Συμπληρωμα θεωριας Κεφαλαιου 1

Απόδειξη του κλασικού τύπου των Rayleigh-Jeans για το μέλαν σώμα

α) Με αφετηρία την έκφραση $u(x) = \sin kx$, $k = n\pi/L$, ενός στάσιμου κύματος σε μια μονοδιάστατη χορδή μήκους L και τη –μάλλον γνωστή– γενίκευσή του, $u(x,y,z) = \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z$ $-k_x = n_x\pi/L$, $k_y = n_y\pi/L$, $k_z = n_z\pi/L$, $n_{x,y,z} = 1, 2, \ldots \infty-$ για ένα στάσιμο κύμα μέσα σε ένα κυβικό κουτί πλευράς L, δείξτε ότι ο αριθμός των στάσιμων ΗΜ κυμάτων μέσα στο κουτί, ανά μονάδα όγκου και συχνότητας, θα δίνεται από τον τύπο

$$\rho(f) = \frac{8\pi}{c^3} f^2. \tag{1}$$

Συνδυάστε την (1) με το *θεώρημα της ισοκατανομής* –που λέει ότι *σε κάθε βαθμό ελευθερίας αντιστοιχεί μια μέση ενέργεια* $kT/2$– για να δείξετε ότι η φασματική πυκνότητας ενέργειας $u(f,T)$ στο εσωτερικό μιας κοιλότητας μέλανος σώματος θα γράφεται ως

$$u_{\mathrm{cl}}(f,T) = \rho_{\mathrm{HM}}(f) \cdot \overline{E}_{\mathrm{cl}} = \frac{8\pi}{c^3} f^2 \cdot kT, \tag{2}$$

όπου $\overline{E}_{\mathrm{cl}} = 2 \times (kT/2) = kT$ η μέση ενέργεια ανά στάσιμο κύμα καθορισμένης συχνότητας, όπου ο παράγοντας *δύο* αντιπροσωπεύει τους *δύο* βαθμούς ελευθερίας που αντιστοιχούν στο ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο. (Λόγω της εγκάρσιας πόλωσής τους τα ΗΜ κύματα διαθέτουν δύο ακόμα βαθμούς ελευθερίας που έχει καθιερωθεί να μετρώνται χωριστά στον τύπο (2).)

β) Για να περάσετε τώρα από τη φασματική πυκνότητα ενέργειας $u(f,T)$ στη φασματική ένταση $J(f,T)$ –που είναι η πειραματικά ενδιαφέρουσα ποσότητα– θα χρειαστείτε και τη σχέση

$$J(f,T) = u(f,T) \cdot \frac{c}{4}$$

την οποία καλείστε αν όχι να αποδείξετε (που δεν είναι ιδιαίτερα εύκολο) τουλάχιστον όμως να *σχολιάσετε από φυσικής πλευράς* και να την εφαρμόσετε μετά για να βεβαιωθείτε ότι το τελικό σας αποτέλεσμα συμπίπτει με τον τύπο των Rayleigh-Jeans που δώσαμε στο κείμενο.

γ) Μπορείτε να αποδείξετε με τον ίδιο τρόπο –αλλά με αφετηρία τη συνθήκη κβάντωσης $E_n = nhf$– ότι και ο τύπος του Planck είναι επίσης σωστός;

Λύση

α) Ο αριθμός των επιτρεπόμενων στάσιμων κυμάτων ανά στοιχειώδες διάστημα συχνότητας df θα προκύψει αρκετά εύκολα αν παρατηρήσουμε ότι οι επιτρεπόμενες τιμές των συνιστωσών του κυματανύσματος $\boldsymbol{k}$

$$k_x = n_x \frac{\pi}{L}, \qquad k_y = n_y \frac{\pi}{L}, \qquad k_z = n_z \frac{\pi}{L} \tag{3}$$

φτιάχνουν ένα *περιοδικό πλέγμα επιτρεπόμενων σημείων* στον χώρο $\boldsymbol{k}$, όπου κάθε τέτοιο «επιτρεπόμενο σημείο» καταλαμβάνει έναν όγκο

$$\Omega_0 = \Delta k_x \cdot \Delta k_y \cdot \Delta k_z = \frac{\pi}{L} \cdot \frac{\pi}{L} \cdot \frac{\pi}{L} = \frac{\pi^3}{V}, \tag{4}$$

όπου $\Delta k_x = \Delta k_y = \Delta k_z = \pi/L$ είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών επιτρεπόμενων τιμών των k_x, k_y, k_z σύμφωνα με την (3). Δεδομένου τώρα ότι η σχέση συχνότητας και κυματαριθμού $k = |\boldsymbol{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ είναι

$$f = \omega/2\pi = c|\boldsymbol{k}|/2\pi = ck/2\pi,$$

τότε το πλήθος των επιτρεπόμενων στάσιμων κυμάτων με συχνότητες μεταξύ f και $f + df$ θα είναι ίσο με το πλήθος των επιτρεπόμενων σημείων που βρίσκονται μέσα στο *πρώτο ογδοημόριο* του τριδιάστατου χώρου με άξονες k_x, k_y, k_z –διότι τα k_x, k_y, k_z είναι όλα θετικά– και επιπλέον μέσα στον σφαιρικό φλοιό με εσωτερική ακτίνα $k = 2\pi f/c$ και πάχος $dk = 2\pi df/c$. Και δεδομένου ακόμα ότι κάθε επιτρεπόμενο σημείο καταλαμβάνει έναν σταθερό όγκο Ω_0 όπως στην (4), ο αριθμός αυτών των σημείων σε κάθε δεδομένη περιοχή του χώρου $\boldsymbol{k}$ θα προκύπτει διαιρώντας τον όγκο αυτής της περιοχής με τον στοιχειώδη όγκο Ω_0. Στην προκειμένη περίπτωση λοιπόν ο αριθμός των επιτρεπόμενων σημείων μέσα στον παραπάνω σφαιρικό φλοιό θα είναι ίσος με (βλ. Σχ. 1)

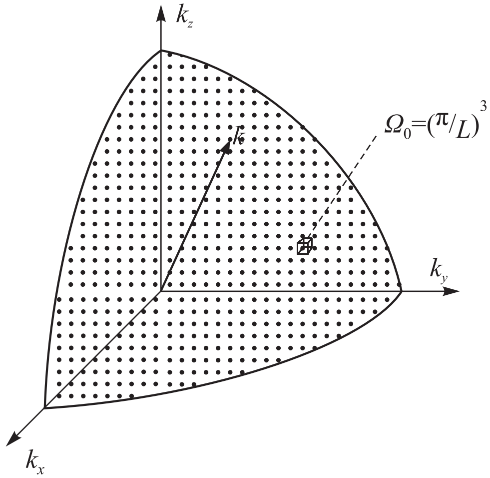
$$dN = \frac{\text{όγκος ογδοημορίου σφαιρικού φλοιού ακτίνας } k \text{ και πάχους } dk}{\Omega_0}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} 4\pi k^2 dk}{\left(\frac{\pi^3}{V}\right)} = \frac{\frac{1}{8} 4\pi \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 \frac{2\pi}{c} df}{\frac{\pi^3}{V}} = \frac{4\pi f^2}{c^3} V\, df,$$

οπότε η *πυκνότητα* αυτών των σημείων ανά μονάδα όγκου και συχνότητας θα δίνεται από τον τύπο

$$\rho(f) = \frac{dN}{V df} = \frac{4\pi f^2}{c^3}, \tag{5}$$

ο οποίος διαφέρει κατά έναν παράγοντα *δύο* από αυτόν που μας ζητήθηκε να δείξουμε. Και ο λόγος γι' αυτό είναι απλός. Στην παραπάνω διαδικασία αγνοήσαμε τον διανυσματικό χαρακτήρα του ΗΜ πεδίου και το χειριστήκαμε όπως ένα κοινό βαθμωτό πεδίο· παραδείγματος χάριν, όπως ένα στάσιμο ηχητικό πεδίο στο εσωτερικό της κοιλότητας. Όμως ο διανυσματικός χαρακτήρας του



Σχημα 1: Οι επιτρεπόμενες τιμές του κυματανύσματος $\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)=\left(n_x\frac{\pi}{L},n_y\frac{\pi}{L},n_z\frac{\pi}{L}\right)$ σχηματίζουν ένα περιοδικό πλέγμα σημείων μέσα στο πρώτο ογδοημόριο του χώρου $\boldsymbol{k}$. Ο αριθμός των επιτρεπόμενων σημείων μέσα στο ογδοημόριο του σφαιρικού φλοιού μεταξύ k και $k+dk$ θα είναι ίσος με τον όγκο αυτού του φλοιού $-(1/8)4\pi k^2dk-$ διαιρεμένο με τον όγκο $\Omega_0=\Delta k_x\Delta k_y\Delta k_z=(\pi/L)^3$, που αναλογεί σε κάθε επιτρεπόμενο σημείο.

ΗΜ πεδίου λαμβάνεται εύκολα υπ' όψιν ως απλός *διπλασιασμός* των δυνατών στάσιμων κυμάτων –και όχι τριπλασιασμός όπως θα περίμενε κανείς– διότι τα ΗΜ κύματα είναι εγκάρσια και επομένως το καθένα από αυτά διαθέτει δύο δυνατές καταστάσεις εγκάρσιας πόλωσης του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού του πεδίου. Για τα στάσιμα ΗΜ κύματα στο εσωτερικό μιας κοιλότητας ο τύπος (5) θα παίρνει λοιπόν τη μορφή

$$\rho_{\text{HM}}(f)=\frac{8\pi}{c^3}f^2,$$

όπως θέλαμε να δείξουμε.

Δεδομένου τώρα ότι στην κλασική φυσική κάθε στάσιμο ΗΜ κύμα μέσα στην κοιλότητα θα έχει μια μέση θερμική ενέργεια $kT/2$ για το ηλεκτρικό πεδίο και $kT/2$ για το μαγνητικό –αφού και τα δύο συμμετέχουν με το τετράγωνό τους στην κλασική έκφραση της ΗΜ ενέργειας[(*)]– η κλασική μέση θερμική ενέργεια ανά στάσιμο κύμα θα είναι

[(*)] Σύμφωνα με το κλασικό *θεώρημα της ισοκατανομής*: Σε κάθε βαθμό ελευθερίας που εμφανίζεται τετραγωνισμένος στην έκφραση της ενέργειας αντιστοιχεί μια μέση θερμική ενέργεια ίση με $kT/2$. Και αυτό σίγουρα ισχύει για ένα ΗΜ πεδίο για το οποίο η πυκνότητα ενέργειας έχει τη γνωστή μορφή $u=\frac{1}{2}\epsilon_0\boldsymbol{E}^2+\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2$ (mks), από όπου είναι φανερή η «τετραγωνισμένη» συμμετοχή τόσο του ηλεκτρικού όσο και του μαγνητικού πεδίου.

$$\overline{E}_{\text{cl}} = 2 \times \frac{1}{2} kT = kT, \tag{6}$$

οπότε η αντίστοιχη φασματική πυκνότητα ενέργειας u_{cl} θα προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό $\rho_{\text{HM}}(f)$ των στάσιμων κυμάτων ανά μονάδα όγκου και συχνότητας επί τη θερμική μέση ενέργεια $\overline{E}_{\text{cl}}$ ανά στάσιμο κύμα. Θα είναι δηλαδή

$$u_{\text{cl}}(f, T) = \rho_{\text{HM}}(f)\overline{E}_{\text{cl}} = \frac{8\pi}{c^3} f^2 kT, \tag{7}$$

που είναι ο κλασικός τύπος των Rayleigh-Jeans γι' αυτή την ποσότητα. (Την οποία, βέβαια, δεν θα αναγνωρίζετε πλήρως, διότι εμείς δουλέψαμε στο κείμενο όχι με τη φασματική πυκνότητα ενέργειας u αλλά τη φασματική ένταση J που είναι και η άμεσα μετρήσιμη φυσική ποσότητα.)

β) Χρησιμότερη και από την απόδειξη του τύπου

$$J(f, T) = u(f, T)\frac{c}{4} \tag{8}$$

–που θα την βρείτε, μεταξύ άλλων, στο: Σ. Τραχανάς, *Προβλήματα Κβαντομηχανικής*, σελ. 9– είναι η ποιοτική κατανόησή του. Η οποία –με εξαίρεση τον παράγοντα 1/4– είναι πολύ απλή. Πρόκειται για την κλασική υδροδυναμική σχέση $j = \rho v$, όπου εδώ η φυσική ποσότητα που «ρέει» στον χώρο είναι η *ενέργεια*, για την οποία η πυκνότητα κατανομής είναι $\rho = u$ και η ταχύτητα ροής $v = c$. Και, βέβαια, η πυκνότητα ροής j αντιστοιχεί εδώ στην πυκνότητα ροής ενέργειας J. Όσο για το 1/4, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, σε αντίθεση με την οργανωμένη ροή ενός ρευστού –όπου όλα τα μόρια σε έναν μικρό όγκο έχουν την ίδια ταχύτητα v– τα φωτόνια μιας θερμικής ακτινοβολίας έχουν τυχαίες κατευθύνσεις κίνησης και είναι επομένως εύλογο ότι η ροή J στην (8) θα είναι μικρότερη από την «υδροδυναμική τιμή» $u \cdot c$.
Σε κάθε περίπτωση, αν δεχτούμε τον τύπο (8), τότε –σε συνδυασμό με τον (7)– θα έχουμε

$$J_{\text{cl}} = u_{\text{cl}} \cdot \frac{c}{4} = \frac{2\pi}{c^2} f^2 kT,$$

που είναι ακριβώς το αποτέλεσμα που δώσαμε στο κείμενο χωρίς απόδειξη.

γ) Στην κβαντική περίπτωση θα έχουμε όπως πριν

$$u_{\text{qu}}(f, T) = \rho_{\text{HM}}(f)\overline{E}_{\text{qu}},$$

μόνο που τώρα η θερμική μέση τιμή δεν θα είναι πια kT αλλά θα υπολογιστεί εξαρχής με βάση τον γενικό τύπο της μέσης τιμής

$$\overline{E} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n, \tag{9}$$

όπου $E_n = nhf = n\epsilon$ ($\epsilon = hf$) οι επιτρεπόμενες ενέργειες ενός στάσιμου ΗΜ κύματος συχνότητας f, $P_n = Ae^{-E_n/kT}$ οι κατά Boltzmann θερμικές πιθανότητες αυτών των ενεργειών και A ο συντελεστής κανονικοποίησής τους που θα υπολογιστεί από τη συνθήκη

$$\sum P_n = 1 \quad \Rightarrow \quad A \sum e^{-E_n/kT} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = Z^{-1},$$

όπου Z το άθροισμα

$$Z \equiv Z(\beta) = \sum_{1=0}^{\infty} e^{-E_n/kT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\epsilon} = \frac{1}{1-e^{-\beta\epsilon}} \qquad \left(\beta = \frac{1}{kT}\right).$$

Και αφήνεται σε σας να δείξετε ότι η έκφραση (9) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\overline{E} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta},$$

από όπου η κβαντική μέση ενέργεια προκύπτει αμέσως ίση με

$$\overline{E}_{\rm qu} = \frac{\epsilon}{e^{\beta\epsilon}-1} = \frac{hf}{e^{hf/kT}-1} \tag{10}$$

και έχει την αναμενόμενη ιδιότητα –όπως μπορείτε εύκολα να δείτε– να τείνει στην κλασική τιμή $\overline{E}_{\rm cl} = kT$ για $h \to 0$.

Με $\overline{E}_{\rm qu}$ όπως στην (10), θα είναι τώρα

$$u_{\rm qu}(f,T) = \rho_{\rm HM}(f) \cdot \overline{E}_{\rm qu} = \frac{8\pi}{c^3} f^2 \, \frac{hf}{e^{hf/kT}-1}$$

και κατόπιν –λόγω της $J = u \cdot c/4$–

$$J_{\rm qu}(f,T) = \frac{2\pi h}{c^2} \, \frac{f^3}{e^{hf/kT}-1}$$

που είναι ακριβώς ο κβαντικός τύπος του Planck.

Είναι λοιπόν πια πλήρως αποδεδειγμένο όχι μόνο ότι η κλασική φυσική βρίσκεται σε απόλυτη αδυναμία να εξηγήσει τη θερμική ακτινοβολία των σωμάτων, αλλά και ότι η παραδοχή του Planck πράγματι οδηγεί στον εμπειρικό του τύπο του οποίου η πειραματική επιτυχία είναι γνωστή.