Πρόβλημα 1

Το φυσικό πρόβλημα είναι: τοίχος σε επαφή με λουτρό θερμοκρασίας $T = 0$ αριστερά και μονωμένος δεξιά, με αρχική θερμοκρασία $T = 1$. Θέτουμε $u(x,t) = U(x)T(t)$, οπότε $u_t = U\dot{T}$ και $u_{xx} = U''T$, και προχωράμε στον χωρισμό των μεταβλητών:

$$u_t = u_{xx} \Rightarrow U\dot{T} = U''T \Rightarrow \frac{T}{\dot{T}} = \frac{U''}{U} = -\lambda$$

Όσον αφορά τη χρονική εξίσωση έχουμε

$$\dot{T} + \lambda T = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) = e^{-\lambda t}$$

ενώ για τη χωρική

$$U'' + \lambda U = 0 \quad \Rightarrow \quad U = A \sin kx + B \cos kx, \qquad \text{όπου } \lambda = k^2$$

Από τις συνοριακές συνθήκές, έχουμε

$$U(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0,$$

και

$$U'(L) = 0 \;\Rightarrow\; Ak \cos kL = 0 \;\Rightarrow\; kL = n\pi + \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; k = \frac{(2n+1)\pi}{2L} = \frac{n\pi}{2L}, \quad \text{όπου } n \text{ περιττό}$$

δηλαδή τελικά

$$U_n = a_n \sin \frac{n\pi x}{2L}, \qquad T_n = e^{-n^2\pi^2 t/4L^2}$$

και

$$u(x,t) = \sum_{n \text{ περ.}} c_n \sin \frac{n\pi x}{2L} e^{-n^2\pi^2 t/4L^2}.$$

Από τις αρχικές συνθήκες, $u(x,0) = f(x) = 1$ έχουμε

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{2L}\, dx = \frac{2}{L}\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{2L}\, dx = \frac{4}{n\pi}$$

οπότε τελικά

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ περ.}} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{2L} e^{-n^2\pi^2 t/4L^2}.$$

Πρόβλημα 3

Το πρόβλημα έχει ήδη λυθεί (βλ. σελ. 123). Με την αντικατάσταση $t \to \sigma t$, έχουμε

$$u(x,t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n\ \text{περ.}} \frac{1}{n} e^{-n^2\pi^2\sigma t/L^2} \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Για μεγάλους χρόνους, όμως, επιζεί μόνο ο πρώτος όρος ($n = 1$), οπότε αν θέσουμε $\gamma = \pi^2\sigma/L^2 \simeq 5{,}7 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}$, ο ζητούμενος χρόνος είναι αυτός που ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση (στο μέσον της πλάκας, δηλ. για $x = L/2$, ο όρος $\sin(\pi x/L)$ ισούται βέβαια με 1):

$$u(x,t) = \frac{4T_0}{\pi} e^{-\gamma t} = 100 \quad \Rightarrow \quad e^{-\gamma t} = \frac{\pi}{16} \quad \Rightarrow \quad \gamma t = \ln\frac{16}{\pi} \quad \Rightarrow \quad t \simeq 287\ \mathrm{s}$$

ενώ από κει και πέρα η κατανομή των θερμοκρασιών θα έχει τη μορφή

$$u(x,t) = \frac{1600}{\pi} e^{-t/176} \sin\frac{\pi x}{20}$$

όπου ο χρόνος εκφράζεται σε s και η απόσταση σε cm.

Πρόβλημα 10

Το χωρικό τμήμα της λύσης είναι κατά τα γνωστά $X = a\sin kx + b\cos kx$, οπότε εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$X(0) = 0 \ \Rightarrow\ b = 0, \qquad X(\pi) = 0 \ \Rightarrow\ k = n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

οπότε τελικά

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx e^{-n^2 t}$$

όπου

$$c_n = \frac{\int_0^\pi \sin^3 x \sin nx\, dx}{\int_0^\pi \sin^2 nx\, dx}$$

Το ολοκλήρωμα στον παρονομαστή ισούται με $\pi/2$, οπότε τελικά έχουμε

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^3 x \sin nx\, dx = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{3\pi}{8}, & n=1 \\ \dfrac{2}{\pi}\left(-\dfrac{\pi}{8}\right), & n=3 \\ 0, & n \neq 1 \text{ ή } 3 \end{cases}$$

και η λύση μπορεί να γραφτεί στην κλειστή μορφή

$$u(x,t) = \frac{3}{4}e^{-t}\sin x - \frac{1}{4}e^{-9t}\sin 3x$$

Πρόβλημα 12

Οι δύο εξισώσεις ιδιοτιμών που προκύπτουν κατά τα γνωστά εκφράζοντας τη λύση ως $u(x,y) = X(x)Y(y)$ είναι

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad Y'' - \lambda Y = 0$$

Η πρώτη, σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες $X(0) = X(L) = 0$ έχει λύση

$$X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \text{όπου } \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ενώ η δεύτερη έχει λύση

$$Y = Ae^{ky} + Be^{-ky}$$

και για να έχουμε πεπερασμένη λύση στο άπειρο, $Y(\infty) = 0$, θα πρέπει $A = 0$, οπότε τελικά

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n\pi y/L}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Η άλλη συνοριακή συνθήκη δίνει

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L} = 1$$

όπου

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\frac{L}{n\pi}\big(1-(-1)^n\big) = \begin{cases} \dfrac{2L}{n\pi}\dfrac{2}{L}, & n \text{ περιττό} \\ 0, & n \text{ άρτιο} \end{cases}$$

Άρα, η πλήρης λύση είναι

$$u(x,y) = \frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ περ.}} \frac{1}{n}e^{-n\pi y/L}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

και το φυσικό πρόβλημα είναι απειρομήκης πυκνωτής με «παραλληλόγραμμη» ημιάπειρη διατομή.

Πρόβλημα 15

Η γενική λύση της εξίσωσης Laplace σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$u(\rho,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

ενώ αν επιβάλουμε τη συνθήκη $\Theta(0)=\Theta(\pi)=0$ θα πάρουμε $a_n=0$, δηλ.

$$u(\rho,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\rho^n\sin n\theta$$

Η συνοριακή συνθήκη στο $\rho=a$ είναι

$$u(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}c_na^n\sin n\theta=1$$

με

$$c_na^n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin n\theta\,d\theta=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{2}{n}, & n \text{ περιττό}\\ 0, & n \text{ άρτιο}\end{cases}$$

δηλαδή

$$c_n=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi a^n}, & n \text{ περιττό}\\ 0, & n \text{ άρτιο}\end{cases}$$

και τελικά

$$u(\rho,\theta)=\frac{4}{\pi}\sum_{n\ \text{περ.}}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\sin n\theta.$$

Πρόβλημα 16

Εφόσον έχουμε στάσιμη θερμοκρασιακή κατανομή, δεν υπάρχει ροή θερμότητας, και επομένως $\nabla T=0$, οπότε η θερμοκρασία είναι σταθερή παντού και ίση με

T_0.

Πρόβλημα 18

Λόγω της συνοριακής συνθήκης $\Theta(0) = \Theta(\pi) = 0$ αποκλείονται τα συνημίτονα, οπότε οι λύσεις είναι οι $J_n(k\rho)\sin n\theta$, χωρίς τη λύση $n = 0$, που είναι εκ ταυτότητος μηδέν. Από τη συνοριακή συνθήκη $U(a,\theta) = 0$ έχουμε ότι $J_n(ka) = 0$ και επομένως

$$ka = x_{nm} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{x_{nm}}{a} \quad \Rightarrow \quad \omega_{nm} = ck = x_{nm}\frac{c}{a}$$

όπου

$$x_{nm} = x_{11},\ x_{21},\ x_{12},\ \ldots = 3{,}83,\ 5{,}13,\ 7{,}01,\ldots$$

Η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:

Να συμπληρωθεί η γραφική παράσταση

Πρόβλημα 19

Έχουμε κατά τα γνωστά

$$U_{nm}(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

δηλ.

$$k_x = \frac{n\pi}{a}, \quad k_y = \frac{m\pi}{b}, \qquad \text{όπου } n,\ m = 1,2,\ldots$$

Για τις συχνότητες, έχουμε

$$\begin{aligned}\omega_{nm} &= c\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \pi c\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2} \overset{b=a/2}{=} \pi c\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + 4\left(\frac{m}{a}\right)^2} \\ &= \frac{\pi c}{a}\sqrt{n^2 + 4m^2} = \omega_0\sqrt{n^2 + 4m^2}\end{aligned}$$

Οι τέσσερεις πρώτες ιδιοσυχνότητες είναι

$$\omega_{11} = \sqrt{5}\omega_0, \quad \omega_{21} = \sqrt{8}\omega_0, \quad \omega_{31} = \sqrt{13}\omega_0, \quad \omega_{12} = \sqrt{17}\omega_0,$$

και τα αντίστοιχα πλάτη ταλάντωσης είναι

$$\begin{aligned} U_{11}(x,y) &= \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \\ U_{21}(x,y) &= \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \\ U_{31}(x,y) &= \sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \\ U_{12}(x,y) &= \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b} \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:

Να συμπληρωθεί η γραφική παράσταση

Πρόβλημα 20

Όσον αφορά την ακτινική εξίσωση

$$\rho^2 R'' + \rho R' - n^2 R = 0,$$

μπορούμε να κρατήσουμε και τις λύσεις που απειρίζονται στην αρχή, οπότε έχουμε

$$R_n(\rho) = a_n\rho^n + b_n\rho^{-n}, \quad (n \neq 0), \qquad \text{και} \qquad R_0(\rho) = a_0 + b_0\ln\rho, \qquad (n = 0)$$

Στη συνέχεια, θα μπορούσαμε να επιβάλουμε την Ο.Σ.Σ. $R_n(b) = 0$ για να προσδιορίσουμε τη σχέση μεταξύ a_n και b_n. Αλλά χάρις στην περιστροφική συμμετρία του προβλήματος, η λύση είναι ανεξάρτητη του θ, άρα όλοι οι όροι U_n θα απουσιάζουν εκτός από τον U_0. Η συνοριακή συνθήκη για τον όρο R_0 δίνει

$$R_0(b) = a_0 + b_0\ln b = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = -b_0\ln b$$

και επομένως

$$R_0(\rho) = b_0(\ln\rho - \ln b) = b_0\ln(\rho/b)$$

Εάν επιβάλουμε στη λύση $u(\rho) = c\ln(\rho/b)$ τη Μ.Ο.Σ.Σ., έχουμε

$$u(a) = c\ln(a/b) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\ln(a/b)}$$

και τελικά

$$u(\rho) = \frac{\ln(\rho/b)}{\ln(a/b)}.$$

Όσον αφορά την τριδιάστατη περίπτωση, έχουμε αντίστοιχα

$$R_0(r) = a_0 + b_0 r^{-1}$$

και από την Ο.Σ.Σ.

$$R_0(b) = a_0 + b_0/b = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = -b_0/b \quad \Rightarrow \quad R_0(r) = b_0(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}).$$

Επιβάλλοντας στη λύση $u(r) = c(1/r - 1/b)$ τη Μ.Ο.Σ.Σ., έχουμε

$$u(a) = c(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{ab}{b-a}$$

και τελικά

$$u(r) = \frac{ab}{b-a}(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}) = \frac{a}{a-b}\left(1 - \frac{b}{r}\right).$$

Πρόβλημα 23

Με στάθμη αναφοράς τους 30° C (πράγμα που σημαίνει ότι στα αποτελέσματα θα πρέπει να προστεθεί το 30), το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση Laplace της Ενότητας 3.8, σελ. 162. Το επάνω ημισφαίριο έχει (σε σχέση με τη στάθμη αναφοράς) θερμοκρασία $T_0/2 = 10$ (αντίστοιχη του δυναμικού $V_0/2$), και το κάτω έχει θερμοκρασία $-T_0/2 = -10$ (αντίστοιχη του δυναμικού $-V_0/2$). Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατ' ευθείαν τον τύπο (20) της σελ. 170 με $V_0 = T_0 = 20$:

$$u(r,\theta) = 30 + \frac{20}{4}\left(3\frac{r}{a}P_1(\cos\theta) - \frac{7}{4}\left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \frac{11}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^5 P_5(\cos\theta) + \dots\right)$$

α) Προφανώς $u(0,\theta) = 30$, ενώ

$$u(a/2,0) = 30 + 5\left(\frac{3}{2} - \frac{7}{4}\frac{1}{8} + \frac{11}{8}\frac{1}{32} - \dots\right) \simeq 36{,}6$$

με δεδομένο ότι για όλα τα πολυώνυμα Legendre περιττής τάξης έχουμε $P_n(\cos 0) = P_n(1) = 1$.
β) $u(r,\pi/2) = 30$, διότι όλα τα πολυώνυμα Legendre περιττής τάξης είναι περιττά, και επομένως $P_n(\cos\pi/2) = P_n(0) = 0$.

Πρόβλημα 25

Αν θέσουμε ως στάθμη αναφοράς τη θερμοκρασία T_1, η βάση βρίσκεται σε θερμοκρασία 0 και το ημισφαιρικό τμήμα σε θερμοκρασία $T_2 - T_1$. Αν επιβάλουμε στη γωνιακή συνάρτηση $\Theta(\xi)$ την Ο.Σ.Σ. $\Theta(0) = 0$, επιζούν μόνο τα περιττής τάξης πολυώνυμα Legendre, οπότε η γενική λύση είναι

$$u(r,\theta) = \sum_{n\ \text{περ.}} c_n r^n P_n(\cos\theta)$$

Από τη Μ.Ο.Σ.Σ.

$$u(a,\theta) = T_2 - T_1 = \sum_{n\ \text{περ.}} c_n a^n P_n(\xi)$$

σε συνδυασμό με τη σχέση

$$\int_0^1 P_n^2(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2n+1}$$

έχουμε ότι

$$c_n = \frac{2n+1}{a^n}(T_2 - T_1)\int_0^1 P_n(\xi)\, d\xi = \frac{2n+1}{2a^n} 2(T_2 - T_1)\int_0^1 P_n(\xi)\, d\xi.$$

Η έκφραση αυτή συμπίπτει με την (19), σελ. 169, για $V_0 = 2(T_2 - T_1)$, οπότε τελικά από τη σχέση (20), σελ. 170 έχουμε

$$u(r,\theta) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{2}\left(3\frac{r}{a}P_1(\cos\theta) - \frac{7}{4}\left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \frac{11}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^5 P_5(\cos\theta) + \dots\right)$$

Πρόβλημα 33

Η λύση της μορφής $u(x,t) = xT(t) + \sum c_n(t)\sin n\pi x$ ικανοποιεί τις Σ.Σ. $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = T(t)$ και την αρχική συνθήκη $u(x,0) = 0$ όταν $T(0) = c_n(0) = 0$. Αν απαιτήσουμε να ικανοποιεί και την εξίσωση $u_t = u_{xx}$, έχουμε

$$\begin{aligned} x\dot{T} + \sum \dot{c}_n(t)\sin n\pi x &= \sum c_n(t)(-n^2\pi^2)\sin n\pi x \\ \Rightarrow \quad \sum(\dot{c}_n + n^2\pi^2 c_n)\sin n\pi x &= -x\dot{T} = \sum \dot{T} d_n \sin n\pi x \end{aligned}$$

όπου

$$d_n = 2\int_0^1 (-x)\sin n\pi x\, dx = \frac{2(-1)^n}{n\pi}$$

Επομένως, η προς επίλυση εξίσωση είναι

$$\dot{c}_n + n^2\pi^2 c_n = \dot{T} d_n \qquad \text{ή} \qquad \dot{c}(t) + kc(t) = \dot{T}(t)d = f(t)$$

όπου $k = n^2\pi^2$ και $f(t) = \dot{T}(t)d$. Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace, έχουμε

$$sC(s) + kC(s) = F(s) \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{F(s)}{s+k}$$

και με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$c(t) = \int_0^t e^{-k(t-t')} f(t')\, dt' \quad \Rightarrow \quad c_n(t) = \frac{2(-1)^n}{n\pi} \int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-t')} \dot{T}(t')\, dt'$$

οπότε τελικά

$$u(x,t) = xT(t) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n\pi x \int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-t')} \dot{T}(t')\, dt'$$