Πρόβλημα 5

α) Λείπουν οι συνοριακές συνθήκες
β) Λείπει η «αρχική ταχύτητα»
γ) Καλώς τεθειμένο

Πρόβλημα 6

Ψυχόμενος τοίχος με λουτρό θερμοκρασίας $T = 0$ στο $x = 0$ και μονωμένος στο $x = L$.

Πρόβλημα 8

Θέτουμε $u(x,t) = X(x)T(t)$, οπότε έχουμε $u_t = X\dot{T}$ και $u_{xx} = X''T$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση $u_t = u_{xx}$ έχουμε

$$X\dot{T} = X''T \Rightarrow \frac{\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Η εξίσωση για τη συνάρτηση X γίνεται

$$X'' + \lambda X = 0$$

η οποία έχει λύση

$$X = A\sin kx + B\cos kx, \qquad \text{όπου } k = \sqrt{\lambda}$$

Από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$\begin{aligned} u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow B = 0, \\ u(L,t) = 0 \Rightarrow X(L)T(t) = 0 \Rightarrow A\sin kL = 0 \end{aligned}$$

και από την τελευταία σχέση έπεται ότι

$$kL = n\pi \Rightarrow k = k_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Τελικά, έχουμε $X_n(x) = A\sin(n\pi x/L)$. Η εξίσωση για τη συνάρτηση $T(t)$ είναι

$$\dot{T} = -\lambda_n T, \qquad \text{όπου } \lambda_n = k_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

με λύση

$$T = a_n e^{-\lambda_n t} = a_n e^{-n^2\pi^2 t/L^2}.$$

Η ολική λύση, επομένως, είναι

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t/L^2} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Τέλος, από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f(x) \Rightarrow$$

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{(f, X_n)}{(X_n, X_n)}.$$

Το αντίστοιχο φυσικό πρόβλημα είναι ψυχόμενος τοίχος σε λουτρό θερμοκρασίας $T = 0$.

Πρόβλημα 9

α) Θα διεγερθούν μόνο τα περιττά πολλαπλάσια.
β) Κυριαρχεί η θεμελιώδης.
γ) Η γενική λύση είναι

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos n\omega t$$

όπου δεν υπάρχουν όροι $\sin n\omega t$ λόγω μηδενικής αρχικής ταχύτητας. Για τους συντελεστές a_n έχουμε

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{x(L-x)}{2L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} \dfrac{4L}{n^3\pi^3}, & \text{για } n \text{ περιττό} \\ 0, & \text{για } n \text{ άρτιο} \end{cases}$$

οπότε τελικά

$$u(x,t) = \frac{4L}{\pi^3}\sum_{n\ \text{περ.}} \frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos n\omega t$$

Πρόβλημα 11

α) Θέτοντας $u = X(x)T(t)$, έχουμε $u_t = X\dot{T}$ και $u_{xxx} = X'''T$, οπότε η εξίσωση $u_t = u_{xxx}$ γίνεται

$$X\dot{T} = X'''T \Rightarrow \frac{\dot{T}}{T} = \frac{X'''}{X} = -\lambda$$

οπότε ο χωρισμός είναι εφαρμόσιμος.
β) Θέτοντας $u = X(x)Y(y)$, έχουμε $u_{xx} = X''Y$ και $u_{yy} = XY''$, οπότε η εξίσωση $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$ γίνεται, αν διαιρέσουμε πρώτα με xy

$$\frac{u_{xx}}{x} + \frac{u_{yy}}{y} = 0 \Rightarrow \frac{X''Y}{x} + \frac{XY''}{y} = 0 \Rightarrow \frac{X''}{xX} + \frac{Y''}{yY} = 0.$$

οπότε ο χωρισμός είναι εφαρμόσιμος.
γ) Θέτοντας $u = X(x)T(t)$, έχουμε $u_{tt} = X\ddot{T}$ και $u_{xt} = X'\dot{T}$, οπότε η εξίσωση $u_{tt} = u_{xt} + u$ γίνεται

$$X\ddot{T} = X'\dot{T} + XT \Rightarrow \frac{\ddot{T}}{T} = \frac{X'\dot{T}}{XT} + 1$$

οπότε ο χωρισμός δεν είναι εφαρμόσιμος.
δ) Θέτοντας $u = X(x)T(t)$, έχουμε $u_t = X\dot{T}$, $u_{tt} = X\ddot{T}$ και $u_{xx} = X''T$, οπότε η εξίσωση $tu_{tt} = u_t + u_{xx}$ γίνεται

$$tX\ddot{T} = X\dot{T} + X''T \Rightarrow \frac{t\ddot{T}}{T} = \frac{\dot{T}}{T} + \frac{X''}{X} \Rightarrow \frac{t\ddot{T}}{T} - \frac{\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

οπότε ο χωρισμός είναι εφαρμόσιμος.
ε) Θέτοντας $u = X(x)T(t)$, έχουμε $xu_t = xX\dot{T}$ και $u_{xx} = X''T$, οπότε η εξίσωση $xu_t = u_{xx}$ γίνεται

$$xX\dot{T} = X''T \Rightarrow \frac{x\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X} \Rightarrow \frac{\dot{T}}{T} = \frac{X''}{xX} = -\lambda$$

οπότε ο χωρισμός είναι εφαρμόσιμος.
στ) Θέτοντας $u = X(x)T(t)$, έχουμε $xu_t = xX\dot{T}$, $u_{xx} = X''T$ και $u_{tt} = X\ddot{T}$, οπότε η εξίσωση $xu_t = u_{xx} + u_{tt}$ γίνεται

$$xX\dot{T} = X''T + X\ddot{T} \Rightarrow \frac{x\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{\dot{T}}{T}$$

οπότε ο χωρισμός δεν είναι εφαρμόσιμος.