεσης | $R$: | αντίσταση |
| $k$: | σταθερά ελατηρίου | $1/C$: | όπου $C$ η χωρητικότητα |
| $F(t)$: | δύναμη διεγέρτη | $E(t)$: | τάση πηγής |

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 17.3

Για τις ασκήσεις αυτής της ενότητας, όπου είναι απαραίτητο, δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ \text{m}/\text{sec}^2$.

**1.** Σώμα βάρους 16 N εξαρτάται από το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου του οποίου το άνω άκρο είναι στερεωμένο σε οροφή. Η σταθερά του ελατηρίου είναι 1 N/m. Η αντίσταση στο σύστημα ελατηρίου-μάζας είναι αριθμητικά ίση με τη στιγμιαία ταχύτητα (σε μονάδες S.I.). Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εκτρέπουμε το σώμα κατά 2 m από τη θέση ισορροπίας του προς τα κάτω και του προσδίδουμε αρχική ταχύτητα 2 m/sec. Γράψτε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών που να περιγράφει τη δεδομένη κατάσταση.

**2.** Σώμα βάρους 8 N επιμηκύνει ένα ελατήριο κατά 4 m. Το σύστημα μάζας-ελατηρίου βρίσκεται σε μέσο που παρέχει αντίσταση στην κίνηση αριθμητικά ίση με 1,5 φορές τη στιγμιαία ταχύτητα. Εκτρέπουμε το σώμα κατά 2 m από τη θέση ισορροπίας του προς τα πάνω και του προσδίδουμε ταχύτητα 3 m/sec με φορά προς τα κάτω. Γράψτε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών που να περιγράφει τη συγκεκριμένη κατάσταση.

**3.** Σώμα βάρους 20 N εξαρτάται από το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου μήκους 18 cm και το επιμηκύνει κατά 6 cm. Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας κατά 5 cm προς τα κάτω και προσθέτουμε ένα ακόμα σώμα βάρους 5 N. Αν το νέο σώμα τίθεται σε κίνηση με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0$ (σε cm/sec) με φορά προς τα κάτω, γράψτε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών που να περιγράφει την κατακόρυφη απομάκρυνση του σώματος.

**4.** Σώμα βάρους 10 N εξαρτάται από το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου το οποίο επιμηκύνεται κατά 2 m. Θεωρήστε αντίσταση μέτρου $2{,}5\sqrt{2}$ N επί την αριθμητική τιμή της στιγμιαίας ταχύτητας $\upsilon$, όταν αυτή μετριέται σε m/sec. Αν το σώμα εκτρέπεται προς τα κάτω από τη θέση ισορροπίας του κατά 3 cm και αφήνεται ελεύθερο, κατασκευάστε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών που να περιγράφει τη συμπεριφορά του συστήματος ελατηρίου-μάζας.

**5.** Ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελείται από πηνίο, αντιστάτη, πυκνωτή και διακόπτη σε σειρά. Αρχικά ο διακόπτης είναι ανοιχτός και ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με 2 C. Τη στιγμή που κλείνουμε τον διακόπτη, εγκαθίσταται στο κύκλωμα τάση $E(t) = 20\cos t$ και περνάει ρεύμα 3 A. Αριθμητικά, η πτώση τάσης πάνω στον αντιστάτη είναι τετραπλάσια του ρυθμού μεταβολής του φορτίου, πάνω στον πυκνωτή είναι δεκαπλάσια του φορτίου ενώ πάνω στο πηνίο είναι διπλάσια του ρυθμού μεταβολής του ρεύματος (όλα σε μονάδες S.I.). Γράψτε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών που να περιγράφει το κύκλωμα αυτό.

**6.** Πηνίο αυτεπαγωγής 2 H συνδέεται σε σειρά με αντιστάτη 12 Ω, πυκνωτή 1/16 F και πηγή τάσης 300 V. Αρχικά, ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος και το ρεύμα μηδέν. Γράψτε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών που να περιγράφει το κύκλωμα.

**7.** Σώμα βάρους 5 N εξαρτάται από το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς 1 N/m. Η δύναμη αντίστασης είναι αριθμητικά ίση με τη στιγμιαία ταχύτητα (σε μονάδες S.I.). Τη στιγμή $t = 0$ εκτρέπουμε το σώμα κατά 2 cm από τη θέση ισορροπίας του προς τα κάτω και του προσδίδουμε αρχική ταχύτητα 2 cm/sec με φορά προς τα κάτω. Βρείτε αν μετά από $\pi$ sec το σώμα βρίσκεται κάτω ή πάνω από τη θέση ισορροπίας του και κατά πόσο.

**8.** Σώμα βάρους 2,5 N επιμηκύνει ένα ελατήριο κατά 1,25 m. Το σύστημα βρίσκεται σε μέσο όπου η αντίσταση είναι αριθμητικά ίση με 1,5 φορές τη στιγμιαία ταχύτητα $\upsilon$ (σε μονάδες S.I.). Εκτρέπουμε το σώμα κατά 2 cm από τη θέση ισορροπίας προς τα πάνω και του προσδίδουμε αρχική ταχύτητα 3 cm/sec προς τα κάτω. Βρείτε την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας έπειτα από 2 sec.

**9.** Σώμα βάρους 20 N εξαρτάται από το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου μήκους 18 cm το οποίο επιμηκύνεται κατά 6 cm. Εκτρέπουμε το σώμα κατά 5 cm προς τα κάτω και προσθέτουμε ένα ακόμα σώμα βάρους 5 N. Αν προσδώσουμε στο σώμα αρχική ταχύτητα $\upsilon_0$ (σε cm/sec) με φορά προς τα κάτω, βρείτε την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του συναρτήσει του $\upsilon_0$ για κάθε $t \geq 0$.

**10.** Σώμα μάζας 1 kg εξαρτάται από το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς 25/4 N/m. Αρχικά, η μάζα αφήνεται από 1 m πάνω από τη θέση ισορροπίας με προς τα κάτω ταχύτητα 3 m/sec, ενώ η ταλάντωση γίνεται σε μέσο όπου η δύναμη αντίστασης είναι αριθμητικά ίση με το τριπλάσιο της στιγμιαίας ταχύτητας. Ασκείται επίσης και μια εξωτερική δύναμη $f(t)$, αλλά θεωρούμε ότι αρχικά $f(t) \equiv 0$ Διατυπώστε και λύστε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών που να περιγράφει τη συμπεριφορά του συστήματος. Ερμηνεύστε τα αποτελέσματά σας.

**11.** Σώμα βάρους 10 N εξαρτάται από το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου το οποίο επιμηκύνεται κατά (1/6) m. Θεωρήστε αντίσταση μέτρου $5\sqrt{2}$ N επί την αριθμητική τιμή της στιγμιαίας ταχύτητας $\upsilon$, όταν αυτή μετριέται σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο. Αν το σώμα εκτρέπεται κατά 3 cm από τη θέση ισορροπίας του προς τα κάτω και αφήνεται ελεύθερο, βρείτε μετά από πόσο χρόνο περνάει από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά.

**12.** Σώμα επιμηκύνει ένα ελατήριο κατά 2,5 cm. Το σώμα τίθεται σε κίνηση από μια θέση κάτω από τη θέση ισορροπίας του κατά 1 cm έχοντας αρχική ταχύτητα 5 cm/sec με φορά προς τα κάτω.

**α.** Πότε επιστρέφει το σώμα στην αρχική του θέση;

**β.** Πότε φτάνει στο ανώτερο ύψος;

**γ.** Δείξτε ότι η μέγιστη ταχύτητα του σώματος ισούται με $5\sqrt{17}$ cm/sec.

**13.** Σώμα βάρους 10 N επιμηκύνει ένα ελατήριο κατά 25 cm. Εκτρέπουμε το σώμα προς τα κάτω από τη θέση ισορροπίας του κατά 2 cm και του προσδίδουμε αρχική ταχύτητα μέτρου 2 cm/sec. Δεύτερο σώμα εξαρτάται από πανομοιότυπο ελατήριο. Εκτρέπουμε το δεύτερο σώμα προς τα κάτω από τη θέση ισορροπίας του κατά απόσταση ίση με το πλάτος ταλάντωσης του πρώτου σώματος και του προσδίδουμε αρχική ταχύτητα 24 cm/sec. Αν το πλάτος ταλάντωσης του δεύτερου σώματος είναι διπλάσιο εκείνου του πρώτου σώματος, ποιο το βάρος του δεύτερου σώματος;

**14.** Σώμα επιμηκύνει ένα ελατήριο κατά 3 cm ενώ δεύτερο σώμα επιμηκύνει ένα άλλο ελατήριο κατά 9 cm. Αν εκτρέψουμε και τα δύο σώματα ταυτόχρονα προς τα κάτω κατά 1 cm από την αντίστοιχη θέση ισορροπίας και έπειτα τα αφήσουμε ελεύθερα, βρείτε πότε τα σώματα αποκτούν ίσες ταχύτητες για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$.

**15.** Σώμα βάρους 16 N επιμηκύνει ένα ελατήριο κατά 40 cm. Εκτρέπουμε το σώμα κατά 4,8 cm από τη θέση ισορροπίας του προς τα κάτω και το αφήνουμε ελεύθερο. Ποια αρχική ταχύτητα $\upsilon_0$ θα έπρεπε να του προσδώσουμε ώστε το πλάτος της ταλάντωσης να ήταν διπλάσιο;

**16.** Σώμα βάρους 2,5 N επιμηκύνει ένα ελατήριο κατά 3 cm. Το σύστημα μάζας-ελατηρίου βρίσκεται σε μέσο όπου η σταθερά απόσβεσης ισούται με 2 N sec/m. Αν ενώ το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, του προσδώσουμε αρχική ταχύτητα 4 cm/sec με φορά προς τα κάτω, βρείτε σε πόσο χρόνο το σώμα επιστρέφει στη θέση ισορροπίας για πρώτη φορά.

**17.** Σώμα εξαρτάται από το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου και εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις με περίοδο 2 sec. Αν ο παράγοντας απόσβεσης ελαττώνεται κατά 90% σε 10 sec, βρείτε την επιτάχυνση του σώματος όταν αυτό βρίσκεται 3 cm κάτω από τη θέση ισορροπίας του και κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου 2 cm/sec.

**18.** Σώμα βάρους 10 N επιμηκύνει ένα ελατήριο κατά 0, 625 m. Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά 6 cm προς τα κάτω και το αφήνουμε ελεύθερο. Βρείτε το ανώτερο σημείο όπου φτάνει το σώμα. Θεωρήστε ότι το σύστημα ταλαντώνεται σε μέσο όπου η δύναμη αντίστασης είναι $4\sqrt{2}$ N επί την αριθμητική τιμή της στιγμιαίας ταχύτητας $\upsilon$, όταν αυτή μετριέται σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο.

**19.** Κύκλωμα RLC αποτελείται από αυτεπαγωγή 1/5 H, αντιστάτη 1 Ω, και πυκνωτή 5/6 F. Αν το αρχικό φορτίο του πυκνωτή είναι 2 C και το αρχικό ρεύμα είναι 4 A, βρείτε τη συνάρτηση λύσης που περιγράφει το φορτίο του πυκνωτή σε κάθε χρονική στιγμή. Ποιο είναι το φορτίο του πυκνωτή έπειτα από μεγάλο χρονικό διάστημα;

**20.** Κύκλωμα αποτελείται από πηνίο, αντιστάτη, πυκνωτή και διακόπτη συνδεδεμένα σε σειρά. Αρχικά ο διακόπτης είναι ανοιχτός και ο πυκνωτής φορτισμένος με 2 C. Τη στιγμή που κλείνουμε τον διακόπτη, το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα 3 A ενώ η εξωτερική τάση είναι μηδέν. Σε αυτό το κύκλωμα η πτώση τάσης ισούται αριθμητικά ως εξής: πάνω στον πυκνωτή είναι δεκαπλάσια του φορτίου, πάνω στον αντιστάτη είναι τετραπλάσια του ρυθμού μεταβολής του φορτίου ενώ πάνω στον πυκνωτή είναι διπλάσια του ρυθμού μεταβολής του ρεύματος. Βρείτε το φορτίο του πυκνωτή συναρτήσει του χρόνου.

**21.** Σώμα βάρους 5 N επιμηκύνει ένα ελατήριο κατά 1,25 m. Το σύστημα βρίσκεται σε μέσο όπου η σταθερά απόσβεσης ισούται με 4,5 N sec/m, και δέχεται εξωτερική δύναμη της μορφής $f(t) = 4 + e^{-2t}$ (σε N). Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά 2 m προς τα κάτω και του προσδίδουμε αρχική ταχύτητα 4 m/sec με φορά προς τα κάτω. Βρείτε τη συνάρτηση που περιγράφει τη θέση του σώματος σε κάθε χρονική στιγμή.

**22.** Σώμα μάζας 10 kg εξαρτάται από το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 140$ N/m. Το σώμα τίθεται σε κίνηση από τη θέση ισορροπίας έχοντας αρχική ταχύτητα 1 m/sec, με φορά προς τα πάνω, ενώ ασκείται και μια εξωτερική δύναμη που δίνεται από τη σχέση $f(t) = 5 \sin t$ (σε N). Το σώμα κινείται σε μέσο με συντελεστή αντίστασης ίσο με 90 N sec/m. Διατυπώστε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών που να περιγράφει το σύστημα αυτό. Λύστε το πρόβλημα και ερμηνεύστε τα αποτελέσματα.

**23.** Σώμα μάζας 2 kg εξαρτάται από το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου το οποίο είναι στερεωμένο σε οροφή. Στη θέση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά 1,96 m. Το σύστημα βρίσκεται σε μέσο όπου η αντίσταση σε N είναι αριθμητικά ίση με το τετραπλάσιο της στιγμιαίας ταχύτητας όταν αυτή μετριέται σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο. Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά 2 m προς τα κάτω και του προσδίδουμε ταχύτητα 3 m/sec με φορά προς τα κάτω. Ταυτόχρονα ασκούμε στο σύστημα εξωτερική δύναμη που δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = 20\cos t$ (σε N). Μετά από $\pi$ sec, βρείτε αν η μάζα βρίσκεται πάνω ή κάτω από τη θέση ισορροπίας της και κατά πόσο.

**24.** Σώμα βάρους 2,5 N επιμηκύνει ένα ελατήριο κατά 1,25 m. Το σύστημα μάζας-ελατηρίου βρίσκεται σε μέσο όπου η αντίσταση είναι αριθμητικά ίση με 1,5 φορές τη στιγμιαία ταχύτητα $\upsilon$, η οποία μετριέται σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο, ενώ δέχεται εξωτερική δύναμη που δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = 6 + e^{-t}$ (σε N). Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά 2 m προς τα πάνω και του προσδίδουμε αρχική ταχύτητα 3 m/sec με φορά προς τα κάτω. Βρείτε την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του έπειτα από 2 sec.

**25.** Έστω κύκλωμα RLC με $L = 10$ H, $R = 10\ \Omega$, $C = 1/500$ F, $E = 100$ V, $q(0) = 10$ C και $q'(0) = i(0) = 0$. Διατυπώστε και λύστε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών που περιγράφει το δεδομένο κύκλωμα. Ερμηνεύστε τα αποτελέσματά σας.

**26.** Κύκλωμα αποτελείται από πηνίο, αντιστάτη, πυκνωτή και διακόπτη σε σειρά. Αρχικά, ο διακόπτης είναι ανοιχτός και ο πυκνωτής φορτισμένος με 2 C. Τη στιγμή που κλείνουμε τον διακόπτη, το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα 3 A. Εφαρμόζουμε τάση $E(t) = 20\cos t$. Οι πτώσεις τάσης στο κύκλωμα ισούνται αριθμητικά ως εξής: πάνω στον αντιστάτη είναι τετραπλάσια του ρυθμού μεταβολής του ρεύματος, πάνω στον πυκνωτή είναι δεκαπλάσια του φορτίου, και πάνω στο πηνίο διπλάσια του ρυθμού μεταβολής του ρεύματος (όλα σε μονάδες S.I.). Βρείτε το φορτίο του πυκνωτή συναρτήσει του χρόνου. Προσδιορίστε το φορτίο του πυκνωτή και το ρεύμα τη χρονική στιγμή $t = 0$.

# 17.4 Εξισώσεις Euler

Στην Ενότητα 17.1 μελετήσαμε τη δευτεροτάξια γραμμική διαφορική εξίσωση

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

και δείξαμε πώς λύνουμε αυτή την εξίσωση όταν οι συντελεστές $P$, $Q$, και $R$ είναι σταθεροί. Αν οι συντελεστές δεν είναι σταθεροί, εν γένει δεν μπορούμε να λύσουμε τη διαφορική αυτή εξίσωση με βάση τις στοιχειώδεις συναρτήσεις που έχουμε μελετήσει στον απειροστικό λογισμό. Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε πώς λύνουμε την εξίσωση όταν οι συντελεστές έχουν τις ειδικές μορφές

$$P(x) = ax^2, \quad Q(x) = bx, \quad \text{και} \quad R(x) = c,$$

όπου $a$, $b$, και $c$ σταθερές. Οι ειδικοί αυτοί τύποι εξισώσεων ονομάζονται **εξισώσεις Euler**, προς τιμήν του Leonhard Euler ο οποίος τις μελέτησε και υπέδειξε τον τρόπο λύσης τους. Τέτοιες εξισώσεις εμφανίζονται στη μελέτη των μηχανικών ταλαντώσεων.

## Η γενική λύση των εξισώσεων Euler

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση Euler

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \qquad x > 0. \tag{1}$$

Για να λύσουμε την Εξίσωση (1), κάνουμε πρώτα την αλλαγή μεταβλητών

$$z = \ln x \qquad \text{και} \qquad y(x) = Y(z).$$

Έπειτα εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας για να βρούμε τις παραγώγους $y'(x)$ και $y''(x)$:

$$y'(x) = \frac{d}{dx}Y(z) = \frac{d}{dz}Y(z)\frac{dz}{dx} = Y'(z)\frac{1}{x}$$

και

$$y''(x) = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dx}Y'(z)\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}Y'(z) + \frac{1}{x}Y''(z)\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}Y'(z) + \frac{1}{x^2}Y''(z).$$

Αντικαθιστώντας τις δύο αυτές παραγώγους στο αριστερό μέλος της Εξίσωσης (1), βρίσκουμε

$$ax^2y'' + bxy' + cy = ax^2\left(-\frac{1}{x^2}Y'(z) + \frac{1}{x^2}Y''(z)\right) + bx\left(\frac{1}{x}Y'(z)\right) + cY(z)$$
$$= aY''(z) + (b - a)Y'(z) + cY(z).$$

Επομένως, οι αντικαταστάσεις αυτές μας δίνουν τη δευτεροτάξια γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$aY''(z) + (b - a)Y'(z) + cY(z) = 0. \tag{2}$$

Μπορούμε να λύσουμε την Εξίσωση (2) με τη μέθοδο της Ενότητας 17.1. Δηλαδή, βρίσκουμε τις ρίζες της αντίστοιχης βοηθητικής εξίσωσης

$$ar^2 + (b - a)r + c = 0 \tag{3}$$

για να βρούμε τη γενική λύση για την $Y(z)$. Αφού βρούμε την $Y(z)$, μπορούμε να προσδιορίσουμε την $y(x)$ μέσω της αντικατάστασης $z = \ln x$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1** Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

**Λύση** Πρόκειται για εξίσωση Euler με $a = 1$, $b = 2$, και $c = -2$. Η βοηθητική εξίσωση (3) για την $Y(z)$ είναι

$$r^2 + (2 - 1)r - 2 = (r - 1)(r + 2) = 0,$$

με ρίζες $r = -2$ και $r = 1$. Η λύση για την $Y(z)$ δίνεται από την

$$Y(z) = c_1e^{-2z} + c_2e^{z}.$$

Αντικαθιστώντας $z = \ln x$, παίρνουμε τη γενική λύση για την $y(x)$

$$y(x) = c_1e^{-2\ln x} + c_2e^{\ln x} = c_1x^{-2} + c_2x.$$ ■

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2** Λύστε την εξίσωση Euler $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$.

**Λύση** Εφόσον $a = 1$, $b = -5$, και $c = 9$, η βοηθητική εξίσωση (3) για την $Y(z)$ είναι

$$r^2 + (-5 - 1)r + 9 = (r - 3)^2 = 0.$$

Η βοηθητική εξίσωση έχει τη διπλή ρίζα $r = 3$, επομένως

$$Y(z) = c_1e^{3z} + c_2ze^{3z}.$$

Αντικαθιστώντας $z = \ln x$ σε αυτή την έκφραση, παίρνουμε τη γενική λύση

$$y(x) = c_1e^{3\ln x} + c_2 \ln x\, e^{3\ln x} = c_1x^3 + c_2x^3\ln x.$$ ■

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3** Βρείτε την ειδική λύση της εξίσωσης

$$x^2y'' - 3xy' + 68y = 0.$$

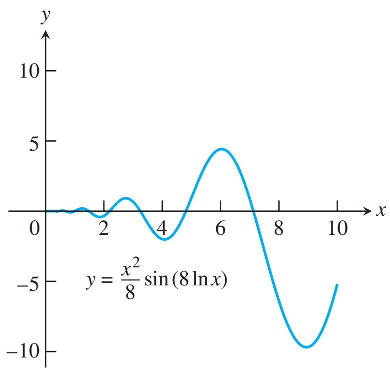
που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(1) = 0$ και $y'(1) = 1$.

**Λύση** Εδώ, η αντικατάσταση των $a = 1$, $b = -3$, και $c = 68$ στη βοηθητική εξίσωση (3) δίνει

$$r^2 - 4r + 68 = 0.$$

Οι ρίζες είναι $r = 2 + 8i$ και $r = 2 - 8i$, οπότε προκύπτει η λύση

$$Y(z) = e^{2z}(c_1\cos 8z + c_2\sin 8z).$$




**Σχημα 17.8** Γραφική παράσταση της λύσης του Παραδείγματος 3.

Η αντικατάσταση του $z = \ln x$ σε αυτή την έκφραση δίνει

$$y(x) = e^{2\ln x}\big(c_1 \cos(8\ln x) + c_2 \sin(8\ln x)\big).$$

Από την αρχική συνθήκη $y(1) = 0$, βλέπουμε ότι $c_1 = 0$ και

$$y(x) = c_2 x^2 \sin(8\ln x).$$

Για τη δεύτερη αρχική συνθήκη, χρειαζόμαστε την παράγωγο

$$y'(x) = c_2\big(8x\cos(8\ln x) + 2x\sin(8\ln x)\big).$$

Εφόσον $y'(1) = 1$, προκύπτει αμέσως $c_2 = 1/8$. Επομένως, η ειδική λύση που ικανοποιεί ταυτόχρονα και τις δύο αρχικές συνθήκες είναι η

$$y(x) = \frac{1}{8}x^2 \sin(8\ln x).$$

Εφόσον $-1 \le \sin(8\ln x) \le 1$, η λύση ικανοποιεί τη διπλή ανίσωση

$$-\frac{x^2}{8} \le y(x) \le \frac{x^2}{8}.$$

Η γραφική παράσταση της λύσης φαίνεται στο Σχήμα 17.8. ■

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 17.4

Στις Ασκήσεις 1-24, βρείτε τη γενική λύση των εξισώσεων Euler που δίνονται. Θεωρήστε παντού $x > 0$.

**1.** $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$
**2.** $x^2y'' + xy' - 4y = 0$
**3.** $x^2y'' - 6y = 0$
**4.** $x^2y'' + xy' - y = 0$
**5.** $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0$
**6.** $2x^2y'' + 7xy' + 2y = 0$
**7.** $3x^2y'' + 4xy' = 0$
**8.** $x^2y'' + 6xy' + 4y = 0$
**9.** $x^2y'' - xy' + y = 0$
**10.** $x^2y'' - xy' + 2y = 0$
**11.** $x^2y'' - xy' + 5y = 0$
**12.** $x^2y'' + 7xy' + 13y = 0$
**13.** $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$
**14.** $x^2y'' - 5xy' + 10y = 0$
**15.** $4x^2y'' + 8xy' + 5y = 0$
**16.** $4x^2y'' - 4xy' + 5y = 0$
**17.** $x^2y'' + 3xy' + y = 0$
**18.** $x^2y'' - 3xy' + 9y = 0$
**19.** $x^2y'' + xy' = 0$
**20.** $4x^2y'' + y = 0$
**21.** $9x^2y'' + 15xy' + y = 0$
**22.** $16x^2y'' - 8xy' + 9y = 0$
**23.** $16x^2y'' + 56xy' + 25y = 0$
**24.** $4x^2y'' - 16xy' + 25y = 0$

Στις Ασκήσεις 25-30, λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών που δίνεται.

**25.** $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = -1$
**26.** $6x^2y'' + 7xy' - 2y = 0, \quad y(1) = 0, y'(1) = 1$
**27.** $x^2y'' - xy' + y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 1$
**28.** $x^2y'' + 7xy' + 9y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0$
**29.** $x^2y'' - xy' + 2y = 0, \quad y(1) = -1, y'(1) = 1$
**30.** $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0$

# 17.5 Λύσεις με δυναμοσειρές

Στην ενότητα αυτή επεκτείνουμε τη μελέτη των δευτεροτάξιων γραμμικών ομογενών εξισώσεων με μεταβλητούς συντελεστές. Στις εξισώσεις Euler της Ενότητας 17.4, η δύναμη της μεταβλητής $x$ στον μη σταθερό συντελεστή έπρεπε να αντιστοιχεί στην τάξη της παραγώγου: το $x^2$ στην $y''$, το $x^1$ στην $y'$ και το $x^0\,(=1)$ στην $y$. Εδώ παραλείπουμε αυτή την απαίτηση ώστε να μπορούμε να αντιμετωπίσουμε πιο γενικές εξισώσεις.

## Μέθοδος λύσης

Η **μέθοδος των δυναμοσειρών** για την επίλυση μιας δευτεροτάξιας ομογενούς διαφορικής εξίσωσης συνίσταται στην εύρεση των συντελεστών μιας δυναμοσειράς

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \tag{1}$$

η οποία αποτελεί λύση της εξίσωσης. Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο, αντικαθιστούμε τη σειρά και τις παραγώγους της στη διαφορική εξίσωση ώστε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $c_0, c_1, c_2, \ldots$ Η τεχνική εύρεσης των συντελεστών είναι παρόμοια με εκείνη που χρησιμοποιούμε στη μέθοδο των απροσδιόριστων συντελεστών που παρουσιάσαμε στην Ενότητα 17.2.

Στο πρώτο μας παράδειγμα επιδεικνύουμε τη μέθοδο σε μια απλή εξίσωση της οποίας η λύση μάς είναι ήδη γνωστή. Αυτό θα σας βοηθήσει να εξοικειωθείτε με λύσεις εκφρασμένες σε μορφή σειράς.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1** Λύστε την εξίσωση $y'' + y = 0$ με τη μέθοδο των δυναμοσειρών.

**Λύση** Υποθέτουμε ότι η λύση παίρνει τη μορφή

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

και υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \qquad \text{και} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στη δευτεροτάξια εξίσωση, παίρνουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Στη συνέχεια, εξισώνουμε τους συντελεστές κάθε δύναμης του $x$ με το μηδέν όπως φαίνεται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα.

| **Δύναμη του $x$** | **Εξίσωση συντελεστή** | | |
|---|---|---|---|
| $x^0$ | $2(1)c_2 + c_0 = 0$ | ή | $c_2 = -\frac{1}{2} c_0$ |
| $x^1$ | $3(2)c_3 + c_1 = 0$ | ή | $c_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2} c_1$ |
| $x^2$ | $4(3)c_4 + c_2 = 0$ | ή | $c_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3} c_2$ |
| $x^3$ | $5(4)c_5 + c_3 = 0$ | ή | $c_5 = -\frac{1}{5 \cdot 4} c_3$ |
| $x^4$ | $6(5)c_6 + c_4 = 0$ | ή | $c_6 = -\frac{1}{6 \cdot 5} c_4$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | ή | $\vdots$ |
| $x^{n-2}$ | $n(n-1)c_n + c_{n-2} = 0$ | ή | $c_n = -\frac{1}{n \cdot (n-1)} c_{n-2}$ |

Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι οι συντελεστές με άρτιους δείκτες ($n = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$) σχετίζονται μεταξύ τους, όπως και οι συντελεστές με περιττούς δείκτες ($n = 2k + 1$). Χειριζόμαστε την κάθε ομάδα ξεχωριστά.

*Άρτιοι δείκτες*: Εδώ $n = 2k$, οπότε η δύναμη είναι η $x^{2k-2}$. Από την τελευταία γραμμή του πίνακα, έχουμε ότι

$$2k(2k-1)c_{2k} + c_{2k-2} = 0$$

ή

$$c_{2k} = -\frac{1}{2k(2k-1)}c_{2k-2}.$$

Από αυτή την αναδρομική σχέση βρίσκουμε

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \left[-\frac{1}{2k(2k-1)}\right]\left[-\frac{1}{(2k-2)(2k-3)}\right]\cdots\left[-\frac{1}{4(3)}\right]\left[-\frac{1}{2}\right]c_0 \\ &= \frac{(-1)^k}{(2k)!}c_0. \end{aligned}$$

*Περιττοί δείκτες*: Εδώ $n = 2k+1$, οπότε η δύναμη είναι η $x^{2k-1}$. Αντικαθιστώντας στην τελευταία γραμμή του πίνακα, προκύπτει

$$(2k+1)(2k)c_{2k+1} + c_{2k-1} = 0$$

ή

$$c_{2k+1} = -\frac{1}{(2k+1)(2k)}c_{2k-1}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= \left[-\frac{1}{(2k+1)(2k)}\right]\left[-\frac{1}{(2k-1)(2k-2)}\right]\cdots\left[-\frac{1}{5(4)}\right]\left[-\frac{1}{3(2)}\right]c_1 \\ &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}c_1. \end{aligned}$$

Αν γράψουμε τη δυναμοσειρά ομαδοποιώντας τις άρτιες και τις περιττές δυνάμεις και αντικαταστήσουμε τους συντελεστές, παίρνουμε

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}x^{2k+1} \\ &= c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}. \end{aligned}$$

Από τον Πίνακα 9.1 της Ενότητας 9.10, βρίσκουμε ότι η πρώτη σειρά στο δεξιό μέλος της τελευταίας εξίσωσης αναπαριστά τη συνάρτηση του συνημιτόνου και η δεύτερη τη συνάρτηση του ημιτόνου. Έτσι, η γενική λύση της εξίσωσης $y'' + y = 0$ είναι

$$y = c_0 \cos x + c_1 \sin x.$$

■

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2** Βρείτε τη γενική λύση της $y'' + xy' + y = 0$

**Λύση** Θεωρούμε ως λύση τη σειρά

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

και υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \qquad \text{και} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}.$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις μορφές στη δευτεροτάξια εξίσωση, παίρνουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές κάθε δύναμης του $x$ με το μηδέν όπως φαίνεται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα.

| **Δύναμη του $x$** | **Εξίσωση συντελεστή** | | |
|---|---|---|---|
| $x^0$ | $2(1)c_2 \qquad + c_0 = 0$ | ή | $c_2 = -\frac{1}{2}c_0$ |
| $x^1$ | $3(2)c_3 + \ c_1 + c_1 = 0$ | ή | $c_3 = -\frac{1}{3}c_1$ |
| $x^2$ | $4(3)c_4 + 2c_2 + c_2 = 0$ | ή | $c_4 = -\frac{1}{4}c_2$ |
| $x^3$ | $5(4)c_5 + 3c_3 + c_3 = 0$ | ή | $c_5 = -\frac{1}{5}c_3$ |
| $x^4$ | $6(5)c_6 + 4c_4 + c_4 = 0$ | ή | $c_6 = -\frac{1}{6}c_4$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | ή | $\vdots$ |
| $x^n$ | $(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+1)c_n = 0$ | ή | $c_{n+2} = -\frac{1}{n+2}c_n$ |

Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι τόσο οι συντελεστές με άρτιους δείκτες όσο και εκείνοι με περιττούς σχετίζονται μεταξύ τους.

*Άρτιοι δείκτες*: Εδώ $n = 2k - 2$, οπότε η δύναμη είναι η $x^{2k-2}$. Από την τελευταία γραμμή του πίνακα έχουμε

$$c_{2k} = -\frac{1}{2k}c_{2k-2}.$$

Από αυτή την αναδρομική σχέση παίρνουμε

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \left(-\frac{1}{2k}\right)\left(-\frac{1}{2k-2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)c_0 \\ &= \frac{(-1)^k}{(2)(4)(6)\cdots(2k)}c_0. \end{aligned}$$

*Περιττοί δείκτες*: Εδώ $n = 2k - 1$, οπότε η δύναμη είναι η $x^{2k-1}$. Από την τελευταία γραμμή του πίνακα έχουμε

$$c_{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}c_{2k-1}.$$

Από αυτή την αναδρομική σχέση προκύπτει

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= \left(-\frac{1}{2k+1}\right)\left(-\frac{1}{2k-1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)c_1 \\ &= \frac{(-1)^k}{(3)(5)\cdots(2k+1)}c_1. \end{aligned}$$

Γράφουμε τη δυναμοσειρά ομαδοποιώντας τις άρτιες και τις περιττές δυνάμεις και αντικαθιστούμε τους συντελεστές, οπότε προκύπτει

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}x^{2k+1} \\ &= c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2)(4)\cdots(2k)}x^{2k} + c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(3)(5)\cdots(2k+1)}x^{2k+1}. \end{aligned}$$

■

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3** Βρείτε τη γενική λύση της

$$(1 - x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0, \qquad |x| < 1.$$

**Λύση** Προσέχουμε ότι ο συντελεστής της δεύτερης παραγώγου μηδενίζεται για $x = \pm 1$. Έτσι, θεωρούμε το διάστημα λύσης $I\colon -1 < x < 1$. Αντικαθιστώντας τη δυναμοσειρά

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

και τις παραγώγους της, παίρνουμε

$$(1 - x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 6\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 6\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Στη συνέχεια, εξισώνουμε τους συντελεστές κάθε δύναμης του $x$ με το μηδέν όπως φαίνεται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα

| **Δύναμη του $x$** | **Εξίσωση συντελεστή** | | |
|---|---|---|---|
| $x^0$ | $2(1)c_2 - 4c_0 = 0$ | ή | $c_2 = \frac{4}{2}c_0$ |
| $x^1$ | $3(2)c_3 - 6(1)c_1 - 4c_1 = 0$ | ή | $c_3 = \frac{5}{3}c_1$ |
| $x^2$ | $4(3)c_4 - 2(1)c_2 - 6(2)c_2 - 4c_2 = 0$ | ή | $c_4 = \frac{6}{4}c_2$ |
| $x^3$ | $5(4)c_5 - 3(2)c_3 - 6(3)c_3 - 4c_3 = 0$ | ή | $c_5 = \frac{7}{5}c_3$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | ή | $\vdots$ |
| $x^n$ | $(n+2)(n+1)c_{n+2} - [n(n-1) + 6n + 4]c_n = 0$ | | |
| | $(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n+4)(n+1)c_n = 0$ | ή | $c_{n+2} = \frac{n+4}{n+2}c_n$ |

Και πάλι παρατηρούμε τη συσχέτιση των συντελεστών με άρτιους δείκτες και εκείνων με περιττούς δείκτες.

*Άρτιοι δείκτες*: Εδώ $n = 2k - 2$, οπότε η δύναμη είναι η $x^{2k}$. Από τη δεξιά στήλη και την τελευταία γραμμή του πίνακα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \frac{2k+2}{2k}c_{2k-2} \\ &= \left(\frac{2k+2}{2k}\right)\left(\frac{2k}{2k-2}\right)\left(\frac{2k-2}{2k-4}\right)\cdots\frac{6}{4}\left(\frac{4}{2}\right)c_0 \\ &= (k+1)c_0. \end{aligned}$$

*Περιττοί δείκτες*: Εδώ $n = 2k - 1$, οπότε η δύναμη είναι η $x^{2k+1}$. Η δεξιά στήλη και η τελευταία γραμμή του πίνακα μας δίνουν

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= \frac{2k+3}{2k+1}c_{2k-1} \\ &= \left(\frac{2k+3}{2k+1}\right)\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right)\left(\frac{2k-1}{2k-3}\right)\cdots\frac{7}{5}\left(\frac{5}{3}\right)c_1 \\ &= \frac{2k+3}{3}c_1. \end{aligned}$$

Η γενική λύση είναι η

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1} \\ &= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+3}{3} x^{2k+1}. \end{aligned}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4** Βρείτε τη γενική λύση της $y'' - 2xy' + y = 0$.

**Λύση** Θεωρώντας ότι

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

και αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση, παίρνουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τους συντελεστές, με βάση τον παρακάτω πίνακα.

| **Δύναμη του $x$** | **Εξίσωση συντελεστή** | | |
|---|---|---|---|
| $x^0$ | $2(1)c_2 + c_0 = 0$ | ή | $c_2 = -\frac{1}{2}c_0$ |
| $x^1$ | $3(2)c_3 - 2c_1 + c_1 = 0$ | ή | $c_3 = \frac{3}{3 \cdot 2}c_1$ |
| $x^2$ | $4(3)c_4 - 4c_2 + c_2 = 0$ | ή | $c_4 = \frac{4}{4 \cdot 3}c_2$ |
| $x^3$ | $5(4)c_5 - 6c_3 + c_3 = 0$ | ή | $c_5 = \frac{5}{5 \cdot 4}c_3$ |
| $x^4$ | $6(5)c_6 - 8c_4 + c_4 = 0$ | ή | $c_6 = \frac{7}{6 \cdot 5}c_4$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | ή | $\vdots$ |
| $x^n$ | $(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n = 0$ | ή | $c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)}c_n$ |

Από την αναδρομική σχέση

$$c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)} c_n,$$

γράφουμε τους πρώτους όρους κάθε σειράς στη γενική λύση

$$\begin{aligned} y &= c_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{21}{6!}x^6 - \cdots\right) \\ &\quad + c_1\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{5}{5!}x^5 + \frac{45}{7!}x^7 + \cdots\right). \end{aligned}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 17.5

Στις Ασκήσεις 1-18, χρησιμοποιήστε δυναμοσειρές για να βρείτε τη λύση της εκάστοτε διαφορικής εξίσωσης.

1. $y'' + 2y' = 0$
2. $y'' + 2y' + y = 0$
3. $y'' + 4y = 0$
4. $y'' - 3y' + 2y = 0$
5. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$
6. $y'' - xy' + y = 0$
7. $(1 + x)y'' - y = 0$
8. $(1 + x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$
9. $(x^2 - 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$
10. $y'' + y' - x^2y = 0$
11. $(x^2 - 1)y'' - 6y = 0$
12. $xy'' - (x + 2)y' + 2y = 0$
13. $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$
14. $y'' - 2xy' + 4y = 0$
15. $y'' - 2xy' + 3y = 0$
16. $(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0$
17. $y'' - xy' + 3y = 0$
18. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΕΡΙΤΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### ΕΝΟΤΗΤΑ 17.1

**1.** $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{4x}$ **3.** $y = c_1e^{-4x} + c_2e^{x}$

**5.** $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x}$ **7.** $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x/2}$

**9.** $y = c_1e^{-x/4} + c_2e^{3x/2}$ **11.** $y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x$

**13.** $y = c_1\cos 5x + c_2\sin 5x$

**15.** $y = e^{x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$

**17.** $y = e^{-x}(c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\sin\sqrt{3}x)$

**19.** $y = e^{-2x}(c_1\cos\sqrt{5}x + c_2\sin\sqrt{5}x)$

**21.** $y = c_1 + c_2x$ **23.** $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$

**25.** $y = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}$ **27.** $y = c_1e^{-x/2} + c_2xe^{-x/2}$

**29.** $y = c_1e^{-x/3} + c_2xe^{-x/3}$

**31.** $y = -\frac{3}{4}e^{-5x} + \frac{3}{4}e^{-x}$ **33.** $y = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin 2\sqrt{3}x$

**35.** $y = -\cos 2\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\sqrt{2}x$

**37.** $y = (1 - 2x)e^{2x}$ **39.** $y = 2(1 + 2x)e^{-3x/2}$

**41.** $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$ **43.** $y = c_1e^{-x/2} + c_2xe^{-x/2}$

**45.** $y = c_1\cos\sqrt{5}x + c_2\sin\sqrt{5}x$

**47.** $y = c_1e^{-x/5} + c_2xe^{-x/5}$

**49.** $y = e^{-x/2}(c_1\cos x + c_2\sin x)$

**51.** $y = c_1e^{3x/4} + c_2xe^{3x/4}$ **53.** $y = c_1e^{-4x/3} + c_2xe^{-4x/3}$

**55.** $y = c_1e^{-x/2} + c_2e^{4x/3}$ **57.** $y = (1 + 2x)e^{-x}$

**59.** $y = \frac{15}{13}e^{-7x/3} + \frac{11}{13}e^{2x}$

### ΕΝΟΤΗΤΑ 17.2

**1.** $y = c_1e^{5x} + c_2e^{-2x} + \frac{3}{10}$

**3.** $y = c_1 + c_2e^{x} + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$

**5.** $y = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{8}\cos 3x$

**7.** $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} - 6\cos x - 2\sin x$

**9.** $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} - x^2 - 2 + \frac{1}{2}xe^{x}$

**11.** $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{49}{50}\cos x + \frac{7}{50}\sin x$

**13.** $y = c_1 + c_2e^{-5x} + x^3 + \frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{25}x$

**15.** $y = c_1 + c_2e^{3x} + x^3 + \frac{3}{5}x - \frac{6}{25}x$

**17.** $y = c_1 + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x$

**19.** $y = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$

**21.** $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

**23.** $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{x}$

**25.** $y = e^{-2x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + 2$

**27.** $y = A\cos x + B\sin x + x\sin x + \cos x\ln(\cos x)$

**29.** $y = c_1 + c_2e^{5x} + \frac{1}{10}x^2e^{5x} - \frac{1}{25}xe^{5x}$

**31.** $y = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x + x\sin x$

**33.** $y = c_1 + c_2e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x} + xe^{x}$

**35.** $y = c_1e^{5x} + c_2e^{-x} - \frac{1}{8}e^{x} - \frac{4}{5}$

**37.** $y = c_1\cos x + c_2\sin x - (\sin x)[\ln(\csc x + \cot x)]$

**39.** $y = c_1 + c_2e^{8x} + \frac{1}{8}xe^{8x}$

**41.** $y = c_1 + c_2e^{x} - x^4/4 - x^3 - 3x^2 - 6x$

**43.** $y = c_1 + c_2e^{-2x} - \frac{1}{3}e^{x} + x^3/6 - x^2/4 + x/4$

**45.** $y = c_1\cos x + c_2\sin x + (x - \tan x)\cos x - \sin x\ln(\cos x)$
$= c_1\cos x + c_2{}'\sin x + x\cos x - \sin x\ln(\cos x)$

**47.** $y = ce^{3x} - \frac{1}{2}e^{x}$

**49.** $y = ce^{3x} + 5xe^{3x}$

**51.** $y = 2\cos x + \sin x - 1 + \sin x \ln(\sec x + \tan x)$

**53.** $y = -e^{-x} + 1 + \frac{1}{2}x^2 - x$

**55.** $y = 2(e^x - e^{-x})\cos x - 3e^{-x}\sin x$

**57.** $y = (1 - x + x^2)e^x$

**59.** $y_p = \frac{1}{4}x^2$

## ΕΝΟΤΗΤΑ 17.3

**1.** $my'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$

**3.** $2{,}5y'' + \frac{1000}{3}y = 0, \quad y(0) = 0{,}035, \quad y'(0) = \frac{v_0}{100}$

**5.** $2q'' + 4q' + 10q = 20\cos t, \quad q(0) = 2, \quad q'(0) = 3$

**7.** 0,0864 m πάνω από τη θέση ισορροπίας

**9.** $y(t) = 0{,}035\cos(11{,}547t) + \frac{v_0}{1154{,}7}\sin(11{,}547t)$

**11.** 0,565 sec

**13.** 8,54 N

**15.** 0,4157 m/sec

**17.** $-0{,}288$ m/sec$^2$ (επιτάχυνση προς τα πάνω)

**19.** $q(t) = -8e^{-3t} + 10e^{-2t}, \quad \lim_{t\to\infty} q(t) = 0$

**21.** $y(t) = 1 + 2e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-8t}$

**23.** $y(\pi) = -2$ m (πάνω από τη θέση ισορροπίας)

**25.** $q(t) = \frac{1}{5} + \left(\frac{49\sqrt{199}}{995}\sin\frac{\sqrt{199}}{2}t + \frac{49}{5}\cos\frac{\sqrt{199}}{2}t\right)e^{-t/2}$

## ΕΝΟΤΗΤΑ 17.4

**1.** $y = \frac{c_1}{x^2} + c_2 x$

**3.** $y = \frac{c_1}{x^2} + c_2 x^3$

**5.** $y = c_1 x^2 + c_2 x^4$

**7.** $y = c_1 x^{-1/3} + c_2$

**9.** $y = x(c_1 + c_2 \ln x)$

**11.** $y = x[c_1\cos(2\ln x) + c_2\sin(2\ln x)]$

**13.** $y = \frac{1}{x}[c_1\cos(3\ln x) + c_2\sin(3\ln x)]$

**15.** $y = \frac{1}{\sqrt{x}}[c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x)]$

**17.** $y = \frac{1}{x}(c_1 + c_2\ln x)$

**19.** $y = c_1 + c_2\ln x$

**21.** $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}(c_1 + c_2\ln x)$

**23.** $y = x^{-5/4}(c_1 + c_2\ln x)$

**25.** $y = \frac{1}{2x^3} + \frac{x}{2}$

**27.** $y = x$

**29.** $y = x[-\cos(\ln x) + 2\sin(\ln x)]$

## ΕΝΟΤΗΤΑ 17.5

**1.** $y = c_0 + c_1\left(x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \cdots\right) = c_0 - \frac{c_1}{2}e^{-2x}$

**3.** $y = c_0(1 - 2x^2 + \cdots) + c_1\left(x - \frac{2}{3}x^3 + \cdots\right)$

$= c_0\cos 2x + c_1\sin 2x$

**5.** $y = c_1 x + c_2 x^2$

**7.** $y = c_0\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \cdots\right) + c_1\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \cdots\right)$

**9.** $y = c_0\left(1 - x^2 + \frac{5}{12}x^4 - \cdots\right) + c_1 x$

**11.** $y = c_0(1 - 3x^2 + \cdots) + c_1(x - x^3)$

**13.** $y = c_0\left(1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots\right)$

$+ c_1\left(x + x^3 + \frac{3}{5}x^5 + \cdots\right)$

**15.** $y = c_0\left(1 - \frac{3}{2}x^2 + \cdots\right) + c_1\left(x - \frac{1}{2}x^3 + \cdots\right)$

**17.** $y = c_0\left(1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \cdots\right) + c_1\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)$