Πρόβλημα 1

α)

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\, r &= \nabla\,(x^2+y^2+z^2)^{1/2} = \Big(x(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}, y(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}, z(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\Big)\\ &= \frac{\boldsymbol{r}}{r}\end{aligned}$$

β)

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{r} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 3$$

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

γ) Έχουμε

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y, \omega_z x - \omega_x z, \omega_x y - \omega_y x)$$

Επομένως,

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0$$

και

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\,\boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_y z - \omega_z y & \omega_z x - \omega_x z & \omega_x y - \omega_y \end{vmatrix}\\ &= \big(\omega_x - (-\omega_x)\big)\hat{\boldsymbol{x}} + \big(\omega_y - (-\omega_y)\big)\hat{\boldsymbol{y}} + \big(\omega_z - (-\omega_z)\big)\hat{\boldsymbol{z}} = 2\boldsymbol{\omega}\end{aligned}$$

δ)

$$\mathrm{grad}\,\phi = \mathrm{grad}\,(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \boldsymbol{\omega}$$

ε)

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\big(f(x), 0, 0\big) = f'(x)$$

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f(x) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

στ)

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\big(f(y),0,0\big) = 0$$

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f(y) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -f'(y)\hat{\boldsymbol{z}}$$

Πρόβλημα 2

Βλ. mde62.jpg

Για την περίπτωση (α), $\operatorname{grad}\phi = \boldsymbol{r}/r$, δηλαδή πρόκειται για ένα ακτινικό πεδίο μοναδιαίου μέτρου, το οποίο είναι αστρόβιλο. Για την περίπτωση (δ), $\operatorname{grad}\phi = \boldsymbol{\omega}$, που είναι επίσης αστρόβιλο. Και τα δύο αποτελέσματα είναι αναμενόμενα αφού $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\phi) = 0$ για τυχόν ϕ.

Πρόβλημα 9

α) Δεδομένου ότι $\boldsymbol{A} = f(r)\hat{\boldsymbol{r}} = (x,y,z)f(r)/r$, έχουμε

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x\dfrac{f(r)}{r} & y\dfrac{f(r)}{r} & z\dfrac{f(r)}{r} \end{vmatrix}$$

οπότε η συνιστώσα x για παράδειγμα είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(z\frac{f(r)}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(y\frac{f(r)}{r}\right) &= z\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(r)}{r}\right) - y\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(r)}{r}\right) \\ &= z\frac{y}{r}\left(\frac{f(r)}{r}\right)' - y\frac{z}{r}\left(\frac{f(r)}{r}\right)' = 0 \end{aligned}$$

και ομοίως για τις άλλες συνιστώσες.

β) Για τη συνιστώσα x θα πρέπει

$$z\frac{\partial f}{\partial y} = y\frac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z} = \frac{y}{z}$$

και τα αντίστοιχα για τις άλλες συνιστώσες, δηλαδή το διάνυσμα $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = \boldsymbol{\nabla} f$ είναι παράλληλο του $\boldsymbol{r}$ και επομένως οι ισοσταθμικές επιφάνειες είναι σφαίρες, και $f = f(r)$.

γ) Για τον πρώτο από τους τρεις όρους του $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$, έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(r)}{r}x\right) = \frac{f}{r} + x\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(r)}{r}\right) = \frac{f}{r} + \frac{x^2}{r}\frac{f'r - f}{r^2} = \frac{f}{r} + \frac{x^2(f'r - f)}{r^3}$$

οπότε αν συγκεντρώσουμε όλους τους όρους, έχουμε ότι η πυκνότητα πηγών είναι

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 3\frac{f}{r} + \frac{r^2(f'r - f)}{r^3} = \frac{2f + f'r}{r}$$

Για να βρούμε τη ζητούμενη f, θέτουμε την ποσότητα αυτή ίση με μηδέν:

$$2f + f'r = 0 \Rightarrow \int \frac{df}{f} = -2\int \frac{dr}{r} \Rightarrow \ln f = -2\ln r + c' \Rightarrow f(r) = ce^{-2\ln r} = \frac{c}{r^2}$$

Ο μηδενισμός δεν μπορεί να ισχύει παντού, αφού στην αρχή των αξόνων το πεδίο απειρίζεται, οπότε οι σχέσεις $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ και $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$ δεν ισχύουν. Για τον ίδιο λόγο δεν παραβιάζεται και το θεώρημα του Helmholtz.

Πρόβλημα 13

Έστω πεδία $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ τέτοια ώστε

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = 0$$

Για την πυκνότητα πηγών του εξωτερικού γινομένου των πεδίων αυτών έχουμε

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

Πρόβλημα 14

α) Ο στροβιλισμός ενός τέτοιου πεδίου είναι

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{y}}$$

δηλαδή για να είναι το πεδίο αστρόβιλο θα πρέπει

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

β) Για να μην υπάρχουν πηγές, προφανώς αρκεί να ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Πρόβλημα 27

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \epsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \Big(\boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \Big) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{E}) \end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} = 0$$

Το u αντιπροσωπεύει την πυκνότητα ενέργειας (ενέργεια/όγκος), ενώ το $\boldsymbol{S}$ την πυκνότητα ροής ενέργειας (ενέργεια/(επιφάνεια·χρόνος).

Πρόβλημα 28

α) Θέτουμε κατ' αρχάς $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$, οπότε η $\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{B} = 0$ ικανοποιείται αυτομάτως. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (Γ), παίρνουμε

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) = 0$$

Επομένως, μπορούμε να θέσουμε

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \phi \;\Rightarrow\; \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

β)Τα νέα δυναμικά $\boldsymbol{A}'$ και ϕ' δίνουν τα εξής πεδία:

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \phi) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

και

$$\boldsymbol{E}' = -\boldsymbol{\nabla}\phi' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial(\boldsymbol{\nabla}\phi)}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \frac{\partial(\boldsymbol{\nabla}\phi)}{\partial t} = \boldsymbol{E}$$

δηλαδή τα ίδια με τα αρχικά. Επομένως, υπάρχει αυτή η ελευθερία επιλογής δυναμικών.

γ) Εάν θεωρήσουμε ότι ισχύει η συνθήκη Lorentz

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

τότε η εξίσωση (A) μέσω της αντικατάστασης (1) γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\
&\Rightarrow \quad \nabla^2\phi + \frac{\partial(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A})}{\partial t} = \nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για την εξίσωση (Δ) έχουμε

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \\
&\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial(\boldsymbol{\nabla}\phi)}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \\
&\Rightarrow \quad \nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{j} + \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \\
&\Rightarrow \quad \nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

Αν τα τρέχοντα $\boldsymbol{A}$ και ϕ δεν ικανοποιούν τη συνθήκη Lorentz, ορίζουμε $\boldsymbol{A}'$ και ϕ' μέσω μιας συνάρτησης μετασχηματισμού f, η οποία μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της απαίτησης τα $\boldsymbol{A}'$ και ϕ' να ικανοποιούν τη συνθήκη Lorentz:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} f) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \nabla^2 f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A} - -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = y(\boldsymbol{r}, t)
\end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μια μη ομογενής κυματική, από την οποία μπορεί να προσδιοριστεί η f και μέσω αυτής τα ζητούμενα $\boldsymbol{A}'$ και ϕ'.