# Συμπληρωμα θεωριας Κεφαλαιου 7

## Η αλγεβρική μέθοδος λύσης του αρμονικού ταλαντωτή

Στο φυσικό σύστημα μονάδων του αρμονικού ταλαντωτή ($\hbar = m = \omega = 1$) η χαμιλτονιανή του έχει τη μορφή

$$H = \frac{1}{2}\, p^2 + \frac{1}{2}\, x^2 \equiv \frac{1}{2}\, (x^2 + p^2), \tag{1}$$

η οποία –αν τα $x$ και $p$ ήταν κλασικές (μετατιθέμενες) μεταβλητές– θα μας υπέβαλε την ιδέα να εισαγάγουμε τις νέες μεταβλητές

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\, (x + ip), \qquad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\, (x - ip), \tag{2}$$

βάσει των οποίων η (1) θα έπαιρνε τη –σαφώς απλούστερη– *μορφή γινομένου*

$$H = a^* a \equiv a a^*. \tag{3}$$

Δεν είναι λοιπόν καθόλου «τρελλό» να σκεφτούμε μήπως η εισαγωγή των δύο νέων τελεστών (που, προφανώς, ο ένας είναι συζυγής του άλλου)

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\, (x + ip), \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\, (x - ip), \tag{4}$$

έχει κάποια χρησιμότητα και στο αντίστοιχο κβαντομηχανικό πρόβλημα. Και πράγματι έχει, όπως θα δείτε ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα.

α) Με αφετηρία τη βασική μεταθετική σχέση $[x, p] = i$ δείξτε ότι οι τελεστές $a$ και $a^\dagger$ ικανοποιούν την

$$[a, a^\dagger] = 1. \tag{5}$$

β) Δείξτε ότι η χαμιλτονιανή (1) γράφεται, συναρτήσει των τελεστών $a$ και $a^\dagger$, ως

$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2}, \tag{6}$$

που διαφέρει από την κλασική έκφραση (3) ως προς τον σταθερό προσθετέο $1/2$. Πού οφείλεται αυτή η διαφορά;

γ) Αποδείξτε ότι οι τελεστές $a$ και $a^\dagger$ ικανοποιούν –με τη χαμιλτονιανή (6)– τις ακόλουθες μεταθετικές σχέσεις:

$$[H, a] = -a, \qquad [H, a^\dagger] = a^\dagger. \tag{7}$$

δ) Βάσει των (7), δείξτε ότι οι τελεστές $a$ και $a^\dagger$ έχουν την ακόλουθη βασική ιδιότητα: Όταν δρουν πάνω σε μια ιδιοσυνάρτηση, $\psi_E$, της χαμιλτονιανής $H$ με ιδιοτιμή $E$, ο μεν $a^\dagger$ ανεβάζει την ιδιοτιμή κατά μονάδα, ο δε $a$ την κατεβάζει επίσης κατά μονάδα. Θα πρέπει δηλαδή να δείξετε ότι οι κυματοσυναρτήσεις $a^\dagger\psi_E$ και $a\psi_E$ είναι ιδιοσυναρτήσεις του $H$ με ιδιοτιμές $E+1$ και $E-1$ αντίστοιχα.
*Υπόδειξη*: Αφήστε τα δύο μέλη των (7) να δράσουν πάνω στην ιδιοσυνάρτηση $\psi_E$ για την οποία ισχύει, εξ υποθέσεως, ότι $H\psi_E = E\psi_E$.

ε) Όμως, αφού για τυχούσα ιδιοτιμή $E$ οι $E \pm 1$ είναι επίσης ιδιοτιμές, αυτό συνεπάγεται ότι η χαμιλτονιανή $H$ έχει *ισαπέχουσες ιδιοτιμές* με σταθερή μεταξύ τους απόσταση ίση με *ένα*. Αν λοιπόν $E_0$ είναι η χαμηλότερη από αυτές, τότε όλες οι άλλες θα προκύπτουν από αυτήν, ανεβαίνοντας προς τα πάνω με βήμα *μονάδα*. Το σύνολο των ιδιοτιμών θα δίνεται, επομένως, από τη σχέση

$$E_n = E_0 + n, \tag{8}$$

όπου $E_0$ η ιδιοτιμή της θεμελιώδους στάθμης. Δείξτε $-$χρησιμοποιώντας την (6) και το γεγονός ότι η ιδιοσυνάρτηση $\psi_0$ της θεμελιώδους στάθμης είναι η *χαμηλότερη δυνατή*$-$ ότι $E_0 = 1/2$, οπότε η (8) θα δίνει πράγματι τις γνωστές μας ιδιοτιμές του αρμονικού ταλαντωτή.

στ) Επικαλεστείτε την ιδιότητα της $\psi_0$ που αναφέραμε πριν, για να γράψετε μια πρωτοτάξια διαφορική εξίσωση βάσει της οποίας η $\psi_0$ μπορεί να υπολογιστεί αμέσως. Με γνωστή την $\psi_0$, τι θα κάνατε για να υπολογίσετε και τις ανώτερες ιδιοσυναρτήσεις; Κάντε το τουλάχιστον για τις δύο πρώτες από αυτές.

ζ) Αν $\psi_n$ είναι οι *κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις* του αρμονικού ταλαντωτή, δείξτε ότι η δράση των $a$ και $a^\dagger$ πάνω σε αυτές δίνει

$$a\psi_n = \sqrt{n}\,\psi_{n-1}, \qquad a^\dagger\psi_n = \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}. \tag{9}$$

η) Χρησιμοποιήστε τις (9) για να υπολογίσετε με έναν καθαρά *αλγεβρικό τρόπο* $-$δηλαδή χωρίς χρήση της εκπεφρασμένης μορφής των ιδιοσυναρτήσεων$-$ τις μέσες τιμές

$$\langle x^2\rangle \equiv (\psi_n, x^2\psi_n), \qquad \langle p^2\rangle \equiv (\psi_n, p^2\psi_n), \qquad \langle x^4\rangle \equiv (\psi_n, x^4\psi_n).$$

Τα αποτελέσματα που πρέπει να βρείτε είναι:

$$\langle x^2\rangle = \langle p^2\rangle = n + \frac{1}{2}, \qquad \langle x^4\rangle = \frac{3}{4}\,(2n^2 + 2n + 1). \tag{10}$$

Για λόγους που πρέπει να σας είναι ήδη φανεροί, οι τελεστές $a^\dagger$ και $a$ είναι γνωστοί ως *τελεστές δημιουργίας* και *καταστροφής* (creation and destruction (ή annihilation) operators) ή επίσης ως *τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης* (raising and lowering operators).

## *Λύση*

α) Με βάση τις σχέσεις ορισμού

$$a = \frac{x+ip}{\sqrt{2}}, \qquad a^\dagger = \frac{x-ip}{\sqrt{2}} \tag{11}$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned}[a,a^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,[x+ip,x-ip] = \frac{1}{2}\,[x+ip,x-ip] \\ &= \frac{i}{2}\,[p,x] - \frac{i}{2}\,[x,p] = \frac{i}{2}\,(-i) - \frac{i}{2}\,(i) = 1 \qquad\qquad \text{ό.έ.δ.}\end{aligned}$$

όπου, βέβαια, χρησιμοποιήσαμε γενικές ιδιότητες του μεταθέτη, όπως τις

$$[A,B] = -[B,A], \qquad [A,B+C] = [A,B] + [A,C],$$

καθώς και τη θεμελιώδη μεταθετική σχέση

$$[x,p] = -[p,x] = i\hbar$$

με $\hbar = 1$.

β) Λύνοντας τις (11) ως προς $x$ και $p$ παίρνουμε

$$x = \frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}, \qquad p = \frac{a-a^\dagger}{i\sqrt{2}},$$

οπότε η χαμιλτονιανή $H = (x^2+p^2)/2$ θα γράφεται ως

$$H = \frac{1}{4}\,(a+a^\dagger)^2 - \frac{1}{4}\,(a-a^\dagger)^2, \tag{12}$$

όπου, για την εκτέλεση των περαιτέρω πράξεων στη (12) θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν ότι οι τελεστές $a$ και $a^\dagger$ *δεν μετατίθενται* και επομένως θα πρέπει να τηρείται η σειρά με την οποία πολλαπλασιάζονται σε γινόμενα όπως τα $aa^\dagger$ ή $a^\dagger a$. Η σειρά έχει σημασία. Θα είναι έτσι:

$$(a+a^\dagger)^2 \equiv (a+a^\dagger)(a+a^\dagger) = a^2 + aa^\dagger + a^\dagger a + (a^\dagger)^2$$

και παρόμοια

$$(a-a^\dagger)^2 = a^2 - aa^\dagger - a^\dagger a + (a^\dagger)^2$$

οπότε η (12) θα γράφεται ως

$$H = \frac{1}{2}\,(a^\dagger a + aa^\dagger) \tag{13}$$

ή, ισοδύναμα, ως

$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2}, \tag{14}$$

όπου από την (13) στην (14) λάβαμε υπ' όψιν τη μεταθετική σχέση $[a, a^\dagger] \equiv aa^\dagger - a^\dagger a = 1$ για να εκφράσουμε το γινόμενο $aa^\dagger$ ως $a^\dagger a + 1$ και να το αντικαταστήσουμε στην (13). (Τέλος της απόδειξης.)

Ο πρόσθετος όρος $1/2$ στην (14) $-$που δεν υπάρχει στην κλασική έκφραση της ενέργειας $a^* a-$ οφείλεται, βέβαια, στη *μη μεταθετικότητα* των τελεστών $a^\dagger$ και $a$, στην οποία εντοπίζεται και η βασική διαφορά μεταξύ κλασικής και κβαντικής μηχανικής.

γ) Θα είναι

$$[H, a] \equiv \left[a^\dagger a + \frac{1}{2},\, a\right] = [a^\dagger a, a] = [\underbrace{a^\dagger, a}_{-1}]a + a^\dagger[\underbrace{a, a}_{0}] = -a \qquad \text{ό.έ.δ.}$$

όπου εδώ χρησιμοποιήσαμε τη γενική ιδιότητα του μεταθέτη

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

που ισχύει, βέβαια, και όταν το γινόμενο είναι στον πρώτο τελεστή, δηλαδή

$$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$$

και ο πρακτικός κανόνας είναι κοινός και στις δύο περιπτώσεις, όπως είδαμε στο σχετικό Συμπλήρωμα θεωρίας του 3ου Κεφαλαίου.(*) Εντελώς ανάλογα για τον μεταθέτη $[H, a^\dagger]$ θα έχουμε

$$[H, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = [\underbrace{a^\dagger, a^\dagger}_{0}]a + a^\dagger[\underbrace{a, a^\dagger}_{1}] = a^\dagger$$

που είναι ξανά η σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε.

δ) Αν αφήσουμε τώρα τα δύο μέλη των μεταθετικών σχέσεων

$$[H, a] = -a, \qquad [H, a^\dagger] = a^\dagger$$

να δράσουν πάνω σε μια ιδιοσυνάρτηση $\psi_E$ της χαμιλτονιανής $H$ με ιδιοτιμή $E$ $-$δηλαδή $H\psi_E = E\psi_E-$ θα έχουμε:

- Για την πρώτη μεταθετική σχέση

(*) Ο κανόνας είναι πολύ απλός και εκφράζεται συμβολικά ως εξής:

$$[A, BC] = [\overline{A, B}C] + [\overline{A, BC}] \equiv [A, B]C + B[A, C],$$

που μας λέει ότι ο μεταθέτης ενός τελεστή με ένα γινόμενο τελεστών προκύπτει παίρνοντας τον μεταθέτη του τελεστή με κάθε όρο του γινομένου χωριστά και τοποθετώντας τους υπόλοιπους τελεστές του γινομένου, δεξιά ή αριστερά του απλού μεταθέτη, ανάλογα με τη σχετική τους θέση ως προς τον όρο που επιλέχτηκε. Δηλαδή, γενικά

$$[A, A_1 \cdots A_{i-1}\, A_i A_{i+1} \cdots A_N] = \sum_{i=1}^{n} A_1 \cdots A_{i-1}[A, A_i]A_{i+1} \cdots A_N$$

και ακριβώς το ίδιο όταν το γινόμενο είναι στον πρώτο όρο του μεταθέτη.

$$
\begin{aligned}
& [H,a]\psi_E = -a\psi_E \quad \Rightarrow \quad (Ha - aH)\psi_E = -a\psi_E \\
\Rightarrow \quad & H(a\psi_E) - a(H\psi_E) = -a\psi_E \\
\Rightarrow \quad & H(a\psi_E) - a(E\psi_E) = -a\psi_E \\
\Rightarrow \quad & H(a\psi_E) = E(a\psi_E) - (a\psi_E) \equiv (E-1)(a\psi_E)
\end{aligned}
$$

και το συμπέρασμα είναι προφανές: Η κυματοσυνάρτηση $a\psi_E$ —που προκύπτει από τη δράση του τελεστή $a$ πάνω στην ιδιοσυνάρτηση $\psi_E$— είναι πάλι ιδιοσυνάρτηση με ιδιοτιμή $E-1$.

- Για τη δεύτερη μεταθετική σχέση

$$
\begin{aligned}
& [H,a^\dagger]\psi_E = a^\dagger\psi_E \quad \Rightarrow \quad (Ha^\dagger - a^\dagger H)\psi_E = a^\dagger\psi_E \\
\Rightarrow \quad & H(a^\dagger\psi_E) - a^\dagger(\underbrace{H\psi_E}_{E\psi_E}) = a^\dagger\psi_E \\
\Rightarrow \quad & H(a^\dagger\psi_E) = E(a^\dagger\psi_E) + (a^\dagger\psi_E) \equiv (E+1)(a^\dagger\psi_E)
\end{aligned}
$$

και το συμπέρασμα είναι παρόμοιο με το προηγούμενο. Η δράση του τελεστή $a^\dagger$ πάνω στις ενεργειακές ιδιοσυναρτήσεις αυξάνει την ιδιοτιμή τους κατά μονάδα. Είναι φανερό, δηλαδή, ότι οι τελεστές $a^\dagger$ και $a$ δρουν ως τελεστές *αναβίβασης* και *καταβίβασης* ως προς το ενεργειακό φάσμα. Ο πρώτος μας πάει μια θέση πιο ψηλά στην ενεργειακή σκάλα και ο δεύτερος μια θέση πιο χαμηλά. Και δεδομένου ακόμα ότι στις συνήθεις μονάδες το «μια θέση πιο ψηλά» σημαίνει προσθήκη στο σύστημα της ενέργειας $\hbar\omega$ ενός κβάντου, ενώ το «μια θέση πιο χαμηλά» αφαίρεση της ενέργειας ενός κβάντου, γι' αυτό και οι τελεστές $a^\dagger$ και $a$ ονομάζονται επίσης και τελεστές *δημιουργίας* και *καταστροφής* αντίστοιχα.

ε) Δεδομένου τώρα ότι το ενεργειακό φάσμα του αρμονικού ταλαντωτή είναι φραγμένο προς τα κάτω με μια ελάχιστη ιδιοτιμή $E_0$ —την ιδιοτιμή της θεμελιώδους στάθμης— τότε η δράση του τελεστή καταβίβασης $a$ πάνω στην αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση $\psi_0$ θα πρέπει να δίνει *μηδέν*, διότι διαφορετικά η κατάσταση $a\psi_0$ θα ήταν μια ιδιοσυνάρτηση με ιδιοτιμή $E_0-1$ σε αντίφαση με την παραδοχή ότι η $E_0$ είναι η χαμηλότερη ιδιοτιμή. Θα είναι λοιπόν

$$a\psi_0 = 0,$$

οπότε η δράση του χαμιλτονιανού τελεστή (14) $-H = a^\dagger a + (1/2)-$ πάνω στην $\psi_0$ θα δώσει

$$H\psi_0 = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\psi_0 = a^\dagger(a\psi_0) + \frac{1}{2}\psi_0 = 0 + \frac{1}{2}\psi_0 = \frac{1}{2}\psi_0 \equiv E_0\psi_0$$

$$\Rightarrow \quad E_0 = \frac{1}{2}$$

και αφού όλες οι υπόλοιπες ιδιοτιμές προκύπτουν από την $E_0$ ανεβαίνοντας προς τα πάνω –με δράση του $a^\dagger$– με βήμα μονάδα, το σύνολο των ιδιοτιμών του ταλαντωτή θα δίνεται από τη σχέση

$$E_n = E_0 + n \equiv n + \frac{1}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

στ) Θέτοντας τώρα

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x + ip)\bigg|_{\substack{x \to x \\ p \to -i\frac{d}{dx}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right) \qquad (\hbar = 1)$$

η σχέση $a\psi_0 = 0$ –η οποία αποτελεί στην ουσία έναν *αλγεβρικό ορισμό της θεμελιώδους καταστάσεως*– γράφεται ως

$$a\psi_0 \sim \left(x + \frac{d}{dx}\right)\psi_0 = x\psi_0 + \psi_0' = 0,$$

δηλαδή ως μια απλούστατη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, που λύνεται αμέσως με αποτέλεσμα

$$\psi_0(x) \sim e^{-x^2/2}.$$

Γνωρίζοντας την $\psi_0$, η $\psi_1$ θα υπολογίζεται αμέσως με δράση του τελεστή αναβίβασης

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x - ip) \sim \left(x - \frac{d}{dx}\right)$$

πάνω στην $\psi_0$. Δηλαδή

$$\psi_1 \sim a^\dagger\psi_0 \sim \left(x - \frac{d}{dx}\right)\psi_0 = x\psi_0 - \psi_0' = xe^{-x^2/2} + xe^{-x^2/2}$$

$$\Rightarrow \quad \psi_1(x) \sim xe^{-x^2/2}$$

και κατόπιν

$$\psi_2 \sim a^\dagger\psi_1 \sim \left(x - \frac{d}{dx}\right)\psi_1 = x\psi_1 - \psi_1' = x^2e^{-x^2/2} - (xe^{-x^2/2})'$$

$$= x^2e^{-x^2/2} - (1 - x^2)e^{-x^2/2} \sim (2x^2 - 1)e^{-x^2/2}$$

$$\Rightarrow \quad \psi_2(x) \sim (2x^2 - 1)e^{-x^2/2},$$

από όπου είναι φανερό ότι παίρνουμε πράγματι τις γνωστές εκφράσεις των ιδιοσυναρτήσεων του αρμονικού ταλαντωτή –δείτε σχετικά, Κεφ. 7, σελ. 293– χωρίς, βέβαια, τον συντελεστή κανονικοποίησής τους που θα πρέπει να υπολογιστεί εκ των υστέρων.

ζ) Αν θέλουμε να παίρνουμε τις ιδιοσυναρτήσεις του ταλαντωτή σε κανονικοποιημένη μορφή θα πρέπει να υπολογίσουμε επίσης και τους συντελεστές $c_n$ και $d_n$

που μετατρέπουν τις σχέσεις $a\psi_n \sim \psi_{n-1}$ και $a^\dagger\psi_n \sim \psi_{n+1}$ από αναλογίες σε ισότητες. Ζητούμε δηλαδή $c_n$ και $d_n$ τέτοια ώστε να είναι

$$a\psi_n = c_n\psi_{n-1} \quad (\mathrm{A}), \qquad a^\dagger\psi_n = d_n\psi_{n+1} \quad (\mathrm{B}).$$

Για τον υπολογισμό των $c_n$ (κατ' αρχάς) απαιτούμε από τα δύο μέλη της (Α) να έχουν ίσα μήκη[(*)] αφού πρόκειται για ίσα διανύσματα. Απαιτούμε δηλαδή να είναι

$$\|a\psi_n\| = |c_n| \cdot \|\psi_{n-1}\| = |c_n|,$$

όπου θέσαμε $\|\psi_{n-1}\| = 1$, αφού θέλουμε όλες οι $\psi_n$ –άρα και η $\psi_{n-1}$– να είναι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις και επομένως –στη γλώσσα των διανυσμάτων– να έχουν *μήκος μονάδα* ($\|\psi\| = 1$). Θα είναι λοιπόν, σύμφωνα με τα παραπάνω,

$$\begin{aligned}
|c_n|^2 &= \|a\psi_n\|^2 = (a\psi_n, a\psi_n) \equiv (a^\dagger a\psi_n, \psi_n) \\
&= \left(\left(H - \frac{1}{2}\right)\psi_n, \psi_n\right) = \left(\left(E_n - \frac{1}{2}\right)\psi_n, \psi_n\right) = n(\psi_n, \psi_n) = n \\
\Rightarrow &\quad |c_n| = \sqrt{n}\,,
\end{aligned}$$

όπου, βέβαια, χρησιμοποιήσαμε –από τη δεύτερη ισότητα στην τρίτη– την ιδιότητα-ορισμό του συζυγούς τελεστή, να μεταφέρεται από το ένα διάνυσμα ενός τυχόντος εσωτερικού γινομένου στο άλλο, μετατρεπόμενος στον συζυγή του: $(\psi, A\phi) \overset{\text{ορ}}{=} (A^\dagger\psi, \phi)$. Διαλέγοντας $c_n = \sqrt{n}$ (δηλαδή παράγοντα φάσης μονάδα) η σχέση (Α) θα γράφεται τελικά ως

$$a\psi_n = \sqrt{n}\,\psi_{n-1}, \tag{15}$$

όπως μας ζητήθηκε να δείξουμε. Ενώ με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται και η σχέση

$$a^\dagger\psi_n = \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}. \tag{16}$$

η) Η βασική ιδέα είναι απλή. Αφού η δράση των τελεστών $a$ και $a^\dagger$ πάνω στις ιδιοσυναρτήσεις $\psi_n$ είναι γνωστή, ενώ οι τελεστές $x$ και $p$ εκφράζονται συναρτήσει αυτών μέσω των σχέσεων

$$x = \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}}, \qquad p = \frac{a - a^\dagger}{i\sqrt{2}}, \tag{17}$$

τότε δεν έχουμε παρά να εισαγάγουμε τις (17) στις εκφράσεις των ζητούμενων μέσων τιμών και να κάνουμε τον υπολογισμό. Έτσι, για τη μέση τιμή $\langle x^2\rangle = (\psi_n, x^2\psi_n)$ θα έχουμε κατ' αρχάς

$$x^2 = \frac{1}{2}\,(a + a^\dagger)^2 \equiv \frac{1}{2}\,(a + a^\dagger)(a + a^\dagger) = \frac{1}{2}\,(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a),$$

---

[(*)] Θυμηθείτε τον ορισμό: $\|\psi\| = (\psi, \psi)^{1/2}$ (Κεφ. 3, σελ. 169).

όπου από την τελευταία έκφραση συνεισφέρουν στη μέση τιμή μόνο οι δύο τελευταίοι όροι –εξηγήστε γιατί– για τους οποίους θα είναι

$$\begin{aligned} aa^\dagger\psi_n &= a(a^\dagger\psi_n) = a\sqrt{n+1}\,\psi_{n+1} = \sqrt{n+1}\,(a\psi_{n+1}) \\ &= \sqrt{n+1}\,\sqrt{n+1}\,\psi_n = (n+1)\psi_n, \end{aligned}$$

και

$$a^\dagger a\psi_n = a^\dagger(a\psi_n) = a^\dagger(\sqrt{n}\,\psi_{n-1}) = \sqrt{n}\,(a^\dagger\psi_{n-1}) = \sqrt{n}\,\sqrt{n}\,\psi_n = n\,\psi_n,$$

οπότε για τη μέση τιμή $\langle x^2\rangle$ θα έχουμε

$$\langle x^2\rangle = \frac{1}{2}\big(\psi_n, (aa^\dagger + a^\dagger a)\psi_n\big) = \frac{1}{2}(\psi_n, ((n+1)+n)\psi_n\big) = \left(n+\frac{1}{2}\right)(\psi_n,\psi_n)$$

$$\Rightarrow \quad \langle x^2\rangle = n + \frac{1}{2}, \tag{18}$$

όπως μας ζητήθηκε να δείξουμε. Ενώ με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\langle p^2\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{19}$$

Στην πραγματικότητα, τα αποτελέσματα (18) και (19) μπορούν να προκύψουν αμέσως, παίρνοντας τη μέση τιμή της χαμιλτονιανής $H = \frac{1}{2}(x^2+p^2)$ και θεωρώντας προφανές –λόγω της συμμετρικής εμφάνισης των $x$ και $p$ στην έκφραση της $H$– ότι θα είναι $\langle x^2\rangle = \langle p^2\rangle$. Έτσι θα έχουμε

$$\langle H\rangle = \frac{1}{2}\big(\langle x^2\rangle + \langle p^2\rangle\big) = \langle x^2\rangle = \langle p^2\rangle = E_n = n + \frac{1}{2}. \qquad \text{ό.έ.δ.}$$

Για τη μέση τιμή του $x^4$ θα είναι κατ' αρχάς

$$x^4 = x^2\cdot x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a)\cdot\frac{1}{2}(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a)$$

και κάνοντας τις πράξεις σε αυτή την έκφραση θα πρέπει να κρατάμε μόνο όρους με ίσο αριθμό τελεστών δημιουργίας και καταστροφής, διότι μόνο τέτοιοι όροι θα δώσουν μη μηδενικό αποτέλεσμα στην έκφραση $(\psi_n, x^4\psi_n)$ της μέσης τιμής (εξηγήστε γιατί). Θα είναι λοιπόν

$$\begin{aligned} x^4 &= \frac{1}{4}\,(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a)(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a) \\ &= \frac{1}{4}\,(a^2a^{\dagger 2} + a^{\dagger 2}a^2 + aa^\dagger aa^\dagger + aa^{\dagger 2}a + a^\dagger a^2 a^\dagger + a^\dagger aa^\dagger a) \\ &\quad + \text{όροι με διαφορετικό αριθμό } a \text{ και } a^\dagger. \end{aligned}$$

Για καθέναν από τους παραπάνω όρους θα έχουμε

$$\begin{aligned}
a^2 a^{\dagger 2}\psi_n &= a^2 a^\dagger (a^\dagger \psi_n) = a^2 a^\dagger\big(\sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}\big) = \sqrt{n+1}\; a^2 (a^\dagger \psi_{n+1}) \\
&= \sqrt{n+1}\; a^2\big(\sqrt{n+2}\;\psi_{n+2}\big) = \sqrt{n+1}\;\sqrt{n+2}\; a(a\psi_{n+2}) \\
&= \sqrt{n+1}\;\sqrt{n+2}\; a(\sqrt{n+2}\;\psi_{n+1}) \\
&= \sqrt{n+1}\;\sqrt{n+2}\;\sqrt{n+2}\;(a\psi_{n+1}) \\
&= \sqrt{n+1}\;\sqrt{n+2}\;\sqrt{n+2}\;\sqrt{n+1}\;\psi_n \\
&= (n+1)(n+2)\psi_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^{\dagger 2} a^2\psi_n &= a^{\dagger 2} a(a\psi_n) = \sqrt{n}\; a^{\dagger 2}(a\psi_{n-1}) = \sqrt{n}\;\sqrt{n-1}\; a^\dagger (a^\dagger \psi_{n-2}) \\
&= \sqrt{n}\;\sqrt{n-1}\;\sqrt{n-1}\;(a^\dagger \psi_{n-1}) = \sqrt{n}\;\sqrt{n-1}\;\sqrt{n-1}\;\sqrt{n}\;\psi_n \\
&= n(n-1)\psi_n
\end{aligned}$$

και εντελώς ανάλογα:

$$a a^\dagger a a^\dagger \psi_n = (n+1)^2 \psi_n, \qquad a^\dagger a a^\dagger a \psi_n = n^2 \psi_n$$

$$a a^{\dagger 2} a \psi_n = n(n+1)\psi_n, \qquad a^\dagger a^2 a^\dagger \psi_n = n(n+1)\psi_n$$

οπότε για το $\langle x^4 \rangle$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle x^4 \rangle &= \frac{1}{4}\,\big((n+1)(n+2) + n(n-1) + (n+1)^2 + n(n+1) + n(n+1) + n^2\big) \\
&= \frac{1}{4}\,(6n^2 + 6n + 3) = \frac{3}{4}\,(2n^2 + 2n + 1) \qquad \text{ό.έ.δ.}
\end{aligned}$$