1

Μιγαδικοί αριθμοί και στοιχειώδεις συναρτήσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγονται οι μιγαδικοί αριθμοί, οι στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις, και οι βασικές τους ιδιότητες. Όπως θα δούμε, οι μιγαδικοί αριθμοί έχουν έναν απλό διδιάστατο χαρακτήρα που επιδέχεται μια άμεση γεωμετρική περιγραφή. Ενώ πολλά συμπεράσματα του λογισμού των πραγματικών μεταβλητών μεταφέρονται και στις μιγαδικές μεταβλητές, στον λογισμό των μιγαδικών συναρτήσεων ανακύπτουν επίσης κάποιες πολύ σημαντικές καινοφανείς και χρήσιμες έννοιες. Ακόμη, σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζονται συνοπτικά και κάποιες εφαρμογές στις διαφορικές εξισώσεις.

1.1 Οι μιγαδικοί αριθμοί και οι ιδιότητές τους

Σε όλο το βιβλίο θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό του Euler για τη φανταστική μονάδα:

$$i^2 = -1 \tag{1.1.1}$$

Κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

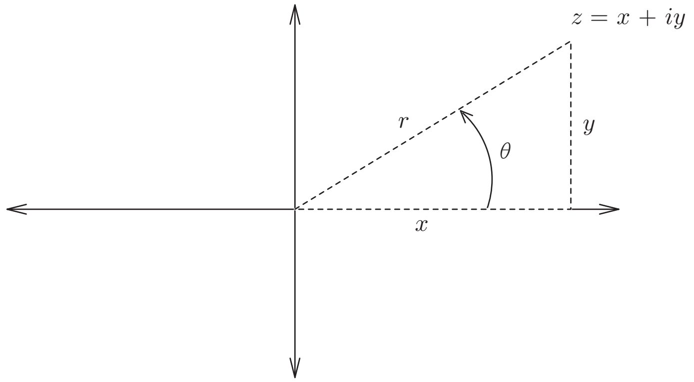
$$z = x + iy \tag{1.1.2}$$

όπου x είναι το πραγματικό μέρος τού z, $\mathrm{Re}(z)$, και y το φανταστικό μέρος τού z, $\mathrm{Im}(z)$. Εάν $y = 0$, τότε λέμε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός, ενώ εάν $x = 0$ λέμε ότι ο z είναι καθαρά φανταστικός (ή απλά φανταστικός). Ένα στοιχείο x του συνόλου των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $x \in \mathbb{R}$, ενώ ένα στοιχείο z του συνόλου των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με $z \in \mathbb{C}$. Η σχέση (1.1.2) αναπαρίσταται γεωμετρικά σε ένα διδιάστατο σύστημα συντεταγμένων, το λεγόμενο **μιγαδικό επίπεδο** (βλ. Σχήμα 1.1.1).

Ο οριζόντιος άξονας είναι ο άξονας των πραγματικών αριθμών ενώ ο κατακόρυφος είναι ο άξονας των φανταστικών αριθμών. Η αντιστοιχία με τα διδιάστατα διανύσματα προκύπτει άμεσα. Ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα διδιάστατο διάνυσμα (x, y).

Μια άλλη χρήσιμη αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών είναι η αναπαράσταση σε πολικές συντεταγμένες (r, θ):

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad (r \geq 0) \tag{1.1.3}$$



Σχήμα 1.1.1. Το μιγαδικό επίπεδο («επίπεδο z»)

Έτσι, ένας μιγαδικός αριθμός z μπορεί εναλλακτικά να γραφτεί σε πολική μορφή:

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.1.4}$$

Η ακτίνα r μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \equiv |z| \tag{1.1.5α}$$

(το σύμβολο $\equiv$ δηλώνει ισοδυναμία), και αντιπροσωπεύει μια φυσική έννοια **απόλυτης τιμής** του z, η οποία συμβολίζεται με $|z|$, δηλαδή είναι το μήκος του διανύσματος που αντιστοιχεί στον z. Η τιμή $|z|$ ονομάζεται συχνά και **μέτρο** του z. Η γωνία θ λέγεται όρισμα του z και συμβολίζεται με $\arg(z)$. Θα ακολουθήσουμε την καθιερωμένη σύμβαση, θεωρώντας ως θετική κατεύθυνση την αντιωρολόγια. Για $z \neq 0$, οι τιμές του θ μπορούν να προσδιοριστούν από τη σχέση (1.1.3) με στοιχειώδη τριγωνομετρία:

$$\tan\theta = y/x \tag{1.1.5β}$$

όπου το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκουν τα x,y θεωρείται δεδομένο. Σημειωτέον ότι το $\theta \equiv \arg z$ δεν ορίζεται **μονοσήμαντα**, διότι η $\tan\theta$ είναι περιοδική συνάρτηση του θ με περίοδο π. Για τυχόν $z = x + iy$ όπου $z \neq 0$, το θ παίρνει μία τιμή στο διάστημα $\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$, όπου θ_0 ένας αυθαίρετος αριθμός, ενώ οι υπόλοιπες τιμές του θ θα διαφέρουν κατά ακέραια πολλαπλάσια του 2π. Επιλέγουμε $\theta_0 = 0$. Για παράδειγμα, αν $z = -1 + i$, τότε $|z| = r = \sqrt{2}$ και $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Οι παραπάνω παρατηρήσεις ισχύουν αυτούσιες και στην περίπτωση που θα χρησιμοποιήσουμε την πολική αναπαράσταση γύρω από ένα σημείο $z_0 \neq 0$. Αυτό που κάνουμε είναι απλά ότι μεταφέρουμε την αρχή των αξόνων από το $z = 0$ στο $z = z_0$.

Σε αυτό το σημείο θα μας διευκολύνει να εισαγάγουμε μια ειδική εκθετική συνάρτηση, το πολικό εκθετικό, που ορίζεται ως εξής:

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \tag{1.1.6}$$

Συνεπώς από τη σχέση (1.1.4) συνεπάγεται ότι ο z μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$z = re^{i\theta} \tag{1.1.4$'$}$$

Αυτή η εκθετική συνάρτηση έχει όλες τις ιδιότητες που γνωρίζουμε από τον στοιχειώδη απειροστικό λογισμό και αποτελεί ειδική περίπτωση της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης που θα ορίσουμε παρακάτω. Για παράδειγμα, με εφαρμογή γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, από τη σχέση (1.1.6) έπεται ότι :

$$e^{2\pi i} = 1 \qquad e^{\pi i} = -1 \qquad e^{\frac{\pi i}{2}} = i \qquad e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i$$

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad (e^{i\theta})^m = e^{im\theta} \qquad (e^{i\theta})^{1/n} = e^{i\theta/n}$$

Με δεδομένες αυτές τις ιδιότητες, μπορεί κανείς να επιλύσει μια εξίσωση της ακόλουθης μορφής:

$$z^n = a = |a|e^{i\phi} = |a|(\cos\phi + i\sin\phi), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Χρησιμοποιώντας την περιοδικότητα των συναρτήσεων $\cos\phi$ και $\sin\phi$, έχουμε:

$$z^n = a = |a|e^{i(\phi+2\pi m)} \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1$$

οπότε οι n ρίζες της εξίσωσης είναι οι εξής:

$$z = |a|^{1/n} e^{i(\phi+2\pi m)/n} \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Για $m \geq n$ οι ρίζες επαναλαμβάνονται.

Για $a = 1$ οι ρίζες αυτές είναι οι λεγόμενες n ρίζες της μονάδας: $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$, όπου $\omega = e^{2\pi i/n}$. Οπότε για $n = 2, a = -1$ έχουμε ότι οι λύσεις της $z^2 = -1 = e^{i\pi}$ είναι $z = \{e^{i\pi/2}, e^{3i\pi/2}\}$, ή $z = \pm i$. Ενώ στο πλαίσιο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση $z^2 = -1$ δεν έχει λύσεις, στο πλαίσιο των μιγαδικών αριθμών έχει δύο λύσεις. Όπως θα δείξουμε παρακάτω σε αυτό το βιβλίο, μια n-οστού βαθμού πολυωνυμική εξίσωση $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, όπου οι συντελεστές $\{a_j\}_{j=0}^{n-1}$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, έχει ακριβώς n λύσεις (ρίζες), όπου συνυπολογίζονται και οι πολλαπλότητες (για παράδειγμα λέμε ότι η $(z-1)^2 = 0$ έχει δύο ρίζες και ότι η $z = 1$ είναι μια ρίζα με πολλαπλότητα 2).

Ο **μιγαδικός συζυγής** του z ορίζεται ως εξής:

$$\overline{z} = x - iy = re^{-i\theta} \tag{1.1.7}$$

Δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι αν και μόνο αν τα πραγματικά τους μέρη και τα φανταστικά τους μέρη είναι αντιστοίχως ίσα, δηλαδή αν $z_k = x_k + iy_k$ για $k = 1, 2$, τότε:

$$z_1 = z_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

Έτσι, η έκφραση $z = 0$ σημαίνει ότι $x = y = 0$.

Οι κανόνες για την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό, και τη διαίρεση μιγαδικών αριθμών έπονται από τους κανόνες που διέπουν τους πραγματικούς αριθμούς. Συνεπώς, δεδομένου ότι $i^2 = -1$, έχουμε:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \tag{1.1.8α}$$

και

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{1.1.8β}$$

Ειδικότερα, από τη σχέση (1.1.5α) έχουμε:

$$z\overline{z} = \overline{z}z = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \tag{1.1.8γ}$$

Αυτή η σχέση είναι πολύ χρήσιμη για τη διαίρεση μιγαδικών αριθμών:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} \\ &= \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} \\ &= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} \end{aligned} \tag{1.1.8δ}$$

Όπως μπορούμε να δείξουμε εύκολα, ισχύουν η αντιμεταθετική, η προσεταιριστική, και η επιμεριστική ιδιότητα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Από γεωμετρικής σκοπιάς, η πρόσθεση δύο μιγαδικών αριθμών ακολουθεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου για τα διανύσματα (βλ. Σχήμα 1.1.2).

Η χρήσιμη αναλυτική πρόταση

$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \tag{1.1.9}$$

έχει τη γεωμετρική έννοια ότι καμία πλευρά ενός τριγώνου δεν είναι μεγαλύτερη σε μήκος από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών –γι' αυτό και η σχέση (1.1.9) ονομάζεται **τριγωνική ανισότητα**.

Η απόδειξη της (1.1.9) έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \end{aligned}$$

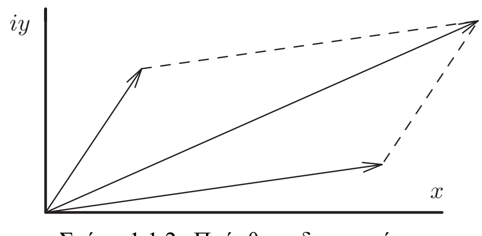
Συνεπώς

$$|z_1+z_2|^2 - (|z_1|+|z_2|)^2 = 2(\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) - |z_1||z_2|) \le 0 \tag{1.1.10}$$

όπου η ανισότητα έπεται από το γεγονός ότι

$$x = \mathrm{Re}\, z \le |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

και $|z_1\overline{z_2}| = |z_1||z_2|$. Η δεξιά ανισότητα της σχέσης (1.1.9) έπεται από τη σχέση (1.1.10), αν πάρουμε την τετραγωνική ρίζα. Για να αποδείξουμε την αριστερή ανισότητα, θα εφαρ-



Σχήμα 1.1.2. Πρόσθεση διανυσμάτων

μόσουμε μια αλλαγή μεταβλητών. Θέτουμε

$$W_1 = z_1 + z_2 \qquad W_2 = -z_2$$

οπότε από τη δεξιά ανισότητα (1.1.9) (που μόλις αποδείχθηκε) έχουμε ότι

$$|W_1| \leq |W_1 + W_2| + |-W_2|$$

$$\text{ή} \qquad |W_1| - |W_2| \leq |W_1 + W_2|$$

πράγμα το οποίο αποδεικνύει την αριστερή ανισότητα (1.1.9) εάν θεωρήσουμε ότι $|W_1| \geq |W_2|$. Σε αντίθετη περίπτωση, εναλλάσσουμε τα W_1 και W_2 στις παραπάνω σχέσεις και έχουμε ότι:

$$||W_1| - |W_2|| = -(|W_1| - |W_2|) \leq |W_1 + W_2|$$

Σημειωτέον ότι η σχέση (1.1.9) γενικεύεται άμεσα ως εξής:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

Ασκήσεις για την Ενότητα 1.1

1. Να εκφραστούν οι παρακάτω μιγαδικοί αριθμοί σε πολική εκθετική μορφή:

   (α) 1 (β) $-i$ (γ) $1+i$

   (δ) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (ε) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

2. Να γραφτεί καθεμία από τις παρακάτω εκφράσεις στη μορφή $a + bi$, όπου a και b πραγματικοί αριθμοί:

   (α) $e^{2+i\pi/2}$ (β) $\dfrac{1}{1+i}$ (γ) $(1+i)^3$ (δ) $|3+4i|$

   (ε) Θέτουμε εξ ορισμού $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2,$ και $e^z = e^x e^{iy}$.
   Να υπολογιστεί το $\cos(i\pi/4 + c),$ όπου c πραγματικός αριθμός.

3. Να βρεθούν οι ρίζες των παρακάτω εξισώσεων:

   (α) $z^3 = 4$ (β) $z^4 = -1$

   (γ) $(az+b)^3 = c,$ όπου $a, b, c > 0$ (δ) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$

4. Να αποδειχθούν οι παρακάτω σχέσεις:

   (α) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ (β) $|z - w| \leq |z| + |w|$ (γ) $z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}z$

   (δ) $\mathrm{Re}z \leq |z|$ (ε) $|w\bar{z} + \bar{w}z| \leq 2|wz|$ (στ) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

5. Οι μιγαδικοί αριθμοί αντιστοιχούν εν μέρει στα διανύσματα του διδιάστατου χώρου. Έστω ένας μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$ και ένα διάνυσμα $\mathbf{v} = a\hat{\mathbf{e}}_1 + b\hat{\mathbf{e}}_2$, όπου

$\hat{\mathbf{e}}_1$ και $\hat{\mathbf{e}}_2$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στην οριζόντια και στην κατακόρυφη διεύθυνση αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι οι κανόνες της πρόσθεσης $z_1 \pm z_2$ και $\mathbf{v}_1 \pm \mathbf{v}_2$ δίνουν ισοδύναμα αποτελέσματα· ομοίως και τα μέτρα $|z|^2, |\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. (Στην προκειμένη περίπτωση, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ είναι το σύνηθες διανυσματικό εσωτερικό γινόμενο.) Εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει γενική αντιστοιχία για τους κανόνες του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

1.2 Στοιχειώδεις συναρτήσεις και στερεογραφικές προβολές

1.2.1 Στοιχειώδεις συναρτήσεις

Ως πρόλογο στην έννοια της συνάρτησης θα παρουσιάσουμε μερικούς τυπικούς ορισμούς και κάποιες σχετικές έννοιες. Ένας κύκλος με κέντρο z_0 και ακτίνα r συμβολίζεται $|z - z_0| = r$. Μια **γειτονιά** ενός σημείου z_0 είναι το σύνολο των σημείων z για τα οποία ισχύει

$$|z - z_0| < \epsilon \tag{1.2.1}$$

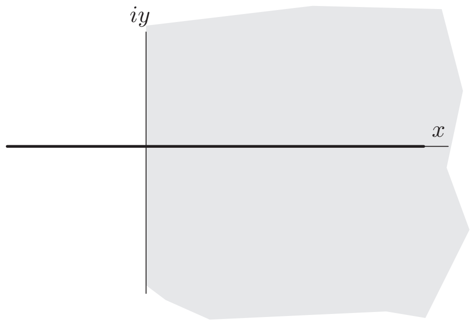
όπου ϵ είναι κάποιος (μικρός) θετικός αριθμός. Συνεπώς μια γειτονιά του σημείου z_0 αποτελείται από όλα τα σημεία που βρίσκονται μέσα στον κύκλο με ακτίνα ϵ, εκτός από το σύνορό του. Ένας δακτύλιος $r_1 < |z - z_0| < r_2$ έχει κέντρο το z_0, εσωτερική ακτίνα r_1 και εξωτερική ακτίνα r_2. Ένα σημείο z_0 ενός συνόλου σημείων $\mathcal{S}$ λέγεται **εσωτερικό σημείο** του $\mathcal{S}$ αν υπάρχει γειτονιά του z_0 που να εμπεριέχεται εξ ολοκλήρου στο $\mathcal{S}$. Το σύνολο $\mathcal{S}$ λέγεται **ανοιχτό σύνολο** αν όλα τα σημεία του $\mathcal{S}$ είναι εσωτερικά. Ένα σημείο z_0 λέγεται **συνοριακό σημείο** του $\mathcal{S}$ αν κάθε γειτονιά του $z = z_0$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του $\mathcal{S}$ και τουλάχιστον ένα σημείο εκτός του $\mathcal{S}$.

Ένα σύνολο που αποτελείται από όλα τα σημεία ενός ανοιχτού συνόλου και κανένα από τα συνοριακά του σημεία, ή μερικά από τα συνοριακά σημεία, ή όλα τα συνοριακά σημεία, ονομάζεται **περιοχή**. Μια ανοιχτή περιοχή χαρακτηρίζεται **φραγμένη** αν υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε όλα τα σημεία z της περιοχής να ικανοποιούν τη σχέση $|z| \leq M$, δηλαδή να βρίσκονται μέσα σε αυτόν τον κύκλο. Μια περιοχή λέγεται **κλειστή** αν περιέχει όλα τα συνοριακά της στοιχεία. Μια περιοχή που είναι και κλειστή και φραγμένη λέγεται **συμπαγής**. Συνεπώς η περιοχή $|z| \leq 1$ είναι συμπαγής, διότι είναι και κλειστή καί φραγμένη. Η περιοχή $|z| < 1$ είναι ανοιχτή και φραγμένη. Το ημιεπίπεδο $\operatorname{Re} z > 0$ (βλ. Σχήμα 1.2.1) είναι ανοιχτό και μη φραγμένο.

Έστω κάποια σημεία $z_1, z_2, \ldots, z_n$ στο επίπεδο. Τα $n - 1$ ευθύγραμμα τμήματα $\overline{z_1 z_2}$, $\overline{z_2 z_3}$, …, $\overline{z_{n-1} z_n}$, με αυτήν τη σειρά, σχηματίζουν μια τεθλασμένη γραμμή. Μια ανοιχτή περιοχή λέγεται **συνεκτική** αν δύο οποιαδήποτε σημεία της μπορούν να ενωθούν με μια τεθλασμένη γραμμή που να εμπεριέχεται στην περιοχή. (Υπάρχουν και πιο αναλυτικοί ορισμοί της συνεκτικότητας, αλλά ο απλός αυτός ορισμός αρκεί για τις ανάγκες της μελέτης μας.) Στο Σχήμα 1.2.2 φαίνεται μια ενδεικτική συνεκτική περιοχή.

Παράδειγμα μη συνεκτικής περιοχής είναι το σύνολο των σημείων που βρίσκονται μέσα στον κύκλο $|z| = 1$ και έξω από τον κύκλο $|z| = 2$: $\mathcal{S} = \{z : |z| < 1, |z| > 2\}$.

Μια συνεκτική ανοιχτή περιοχή ονομάζεται **χωρίο**. Για παράδειγμα, το σύνολο (βλ.



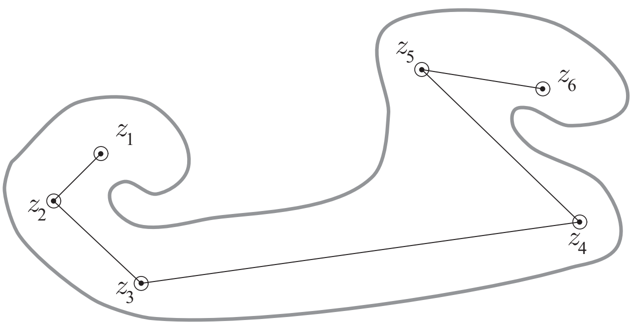
Σχήμα 1.2.1. Ημιεπίπεδο

Σχήμα 1.2.3)

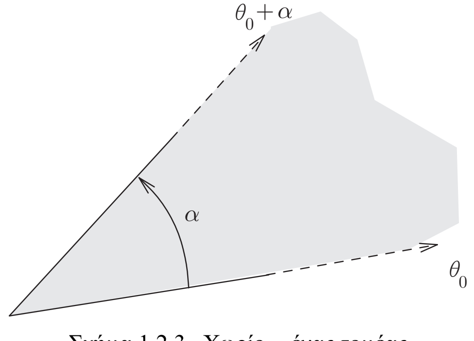
$$\mathcal{S} = \{z = re^{i\theta} : \theta_0 < \arg z < \theta_0 + \alpha\}$$

είναι ένα μη φραγμένο χωρίο.

Δεδομένου ότι ένα χωρίο είναι ανοιχτό σύνολο, δεν μπορεί να περιλαμβάνει κανένα συνοριακό του σημείο. Μια περιοχή θα συμβολίζεται με $\mathcal{R}$. Η κλειστή περιοχή που εμπεριέχει την $\mathcal{R}$ και όλα τα συνοριακά της σημεία συμβολίζεται μερικές φορές με $\overline{\mathcal{R}}$. Όταν η $\mathcal{R}$ είναι κλειστή, τότε $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}}$. Η έκφραση $z \in \mathcal{R}$ σημαίνει ότι το σημείο z εμπεριέχεται



Σχήμα 1.2.2. Συνεκτική περιοχή



Σχήμα 1.2.3. Χωρίο – ένας τομέας

στην $\mathcal{R}$. Ένα χωρίο συνήθως θα συμβολίζεται με $\mathcal{D}$.

Εάν σε κάθε $z \in \mathcal{R}$ αντιστοιχεί μονοσήμαντα ένας μιγαδικός αριθμός $w(z)$, τότε λέμε ότι η $w(z)$ είναι **συνάρτηση** της μιγαδικής μεταβλητής z, και γράφουμε

$$w = f(z) \tag{1.2.2}$$

για να δηλώσουμε τη συνάρτηση f. Συχνά, γράφουμε απλώς $w = w(z)$, ή και μόνο w. Η ολότητα των τιμών $f(z)$ που αντιστοιχούν στα σημεία $z \in \mathcal{R}$ αποτελεί το **πεδίο τιμών** της συνάρτησης $f(z)$. Στο πλαίσιο αυτό, το σύνολο $\mathcal{R}$ συχνά λέγεται και **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f. Συχνά το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης αποτελεί χωρίο, όπως αυτό ορίστηκε παραπάνω ως σύνολο σημείων, αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο.

Από τον παραπάνω ορισμό της συνάρτησης έπεται ότι μια συνάρτηση δεν μπορεί να είναι πλειότιμη. Σε κάθε σημείο $z \in \mathcal{R}$ δεν είναι δυνατόν να αντιστοιχούν περισσότερες από μία τιμές της $f(z)$. Στις Ενότητες 2.2 και 2.3 θα ασχοληθούμε λεπτομερώς με την έννοια της πλειοτιμίας και τις περιπλοκές της.

Η απλούστερη συνάρτηση είναι το **μονώνυμο**:

$$f(z) = z^n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.2.3}$$

Κάθε επόμενη δύναμη προκύπτει με πολλαπλασιασμό: $z^{m+1} = z^m z,\ m = 0, 1, 2, \dots$. Ένα **πολυώνυμο** ορίζεται ως γραμμικός συνδυασμός μονωνύμων

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \tag{1.2.4}$$

όπου οι a_j είναι μιγαδικοί αριθμοί (δηλ. $a_j \in \mathbb{C}$). Σημειωτέον ότι το πεδίο ορισμού της $P_n(z)$ είναι όλο το επίπεδο z, το οποίο συμβολίζεται απλώς $z \in \mathbb{C}$. Μια **ρητή** συνάρτηση είναι ο λόγος δύο πολυωνύμων $P_n(z)$ και $Q_m(z)$, όπου $Q_m(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j z^j$

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \tag{1.2.5}$$

και το πεδίο ορισμού της $R(z)$ είναι το επίπεδο z, *εκτός* από τα σημεία όπου $Q_m(z) = 0$. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $w = 1/(1+z^2)$ ορίζεται στο επίπεδο z εκτός από τα σημεία $z = \pm i$. Αυτό το σύνολο σημείων συμβολίζεται $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$.

Για έναν μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$ η μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$w = f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y) \tag{1.2.6}$$

όπου οι u και v ονομάζονται πραγματικό και φανταστικό μέρος της $f(z)$, αντίστοιχα, δηλ. $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$. Για παράδειγμα,

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

οπότε

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \qquad \text{και} \qquad v = 2xy.$$

Όπως και στην περίπτωση των πραγματικών μεταβλητών, έτσι και εδώ έχουμε τις τυπικές πράξεις σε συναρτήσεις. Για δύο συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$, ορίζουμε την πρόσθεση

$f(z) + g(z)$, τον πολλαπλασιασμό $f(z)g(z)$, και τη σύνθεση $f[g(z)]$ μιγαδικών συναρτήσεων.

Για να διευκολύνουμε τη μελέτη μας, ορίζουμε μερικές από τις πιο κοινές συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής –οι οποίες, όπως τα πολυώνυμα και οι ρητές συναρτήσεις, είναι ήδη γνωστές στον αναγνώστη.

Με αφετηρία την ιδιότητα των εκθετικών των πραγματικών μεταβλητών, $e^{a+b} = e^a e^b$, ορίζουμε την εκθετική συνάρτηση

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

Με βάση τον ορισμό του πολικού εκθετικού (Εξίσωση (1.1.6), Ενότητα 1.1),

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

βλέπουμε ότι

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{1.2.7}$$

Από την Εξίσωση (1.2.7) σε συνδυασμό με ορισμένες τυπικές τριγωνομετρικές ταυτότητες προκύπτουν οι ιδιότητες

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \qquad \text{και} \qquad (e^z)^n = e^{nz}, \qquad n = 1, 2 \ldots \tag{1.2.8}$$

Να σημειωθεί επίσης ότι

$$|e^z| = |e^x||\cos y + i \sin y| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x$$

και

$$\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}} = e^{x-iy} = e^x(\cos y - i \sin y)$$

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin z$ και $\cos z$ ορίζονται ως εξής:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{1.2.9}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{1.2.10}$$

Οι υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται κατά τον συνήθη τρόπο:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z} \tag{1.2.11}$$

Από τους παραπάνω ορισμούς έπονται όλες οι συνήθεις τριγωνομετρικές ιδιότητες όπως οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned} \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ \sin^2 z + \cos^2 z &= 1, \qquad \ldots \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Ανάλογα ορίζονται και οι υπερβολικές συναρτήσεις:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \tag{1.2.13}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{1.2.14}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \quad \mathrm{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \mathrm{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

Ομοίως συνάγονται και οι συνήθεις ταυτότητες όπως η παρακάτω:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \tag{1.2.15}$$

Από αυτούς τους ορισμούς βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις $\sinh z$ και $\sin z$ ($\cosh z$ και $\cos z$), ως συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής, σχετίζονται μεταξύ τους με τον εξής απλό τρόπο:

$$\begin{aligned} \sinh iz = i \sin z, \qquad \sin iz = i \sinh z \\ \cosh iz = \cos z, \qquad \cos iz = \cosh z \end{aligned} \tag{1.2.16}$$

Έχει γίνει πλέον σαφές ότι οι στοιχειώδεις συναρτήσεις που ορίστηκαν σε αυτήν την ενότητα αποτελούν άμεσες γενικεύσεις των συμβατικών συναρτήσεων που ήδη γνωρίζουμε από τις πραγματικές μεταβλητές. Η αναλογία μάλιστα είναι τόσο στενή που επιτρέπει έναν, εντελώς συνεπή με τα παραπάνω, εναλλακτικό και συστηματικό ορισμό συναρτήσεων, ο οποίος μπορεί να καλύψει μια πολύ ευρύτερη κλάση συναρτήσεων. Αυτό προϋποθέτει την εισαγωγή της έννοιας της **δυναμοσειράς**. Οι σειρές και οι ακολουθίες θα εξεταστούν εκτενέστερα στο Κεφάλαιο 3. Επειδή όμως ο αναγνώστης είναι ήδη εξοικειωμένος με τις δυναμοσειρές των πραγματικών μεταβλητών, θεωρούμε χρήσιμο να εισαγάγουμε την έννοια σε αυτό το σημείο.

Η δυναμοσειρά μιας συνάρτησης $f(z)$ γύρω από το σημείο $z = z_0$ ορίζεται ως εξής:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j (z - z_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j \tag{1.2.17}$$

όπου τα a_j, z_0 είναι σταθερές.

Ένα κρίσιμο ζήτημα είναι φυσικά η σύγκλιση. Χάριν απλότητας (και με έναυσμα τις πραγματικές μεταβλητές, αλλά χωρίς να δώσουμε την απόδειξη σε αυτό το σημείο), θεωρούμε ότι η Εξίσωση (1.2.17) συγκλίνει, με βάση το κριτήριο του λόγου, όταν

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z - z_0| < 1 \tag{1.2.18}$$

Συνεπώς συγκλίνει μέσα στον κύκλο $|z - z_0| = R$, όπου

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

όταν το όριο αυτό υπάρχει (βλ. επίσης Ενότητα 3.2). Εάν $R = \infty$, λέμε ότι η σειρά συγκλίνει για όλα τα πεπερασμένα z, ενώ εάν $R = 0$ λέμε ότι η σειρά συγκλίνει μόνο για $z = z_0$. Το R λέγεται **ακτίνα σύγκλισης**.

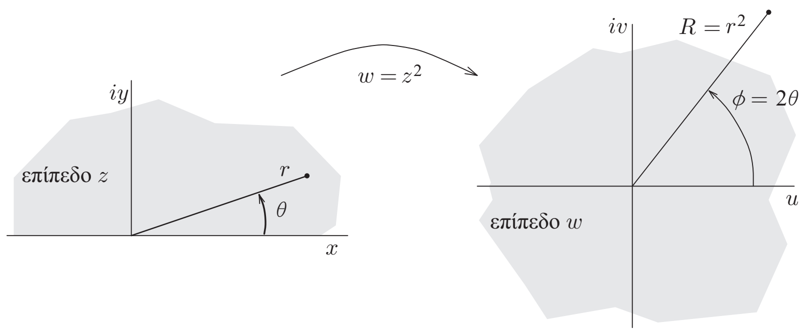
Οι στοιχειώδεις συναρτήσεις που εξετάστηκαν παραπάνω εκφράζονται με τη μορφή δυναμοσειράς ως εξής:

$$
\begin{gathered}
e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}, \qquad \sin z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!}, \qquad \cos z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!} \\
\sinh z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}, \qquad \cosh z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{(2j)!}
\end{gathered}
\tag{1.2.19}
$$

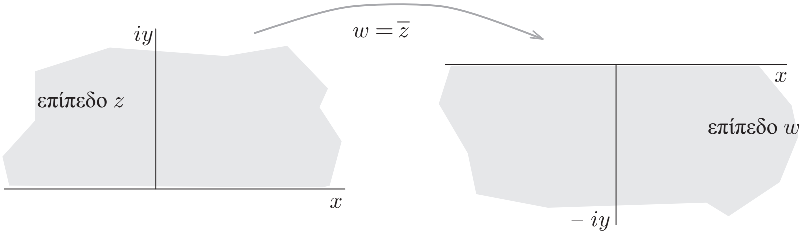
όπου $j! = j(j-1)(j-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ για $j \geq 1$, και $0! \equiv 1$. Σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου αυτές οι σειρές συγκλίνουν για κάθε πεπερασμένο z.

Οι μιγαδικές συναρτήσεις ανακύπτουν συχνά σε εφαρμογές. Για παράδειγμα, στη μελέτη της ευστάθειας φυσικών συστημάτων προκύπτουν εξισώσεις για μικρές αποκλίσεις από την κατάσταση ηρεμίας ή ισορροπίας. Οι λύσεις της διαταραγμένης εξίσωσης μπορούν συχνά να γραφτούν στη μορφή e^{zt}, όπου το t είναι πραγματικός αριθμός (π.χ. ο χρόνος) και ο z είναι μιγαδικός αριθμός που ικανοποιεί μια αλγεβρική εξίσωση (ή ένα πιο περίπλοκο υπερβατικό σύστημα). Λέμε ότι το σύστημα είναι ασταθές, αν υπάρχουν λύσεις με $\operatorname{Re} z > 0$ διότι $|e^{zt}| \to \infty$ για $t \to \infty$. Λέμε ότι το σύστημα είναι **οριακά ευσταθές**, αν δεν υπάρχουν τιμές του z για τις οποίες $\operatorname{Re} z > 0$, αλλά υπάρχουν κάποιες με $\operatorname{Re} z = 0$. (Η αντίστοιχη εκθετική λύση είναι φραγμένη για όλα τα t.) Ένα σύστημα είναι **ευσταθές** και **αποσβεννύμενο**, αν για όλες τις τιμές του z ισχύει ότι $\operatorname{Re} z < 0$, διότι $|e^{zt}| \to 0$ καθώς $t \to \infty$.

Μια συνάρτηση $w = f(z)$ μπορεί να θεωρηθεί ως **απεικόνιση**, ή μετασχηματισμός, των σημείων του επιπέδου z ($z = x + iy$) στα σημεία του επιπέδου w ($w = u + iv$). Στις πραγματικές μεταβλητές σε μία διάσταση, η έννοια αυτή ανάγεται στην κατανόηση του γραφήματος $y = f(x)$, δηλαδή, της απεικόνισης των σημείων x στα σημεία $y = f(x)$. Στις μιγαδικές μεταβλητές η κατάσταση είναι πιο δύσκολη λόγω του ότι έχουμε τέσσερεις διαστάσεις –και άρα δεν είναι εφικτή μια γραφική αναπαράσταση όπως στη μονοδιάσταση περίπτωση των πραγματικών αριθμών. Αντ' αυτού, θεωρούμε τα δύο μιγαδικά επίπεδα z και w ξεχωριστά, και εξετάζουμε πώς μετασχηματίζεται ή απεικονίζεται η περιοχή στο μιγαδικό επίπεδο z σε μία αντίστοιχη περιοχή, ή **εικόνα**, στο επίπεδο w. Ακολουθούν κάποια παραδείγματα.



Σχήμα 1.2.4. Η απεικόνιση $z \to w = z^2$



Σχήμα 1.2.5. Απεικόνιση συζυγίας

Παράδειγμα 1.2.1 Η συνάρτηση $w = z^2$ απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο z συμπεριλαμβανομένου του άξονα των πραγματικών αριθμών, $\operatorname{Im} z \geq 0$, σε ολόκληρο το επίπεδο w (βλ. Σχήμα 1.2.4). Αυτό γίνεται εμφανέστερο εάν χρησιμοποιήσουμε την πολική αναπαράσταση $z = re^{i\theta}$. Στο επίπεδο z, το θ βρίσκεται στο διάστημα $0 \leq \theta < \pi$, ενώ στο επίπεδο w, έχουμε $w = r^2 e^{2i\theta} = Re^{i\phi}$, $R = r^2$, $\phi = 2\theta$ οπότε το ϕ βρίσκεται στο διάστημα $0 \leq \phi < 2\pi$.

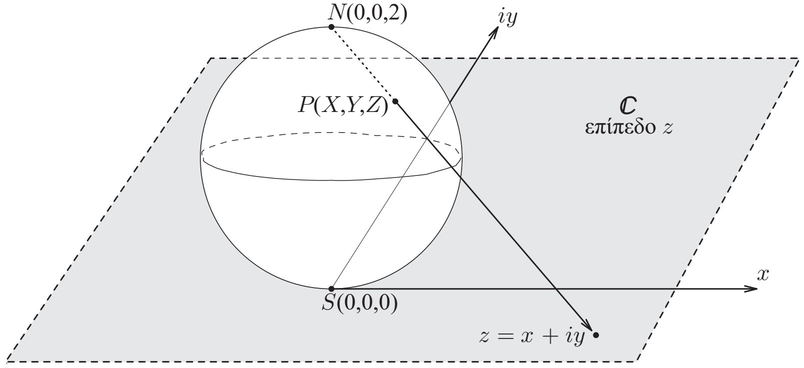
Παράδειγμα 1.2.2 Η συνάρτηση $w = \overline{z}$ απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο z, $\operatorname{Im} z > 0$, στο κάτω ημιεπίπεδο w (βλ. Σχήμα 1.2.5). Δηλαδή, για $z = x + iy$ και $y > 0$ έχουμε ότι $w = \overline{z} = x - iy$. Άρα $w = u + iv \Rightarrow u = x$, $v = -y$.

Η μελέτη και κατανόηση των μιγαδικών απεικονίσεων είναι πολύ σημαντική, και όπως θα δούμε υπάρχουν πολλές σχετικές εφαρμογές. Η έννοια της απεικόνισης θα εξεταστεί με μεγαλύτερη προσοχή στις επόμενες ενότητες και στα κεφάλαια που ακολουθούν, οπότε αυτή τη στιγμή δεν θα υπεισέλθουμε σε περισσότερες λεπτομέρειες.

Συχνά είναι χρήσιμο να προστίθεται το **επ' άπειρον σημείο** (που συνήθως συμβολίζεται με ∞ ή z_∞) στο, μέχρι στιγμής ανοιχτό, μιγαδικό επίπεδό μας. Σε αντίθεση με ένα πεπερασμένο σημείο z_0, του οποίου η γειτονιά ορίζεται από την Εξίσωση (1.2.1), η γειτονιά του z_∞ ορίζεται από εκείνα τα σημεία που ικανοποιούν τη σχέση $|z| > 1/\epsilon$ για όλα τα (επαρκώς μικρά) $\epsilon > 0$. Ένας βολικός τρόπος για να οριστεί το επ' άπειρον σημείο είναι να θέσουμε $z = 1/t$ και κατόπιν να πούμε ότι η τιμή $t = 0$ αντιστοιχεί στο σημείο z_∞. Μια μη φραγμένη περιοχή $\mathcal{R}$ περιέχει το σημείο z_∞. Ομοίως, λέμε ότι μια συνάρτηση παίρνει τιμές στο άπειρο αν ορίζεται σε μια γειτονιά του z_∞. Το μιγαδικό επίπεδο όπου συμπεριλαμβάνεται το σημείο z_∞ ονομάζεται **επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο**.

1.2.2 Στερεογραφική προβολή

Έστω μια μοναδιαία σφαίρα η οποία κείται πάνω στο μιγαδικό επίπεδο με τον νότιο πόλο της στην αρχή των αξόνων του επιπέδου z (βλ. Σχήμα 1.2.6). Σε αυτήν την υποενότητα, θα δούμε πώς μπορεί να απεικονιστεί το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο στην επιφάνεια μιας σφαίρας της οποίας ο νότιος πόλος αντιστοιχεί στην αρχή των αξόνων και ο βόρειος πόλος στο σημείο z_∞. Όλα τα άλλα σημεία του μιγαδικού επιπέδου μπορούν να απεικονιστούν ένα προς ένα σε σημεία της επιφάνειας της σφαίρας μέσω της ακόλουθης κατασκευής: Ενώνουμε το σημείο z του επιπέδου με τον βόρειο πόλο μέσω μιας ευθείας γραμμής. Αυτή η γραμμή τέμνει τη σφαίρα στο σημείο P. Με αυτόν τον τρόπο, κάθε σημείο $z (= x + iy)$ του μιγαδικού επιπέδου αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε ένα σημείο P



Σχήμα 1.2.6. Στερεογραφική προβολή

στην επιφάνεια της σφαίρας. Αυτή η αντιστοίχιση λέγεται **στερεογραφική προβολή** και αναπαρίσταται γραφικά στο Σχήμα 1.2.6. Το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο λέγεται και **συμπεπηγμένο** (κλειστό) μιγαδικό επίπεδο. Αυτή η θεώρηση του μιγαδικού επιπέδου συχνά αποδεικνύεται χρήσιμη, και η γνώση της κατασκευής της στερεογραφικής προβολής είναι πολύτιμη σε κάποιες προχωρημένες μεθόδους επίλυσης.

Πιο συγκεκριμένα, το σημείο $P : (X, Y, Z)$ της σφαίρας το οποίο αντιστοιχίζεται με το σημείο $z = x + iy$ του μιγαδικού επιπέδου είναι το σημείο (X, Y, Z) στο οποίο τέμνει τη σφαίρα η γραμμή που ενώνει τον βόρειο πόλο της, $N : (0, 0, 2)$, με το σημείο $z = x + iy$ στο επίπεδο. Η κατασκευή έχει ως εξής. Θεωρούμε τρία σημεία στο τριδιάστατο σχήμα:

$N = (0, 0, 2)$: βόρειος πόλος
$P = (X, Y, Z)$: σημείο της σφαίρας
$C = (x, y, 0)$: σημείο του μιγαδικού επιπέδου

Τα σημεία αυτά πρέπει να βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία γραμμή, συνεπώς η διαφορά των σημείων $P - N$ πρέπει να είναι ένα πραγματικό βαθμωτό πολλαπλάσιο της διαφοράς $C - N$, δηλαδή

$$(X, Y, Z - 2) = s(x, y, -2) \tag{1.2.20}$$

όπου ο s είναι πραγματικός αριθμός ($s \neq 0$). Η εξίσωση της σφαίρας είναι

$$X^2 + Y^2 + (Z - 1)^2 = 1 \tag{1.2.21}$$

Από την Εξίσωση (1.2.20) συνεπάγεται ότι

$$X = sx, \qquad Y = sy, \qquad Z = 2 - 2s \tag{1.2.22}$$

Αν εισαγάγουμε τις τιμές (1.2.22) στην Εξίσωση (1.2.21) καταλήγουμε μετά από πράξεις στη σχέση

$$s^2(x^2 + y^2 + 4) - 4s = 0 \tag{1.2.23}$$

Η μοναδική μή μηδενική λύση αυτής της εξίσωσης είναι η

$$s = \frac{4}{|z|^2 + 4} \tag{1.2.24}$$

όπου $|z|^2 = x^2 + y^2$. Συνεπώς για κάθε σημείο $z = x + iy$ στο επίπεδο, υπάρχει ένα μοναδικό αντίστοιχό του στη σφαίρα:

$$X = \frac{4x}{|z|^2 + 4}, \qquad Y = \frac{4y}{|z|^2 + 4}, \qquad Z = \frac{2|z|^2}{|z|^2 + 4} \tag{1.2.25}$$

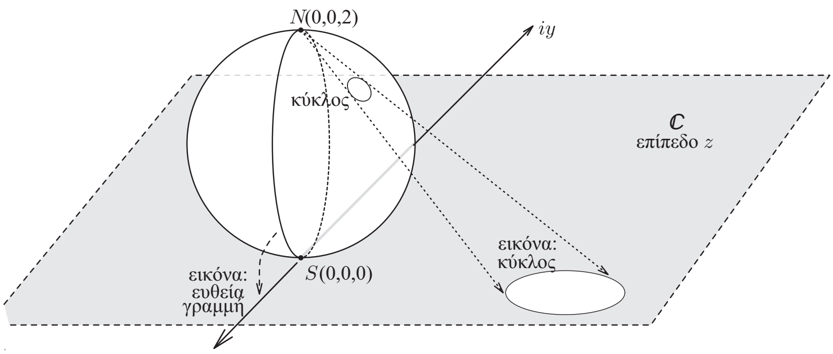
Όπως βλέπουμε, υπό αυτήν την απεικόνιση η αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου, $z = 0$, αντιστοιχεί στον νότιο πόλο της σφαίρας $(0, 0, 0)$, ενώ όλα τα σημεία στο $|z| = \infty$ αντιστοιχούν στον βόρειο πόλο $(0, 0, 2)$. (Το τελευταίο γίνεται αντιληπτό από το όριο $|z| \to \infty$ με $x = |z| \cos\theta$ και $y = |z| \sin\theta$.) Από την άλλη πλευρά, εάν δοθεί ένα σημείο $P = (X, Y, Z)$ μπορούμε να βρούμε τη μοναδική του εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο. Συγκεκριμένα, από την Εξίσωση (1.2.22) έχουμε

$$s = \frac{2 - Z}{2} \tag{1.2.26}$$

και

$$x = \frac{2X}{2 - Z}, \qquad y = \frac{2Y}{2 - Z} \tag{1.2.27}$$

Η στερεογραφική προβολή απεικονίζει κάθε γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού επιπέδου σε έναν αντίστοιχο γεωμετρικό τόπο πάνω στη σφαίρα, και αντίστροφα. Για παράδειγμα, η εικόνα ενός οποιουδήποτε κύκλου στο επίπεδο είναι ένας κύκλος πάνω στη σφαίρα ο οποίος δεν διέρχεται από τον βόρειο πόλο. Παρομοίως, μια ευθεία αντιστοιχεί σε έναν κύκλο ο οποίος διέρχεται από τον βόρειο πόλο (βλ. Σχήμα 1.2.7). Παρατηρήστε εν προκειμένω ότι ένας κύκλος πάνω στη σφαίρα αντιπροσωπεύει τον γεωμετρικό τόπο που εκφράζει την τομή της σφαίρας με κάποιο επίπεδο: $AX + BY + CZ = D$, όπου τα A, B, C, D είναι σταθερές. Συνεπώς, από γεωμετρικής σκοπιάς, οι εικόνες ευθειών και κύκλων πάνω στη σφαίρα δεν διαφέρουν ουσιαστικά μεταξύ τους. Επιπλέον, οι εικόνες πάνω στη σφαίρα δύο μη παράλληλων ευθειών του επιπέδου τέμνονται σε *δύο* σημεία της σφαίρας –ένα εκ των οποίων είναι το επ' άπειρον σημείο. Σε αυτό το πλαίσιο, οι *παράλ-*



Σχήμα 1.2.7. Κύκλοι και ευθείες σε στερεογραφική προβολή

ληλες ευθείες είναι κύκλοι που εφάπτονται μεταξύ τους στο επ' άπειρον σημείο (βόρειος πόλος). Πάνω στη σφαίρα δεν ισχύει πια η ευκλείδεια γεωμετρία.

Ασκήσεις για την Ενότητα 1.2

1. Να σχεδιαστούν οι περιοχές που ορίζουν οι παρακάτω ανισότητες. Να προσδιοριστεί εάν η κάθε περιοχή είναι ανοιχτή, κλειστή, φραγμένη ή συμπαγής.

   (α) $|z| \leq 1$ (β) $|2z + 1 + i| < 4$ (γ) $\mathrm{Re}\, z \geq 4$

   (δ) $|z| \leq |z + 1|$ (ε) $0 < |2z - 1| \leq 2$

2. Να σχεδιαστούν οι παρακάτω περιοχές. Για καθεμία από αυτές να προσδιοριστεί εάν είναι συνεκτική, και αν δεν είναι κλειστή να βρεθεί η θήκη της.

   (α) $0 < \arg z \leq \pi$ (β) $0 \leq \arg z < 2\pi$

   (γ) $\mathrm{Re}\, z > 0$ και $\mathrm{Im}\, z > 0$

   (δ) $\mathrm{Re}\,(z - z_0) > 0$ και $\mathrm{Re}\,(z - z_1) < 0$ για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_0, z_1

   (ε) $|z| < \frac{1}{2}$ και $|2z - 4| \leq 2$

3. Να χρησιμοποιηθεί ο τύπος του Euler για το εκθετικό καθώς και τα γνωστά αναπτύγματα σε σειρά των πραγματικών συναρτήσεων e^x, $\sin y$, και $\cos y$, για να δειχθεί ότι

   $$e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$$

   Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το παρακάτω ανάπτυγμα:

   $$(x + iy)^k = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} x^j (iy)^{k-j}$$

4. Να χρησιμοποιηθεί το ακόλουθο ανάπτυγμα σε σειρά

   $$e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}, \quad |z| < \infty$$

   για να προσδιοριστούν τα αναπτύγματα σε σειρά των παρακάτω συναρτήσεων:

   (α) $\sin z$ (β) $\cosh z$

   Να χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα αυτά για να βρεθεί πού συγκλίνουν οι δυναμοσειρές για τις $\sin^2 z$ και $\mathrm{sech} z$. Τι ισχύει για την $\tan z$;

5. Προσδιορίστε, χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε μέθοδο, τα αναπτύγματα σε σειρά των παρακάτω συναρτήσεων:

   (α) $\dfrac{\sin z}{z}$ (β) $\dfrac{\cosh z - 1}{z^2}$ (γ) $\dfrac{e^z - 1 - z}{z}$

6. Για $z_1 = x_1$ και $z_2 = x_2$, όπου x_1, x_2 πραγματικοί αριθμοί, να αποδειχθούν, μέσω της σχέσης

$$e^{i(x_1+x_2)} = e^{ix_1}e^{ix_2},$$

οι γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$
$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$$

από τις οποίες έπεται ότι

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

7. Να εξεταστούν οι παρακάτω μετασχηματισμοί (απεικονίσεις) του επιπέδου z στο επίπεδο w· εδώ το z είναι ολόκληρο το πεπερασμένο μιγαδικό επίπεδο.

(α) $w = z^3$ (β) $w = 1/z$

8. Έστω ο μετασχηματισμός

$$w = z + 1/z \qquad z = x + iy \qquad w = u + iv$$

Να δειχθεί ότι η εικόνα των σημείων του άνω ημιεπιπέδου z ($y > 0$) που βρίσκονται έξω από τον κύκλο $|z| = 1$ αντιστοιχεί σε ολόκληρο το άνω ημιεπίπεδο $v > 0$.

9. Έστω ο παρακάτω μετασχηματισμός

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad \Delta = ad - bc \neq 0$$

(α) Να δειχθεί ότι η απεικόνιση μπορεί να αντιστραφεί, δηλαδή μπορεί να βρεθεί ένα μοναδικό z ως (μονότιμη) συνάρτηση του w παντού.
(β) Να επαληθευθεί ότι η απεικόνιση μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα τριών διαδοχικών απεικονίσεων:

$$z' = cz + d, \qquad z'' = 1/z', \qquad w = -\frac{\Delta}{c}z'' + \frac{a}{c}$$

όταν $c \neq 0$, και έχει τη μορφή

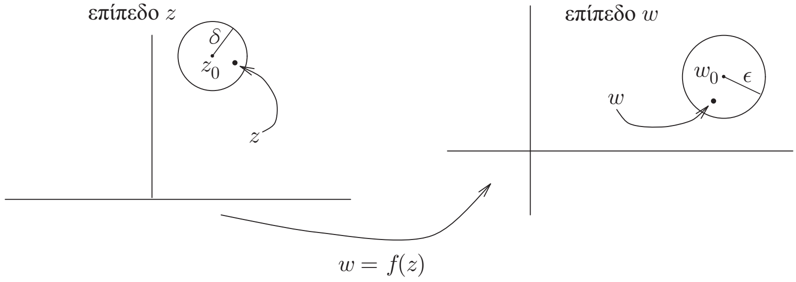
$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

για $c = 0$.

Τα παρακάτω προβλήματα αφορούν την υποενότητα περί στερεογραφικής προβολής.

10. Σε ποιες καμπύλες πάνω στη σφαίρα αντιστοιχούν οι ευθείες $\mathrm{Re}\, z = x = 0$ και $\mathrm{Im}\, z = y = 0$;

11. Να προσδιοριστούν οι καμπύλες πάνω στη σφαίρα στις οποίες αντιστοιχούν οποιεσδήποτε ευθείες του επιπέδου z.



Σχήμα 1.3.1. Απεικόνιση μιας γειτονιάς

12. Να δειχθεί ότι ένας κύκλος στο επίπεδο z αντιστοιχεί σε έναν κύκλο πάνω στη σφαίρα.(Ανατρέξτε στο σχόλιο μετά από την αναφορά στο Σχήμα 1.2.7 στην Ενότητα 1.2.2.)

1.3 Όρια, συνέχεια και μιγαδική παραγώγιση

Οι έννοιες του ορίου και της συνέχειας στις μιγαδικές μεταβλητές είναι παρόμοιες με αυτές στις πραγματικές μεταβλητές. Ως εκ τούτου, η μελέτη μας μπορεί να θεωρηθεί ως σύντομη ανασκόπηση πολλών ήδη γνωστών εννοιών. Έστω μια συνάρτηση $w = f(z)$ η οποία ορίζεται σε όλα τα σημεία κάποιας γειτονιάς του $z = z_0$, εκτός ίσως από το ίδιο το z_0. Λέμε ότι το όριο της $f(z)$ είναι το w_0, αν η $f(z)$ τείνει στο w_0 καθώς το z τείνει στο z_0 (τα z_0, w_0 είναι πεπερασμένα). Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως εξής:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \tag{1.3.1}$$

αν για κάθε (επαρκώς μικρό) $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(z) - w_0| < \epsilon \qquad \text{όταν} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta \tag{1.3.2}$$

όπου η απόλυτη τιμή έχει οριστεί στην Ενότητα 1.1 (βλ. π.χ. Εξισώσεις 1.1.4 και 1.1.5α).

Ο ορισμός αυτός είναι σαφής όταν το z_0 είναι εσωτερικό σημείο μιας περιοχής $\mathcal{R}$ στην οποία ορίζεται η $f(z)$. Αν το z_0 είναι συνοριακό σημείο της $\mathcal{R}$, τότε απαιτούμε η Εξίσωση (1.3.2) να ισχύει μόνο για τα σημεία $z \in \mathcal{R}$.

Οι έννοιες αυτές αποσαφηνίζονται γραφικά στο Σχήμα 1.3.1. Υπό την απεικόνιση $w = f(z)$, όλα τα σημεία στο εσωτερικό του κύκλου $|z - z_0| = \delta$ εξαιρουμένου του z_0 απεικονίζονται σε σημεία στο εσωτερικό του κύκλου $|w - w_0| = \epsilon$. Το όριο υπάρχει μόνο όταν το z τείνει στο z_0 (δηλ. $z \to z_0$) κατά *αυθαίρετη κατεύθυνση*· όταν συμβαίνει αυτό, έπεται ότι $w \to w_0$.

Αυτός είναι ο τυπικός ορισμός του ορίου. Ακολουθούν κάποια παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.3.1 Να δειχθεί ότι

$$\lim_{z \to i} 2\left(\frac{z^2 + iz + 2}{z - i}\right) \;=\; 6i. \tag{1.3.3}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι για δεδομένο $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left|2\left(\frac{z^2+iz+2}{z-i}\right)-6i\right| = \left|2\left(\frac{(z-i)(z+2i)}{(z-i)}\right)-6i\right| < \epsilon \tag{1.3.4}$$

όταν

$$0 < |z-i| < \delta \tag{1.3.5}$$

Αφού $z \neq i$, από την ανισότητα (1.3.4) έχουμε ότι $2|z-i| < \epsilon$. Συνεπώς αν $\delta = \epsilon/2$, η Εξίσωση (1.3.5) εξασφαλίζει ότι ικανοποιείται η Εξίσωση (1.3.4), οπότε η Εξίσωση (1.3.3) έχει αποδειχθεί.

Αυτός ο ορισμός του ορίου μπορεί επίσης να εφαρμοστεί στο επ' άπειρον σημείο $z = \infty$. Λέμε ότι

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0 \tag{1.3.6}$$

(όπου w_0 πεπερασμένο) αν για κάθε (επαρκώς μικρό) $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(z)-w_0| < \epsilon \qquad \text{όταν} \qquad |z| > \frac{1}{\delta} \tag{1.3.7}$$

Σχετικά με τα όρια, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες. (Η απόδειξη αποτελεί μια καλή άσκηση πάνω στον ορισμό του ορίου και ακολουθεί την αντίστοιχη απόδειξη για τις πραγματικές μεταβλητές.) Εάν για $z \in \mathcal{R}$ έχουμε δύο συναρτήσεις $w = f(z)$ και $s = g(z)$ τέτοιες ώστε

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0, \qquad \lim_{z\to z_0} g(z) = s_0$$

τότε

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)+g(z)) = w_0 + s_0$$
$$\lim_{z\to z_0}(f(z)g(z)) = w_0 s_0$$

και

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_0}{s_0} \qquad (s_0 \neq 0)$$

Παρόμοια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν και για αθροίσματα και γινόμενα πεπερασμένου αριθμού συναρτήσεων. Όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 1.2, το σημείο $z = z_\infty = \infty$ αντιμετωπίζεται συχνά μέσω του μετασχηματισμού

$$t = \frac{1}{z}$$

Η γειτονιά του $z = z_\infty$ αντιστοιχεί στη γειτονιά του $t = 0$. Συνεπώς, η συνάρτηση $f(z) = 1/z^2$ κοντά στο $z = z_\infty$ συμπεριφέρεται όπως η $f(1/t) = t^2$ κοντά στο μηδέν, δηλαδή, $t^2 \to 0$ καθώς $t \to 0$, ή $1/z^2 \to 0$ καθώς $z \to \infty$.

Κατ' αναλογία με την πραγματική ανάλυση, μια συνάρτηση $f(z)$ λέγεται **συνεχής** στο $z = z_0$ εάν

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \tag{1.3.8}$$

(όπου $z_0, f(z_0)$ πεπερασμένα). Η Εξίσωση (1.3.8) συνεπάγεται ότι η $f(z)$ υπάρχει σε μια γειτονιά του $z = z_0$ και ότι το όριο της $f(z)$, καθώς το z τείνει στο z_0, είναι το ίδιο το $f(z_0)$. Στο πλαίσιο του συμβολισμού ϵ, δ, για δεδομένο $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ όταν $|z - z_0| < \delta$. Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να διαπιστωθεί η έννοια της συνέχειας στο άπειρο. Συγκεκριμένα, αν $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_\infty$, και $f(\infty) = w_\infty$, τότε ο ορισμός της συνέχειας στο άπειρο, $\lim_{z\to\infty} f(z) = f(\infty)$, έχει ως εξής: Για δεδομένο $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(z) - w_\infty| < \epsilon$ όταν $|z| > 1/\delta$.

Μέσω των θεωρημάτων για τα όρια αθροισμάτων και γινομένων συναρτήσεων μπορεί να αποδειχθεί ότι τα αθροίσματα και τα γινόμενα συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχή. Θα πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι αφού $|f(z) - f(z_0)| = |\overline{f}(z) - \overline{f}(z_0)|$, η συνέχεια της $f(z)$ στο z_0 συνεπάγεται και τη συνέχεια της μιγαδικής συζυγούς $\overline{f}(z)$ στο $z = z_0$. (Θυμηθείτε τον ορισμό του μιγαδικού συζυγούς αριθμού, Εξίσωση (1.1.7).) Έτσι αν η $f(z)$ είναι συνεχής στο $z = z_0$, τότε οι

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re} f(z) &= (f(z) + \overline{f}(z))/2 \\
\operatorname{Im} f(z) &= (f(z) - \overline{f}(z))/2i \\
\text{και} \qquad |f(z)|^2 &= (f(z)\overline{f}(z))
\end{aligned}
$$

είναι επίσης συνεχείς στο $z = z_0$.

Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f(z)$ είναι **συνεχής σε μια περιοχή** εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο της περιοχής. Συνήθως όταν η περιοχή είναι σαφής από τα συμφραζόμενα λέμε απλώς ότι η $f(z)$ είναι συνεχής. Η συνέχεια σε μια περιοχή $\mathcal{R}$ γενικά προϋποθέτει ότι $\delta = \delta(\epsilon, z_0)$, δηλαδή, το δ εξαρτάται και από το ϵ και από το σημείο $z_0 \in \mathcal{R}$. Αν $\delta = \delta(\epsilon)$, δηλαδή το δ δεν εξαρτάται από το σημείο $z = z_0$, λέμε ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι **ομοιόμορφα συνεχής** σε μια περιοχή $\mathcal{R}$.

Όπως και στην πραγματική ανάλυση, έτσι και εδώ, μια συνάρτηση που είναι συνεχής σε μια συμπαγή (κλειστή και φραγμένη) περιοχή $\mathcal{R}$, είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε $|f(z)| < C$. (Οι αποδείξεις αυτών των προτάσεων προκύπτουν από τις αντίστοιχες προτάσεις της πραγματικής ανάλυσης.) Επιπλέον, σε μια συμπαγή περιοχή, το μέτρο $|f(z)|$ παίρνει και τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του στην $\mathcal{R}$. Αυτό έπεται από τη συνέχεια της πραγματικής συνάρτησης $|f(z)|$.

Παράδειγμα 1.3.2 Να δειχθεί ότι η συνέχεια του πραγματικού και του φανταστικού μέρους μιας μιγαδικής συνάρτησης $f(z)$ συνεπάγεται ότι η $f(z)$ είναι συνεχής.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} f(z) &= \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} (u(x, y) + iv(x, y)) \\
&= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) = f(z_0)
\end{aligned}
$$

οπότε η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. Η συγκεκριμένη απόδειξη καταδεικνύει επίσης ότι μπορούμε να εξαγάγουμε πολλά αποτελέσματα αυτής της ενότητας μέσω της πραγματικής ανάλυσης.

Αντίστροφα, έχουμε

$$|u(x,y) - u(x_0,y_0)| \leq |f(z) - f(z_0)|$$
$$|v(x,y) - v(x_0,y_0)| \leq |f(z) - f(z_0)|$$

(διότι $|f|^2 = |u|^2 + |v|^2$), που σημαίνει ότι η συνέχεια μιας συνάρτησης $f(z)$ συνεπάγεται τη συνέχεια του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της $f(z)$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι, για δεδομένο $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ όταν $|z - z_0| < \delta$ (και από την παρατήρηση ότι $|x - x_0| < |z - z_0| < \delta$, $|y - y_0| < |z - z_0| < \delta$).

Έστω ότι μια συνάρτηση $f(z)$ ορίζεται σε κάποια περιοχή $\mathcal{R}$ που περιέχει τη γειτονιά ενός σημείου z_0. Η **παράγωγος** της $f(z)$ στο $z = z_0$, που συμβολίζεται με $f'(z_0)$ ή $\frac{df}{dz}(z_0)$, ορίζεται ως εξής:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \right) \tag{1.3.9}$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο αυτό υπάρχει. Λέμε επίσης ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο z_0.

Εναλλακτικά, εάν θέσουμε $\Delta z = z - z_0$, η Εξίσωση (1.3.9) γράφεται και με την εξής τυπική μορφή:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) \tag{1.3.10}$$

Όταν η παράγωγος $f'(z_0)$ υπάρχει για κάθε σημείο $z_0 \in \mathcal{R}$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι παραγωγίσιμη στην $\mathcal{R}$, ή απλώς παραγωγίσιμη εάν η $\mathcal{R}$ είναι σαφής από τα συμφραζόμενα. Όταν η $f'(z_0)$ υπάρχει, τότε η $f(z)$ είναι συνεχής στο $z = z_0$. Αυτό προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) &= \lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \\ &= f'(z_0) \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = 0 \end{aligned}$$

Μια συνεχής συνάρτηση δεν είναι απαραίτητα παραγωγίσιμη. Αποδεικνύεται μάλιστα ότι οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις έχουν πολλά ιδιαίτερα χαρακτηριστικά.

Από την άλλη πλευρά, καθώς τώρα έχουμε να κάνουμε με μιγαδικές συναρτήσεις, που έχουν διδιάστατο χαρακτήρα, ενδέχεται να προκύψουν νέα προβλήματα και περιπλοκές που δεν υπήρχαν στην περίπτωση των συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής. Ακολουθεί ένα ενδεικτικό παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \overline{z} \tag{1.3.11}$$

Παρ' όλο που όπως είδαμε προηγουμένως αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής, θα δείξουμε ότι δεν έχει παράγωγο. Έστω το πηλίκο διαφορών:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{(z_0 + \Delta z)} - \overline{z_0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \equiv q_0 \qquad (1.3.12)$$

Το όριο αυτό δεν υπάρχει, διότι το q_0 δεν ορίζεται μονοσήμαντα, αλλά εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο το Δz προσεγγίζει το μηδέν. Θέτοντας $\Delta z = re^{i\theta}$, έχουμε ότι $q_0 = \lim_{\Delta z \to 0} e^{-2i\theta}$. Άρα αν $\Delta z \to 0$ κατά μήκος του θετικού ημιάξονα των πραγματικών αριθμών ($\theta = 0$), τότε $q_0 = 1$. Αν $\Delta z \to 0$ κατά μήκος του θετικού ημιάξονα των φανταστικών αριθμών, τότε $q_0 = -1$ (διότι $\theta = \pi/2, e^{-2i\theta} = -1$), κ.λπ. Συνεπώς καταλήγουμε στο απροσδόκητο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση $f(z) = \overline{z}$ δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη (δηλαδή, για κανένα $z = z_0$) παρ' όλο που είναι παντού συνεχής! Μάλιστα, όπως θα δούμε αυτό ισχύει γενικά για τις μιγαδικές συναρτήσεις εκτός αν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας τέτοιας συνάρτησης ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες συμβατότητας (βλ. Ενότητα 2.1). Οι παραγωγίσιμες μιγαδικές συναρτήσεις, οι οποίες λέγονται και **αναλυτικές συναρτήσεις**, είναι ιδιαίτερες και σημαντικές.

Παρά το γεγονός ότι ο τύπος για την παράγωγο μιας μιγαδικής συνάρτησης $f(z)$ έχει ακριβώς την ίδια μορφή με τον τύπο για την παράγωγο μιας πραγματικής συνάρτησης, θα πρέπει να τονιστεί ότι η παράγωγος $f'(z)$ προκύπτει από ένα διδιάστατο όριο ($z = x+iy$ ή $z = re^{i\theta}$). Άρα για να υπάρχει η παράγωγος $f'(z)$ θα πρέπει το σχετικό όριο να υπάρχει ανεξαρτήτως της κατεύθυνσης από την οποία το z προσεγγίζει το σημείο ορίου z_0. Για μια συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής έχουμε μόνο δύο κατευθύνσεις: $x < x_0$ και $x > x_0$.

Αν οι f και g έχουν παραγώγους, τότε από τις αντίστοιχες αποδείξεις για τις συναρτήσεις πραγματικών μεταβλητών έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&(f+g)' = f' + g' \\
&(fg)' = f'g + fg' \\
&\left(\frac{f}{g}\right)' = (f'g - fg')/g^2 \qquad (g \neq 0)
\end{aligned}$$

και αν οι $f'(g(z))$ και $g'(z)$ υπάρχουν, τότε

$$[f(g(z))]' = f'(g(z))g'(z)$$

Για την παραγώγιση πολυωνύμων, χρειαζόμαστε την παράγωγο της στοιχειώδους συνάρτησης $f(z) = z^n$, όπου n θετικός ακέραιος

$$\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1} \qquad (1.3.13)$$

Αυτό προκύπτει ως εξής:

$$\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1} + a_1 z^{n-2}\Delta z + a_2 z^{n-3}\Delta z^2 + \ldots + \Delta z^n \to nz^{n-1}$$

για $\Delta z \to 0$, όπου $a_1, a_2, \ldots$, είναι οι κατάλληλοι διωνυμικοί συντελεστές του $(a+b)^n$.

Από το παραπάνω αποτέλεσμα έπονται τα πορίσματα

$$\frac{d}{dz}(c) = 0, \qquad c = \text{σταθερά} \tag{1.3.15α}$$

$$\frac{d}{dz}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + m a_m z^{m-1} \tag{1.3.15β}$$

Επιπλέον, όσον αφορά τα αναπτύγματα σε δυναμοσειρά που εξετάσαμε νωρίτερα, έχουμε ότι

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{1.3.15}$$

εντός της ακτίνας σύγκλισης της σειράς.

Να σημειωθεί επίσης ότι οι παράγωγοι των συνηθισμένων στοιχειωδών συναρτήσεων συμπεριφέρονται όπως και στις πραγματικές μεταβλητές. Συγκεκριμένα

$$\begin{gathered} \frac{d}{dz}e^z = e^z, \qquad \frac{d}{dz}\sin z = \cos z, \qquad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z \\ \frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z, \qquad \frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z \end{gathered} \tag{1.3.16}$$

κ.λπ. Οι αποδείξεις προκύπτουν από τους θεμελιώδεις ορισμούς. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}e^z &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^{z+\Delta z} - e^z}{\Delta z} \\ &= e^z \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{e^{\Delta z} - 1}{\Delta z}\right) = e^z \end{aligned} \tag{1.3.17}$$

όπου παρατηρούμε ότι

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^{\Delta z} - 1}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(\frac{(e^{\Delta x}\cos \Delta y - 1) + i e^{\Delta x} \sin \Delta y}{(\Delta x + i\Delta y)}\right) = 1 \tag{1.3.18}$$

Μπορεί κανείς να γράψει την Εξίσωση (1.3.18) σε μορφή πραγματικού/φανταστικού μέρους και να χρησιμοποιήσει πολικές συντεταγμένες για τα Δx, Δy. Ο υπολογισμός αυτού του ορίου εξετάζεται και στις ασκήσεις αυτής της ενότητας. Παρακάτω θα αποδείξουμε τον τύπο της δυναμοσειράς για το e^z (βλ. Εξίσωση (1.2.19),) από τον οποίο έπεται κατευθείαν η Εξίσωση (1.3.18) (αφού $e^z = 1 + z + z^2/2 + \cdots$) χωρίς να χρειάζεται το διπλό όριο. Επίσης οι άλλοι τύποι στην Εξίσωση (1.3.16) μπορούν να συναχθούν και μέσω των Εξισώσεων (1.2.9), (1.2.10), (1.2.13), (1.2.14).

1.3.1 Στοιχειώδεις εφαρμογές στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

Η μελέτη των διαφορικών εξισώσεων αποτελεί σημαντική εφαρμογή των μιγαδικών μεταβλητών. Οι διαφορικές εξισώσεις στο μιγαδικό επίπεδο θα εξεταστούν σχετικά λεπτομερώς παρακάτω. Ωστόσο, ήδη μπορεί κανείς να αντιληφθεί τη χρησιμότητα των εννοιών που έχουν παρουσιαστεί μέχρι τώρα. Αν και πολλοί αναγνώστες πιθανότατα έχουν ήδη παρακολουθήσει κάποιο μάθημα για διαφορικές εξισώσεις, αυτό δεν αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση των όσων ακολουθούν. Οι γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$L_n w = \frac{d^n w}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}w}{dt^{n-1}} + \cdots a_1 \frac{dw}{dt} + a_0 w = 0 \tag{1.3.19}$$

όπου όλα τα $\{a_j\}_{j=0}^{n-1}$ είναι σταθερές, το n λέγεται τάξη της εξίσωσης, και (προς το παρόν) το t θεωρείται πραγματικό. Το t θα μπορούσε να θεωρηθεί και μιγαδικό (κάτι που θα γίνει παρακάτω, στην Ενότητα 3.7). Στην περίπτωση αυτή, η μελέτη τέτοιων διαφορικών εξισώσεων συνδέεται άμεσα με πολλά από τα θέματα που θα εξεταστούν παρακάτω σε αυτό το βιβλίο. Προς το παρόν, όμως, θεωρούμε ότι το t είναι πραγματικό. Για την Εξίσωση (1.3.19) μπορεί κανείς να αναζητήσει λύσεις της ακόλουθης μορφής

$$w(t) = ce^{zt} \tag{1.3.20}$$

όπου το c είναι μια σταθερά διάφορη του μηδενός. Εάν αντικαταστήσουμε την έκφραση (1.3.20) στην Εξίσωση (1.3.19), και βγάλουμε κοινό παράγοντα το ce^{zt} από όλους τους όρους (σημειωτέον ότι το e^{zt} είναι διάφορο του μηδενός), παίρνουμε την παρακάτω *αλγεβρική* εξίσωση:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \tag{1.3.21}$$

Αν και μπορεί να διακρίνει κανείς διάφορες υποπεριπτώσεις, εμείς θα εξετάσουμε μόνο τη βασική περίπτωση όπου υπάρχουν n *διαφορετικές* λύσεις της Εξίσωσης (1.3.22), τις οποίες ονομάζουμε $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Κάθε μία από αυτές τις τιμές, έστω π. χ. z_j, αντιστοιχεί σε μια λύση της Εξίσωσης (1.3.19) $w_j = c_j e^{z_j t}$, όπου c_j μια αυθαίρετη σταθερά. Επειδή η Εξίσωση (1.3.19) είναι γραμμική, η πιο γενική λύση είναι η εξής:

$$w(t) = \sum_{j=1}^{n} w_j = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{z_j t} \tag{1.3.22}$$

Σε εγχειρίδια διαφορικών εξισώσεων αποδεικνύεται ότι η Εξίσωση (1.3.22) είναι, στην πραγματικότητα, η γενικότερη δυνατή λύση. Στις διάφορες εφαρμογές, οι διαφορικές εξισώσεις (Εξίσωση (1.3.19)) συχνά έχουν πραγματικούς συντελεστές $\{a_j\}_{j=0}^{n-1}$. Όπως προκύπτει από τη μελέτη αλγεβρικών εξισώσεων της μορφής της Εξίσωσης (1.3.21), οι οποίες θα εξεταστούν παρακάτω, υπάρχουν το πολύ n λύσεις –ακριβώς n λύσεις αν συνυπολογιστεί η πολλαπλότητα των λύσεων. Μάλιστα, όταν οι συντελεστές είναι πραγματικοί, οι λύσεις είναι είτε πραγματικές είτε ζεύγη συζυγών μιγαδικών. Σε οποιοδήποτε ζεύγος συζυγών μιγαδικών αντιστοιχεί μια πραγματική λύση $w(t)$, η οποία μπορεί να βρεθεί αν συνδυάσει κανείς το ζεύγος συζυγών μιγαδικών ριζών z_j και $\overline{z_j}$ με συζυγείς μιγαδικές σταθερές c_j και $\overline{c_j}$. Για παράδειγμα, μια τέτοια πραγματική λύση, έστω w_p, που αντιστοιχεί στο ζεύγος $z, \overline{z}$ είναι η εξής:

$$w_p(t) = ce^{zt} + \overline{c}e^{\overline{z}t} \tag{1.3.23}$$

Η λύση αυτή μπορεί να εκφραστεί και μέσω τριγωνομετρικών συναρτήσεων και πραγματικών εκθετικών. Έστω $z = x + iy$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} w_p(t) &= ce^{(x+iy)t} + \overline{c}e^{(x-iy)t} \\ &= e^{xt}[c(\cos yt + i\sin yt) + \overline{c}(\cos yt - i\sin yt)] \\ &= (c+\overline{c})e^{xt}\cos yt + i(c-\overline{c})e^{xt}\sin yt \end{aligned} \tag{1.3.24}$$

Επειδή τα $c + \overline{c} = A$, $i(c - \overline{c}) = B$ είναι πραγματικοί αριθμοί, αυτό το ζεύγος λύσεων μπορεί να τεθεί στην *πραγματική* μορφή

$$w_c(t) = Ae^{xt}\cos yt + Be^{xt}\sin yt \tag{1.3.25}$$

Δύο παραδείγματα αυτών των εννοιών είναι η απλή αρμονική κίνηση (ΑΑΚ) και οι δονήσεις δοκών:

$$\frac{d^2w}{dt^2} + {\omega_0}^2 w = 0 \qquad \text{(ΑΑΚ)} \tag{1.3.26α}$$

$$\frac{d^4w}{dt^4} + k^4 w = 0 \tag{1.3.26β}$$

όπου ${\omega_0}^2$ και k^4 είναι πραγματικές σταθερές διάφορες του μηδενός που εξαρτώνται από τις παραμέτρους του φυσικού μοντέλου. Εάν αναζητήσουμε λύσεις της μορφής (1.3.20) καταλήγουμε στις εξής εξισώσεις

$$z^2 + {\omega_0}^2 = 0 \tag{1.3.27α}$$

$$z^4 + k^4 = 0 \tag{1.3.27β}$$

που έχουν τις εξής λύσεις (βλ. επίσης Ενότητα 1.1)

$$z_1 = i\omega_0, \qquad z_2 = -i\omega_0 \tag{1.3.28α}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= ke^{i\pi/4} = \frac{k}{\sqrt{2}}(1+i) \\ z_2 &= ke^{3i\pi/4} = \frac{k}{\sqrt{2}}(-1+i) \\ z_3 &= ke^{5i\pi/4} = \frac{k}{\sqrt{2}}(-1-i) \\ z_4 &= ke^{7i\pi/4} = \frac{k}{\sqrt{2}}(1-i) \end{aligned} \tag{1.3.28β}$$

Από την παραπάνω ανάλυση έπεται ότι οι αντίστοιχες πραγματικές λύσεις $w(t)$ θα έχουν την εξής μορφή

$$w = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \tag{1.3.29α}$$

$$w = e^{\frac{kt}{\sqrt{2}}}\left[A_1\cos\frac{kt}{\sqrt{2}} + B_1\sin\frac{kt}{\sqrt{2}}\right] + e^{-\frac{kt}{\sqrt{2}}}\left[A_2\cos\frac{kt}{\sqrt{2}} + B_2\sin\frac{kt}{\sqrt{2}}\right] \tag{1.3.29β}$$

όπου A, B, A_1, A_2, B_1, και B_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε και συνοψίσαμε τις βασικές ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών και των στοιχειωδών συναρτήσεων. Όπως είδαμε μέχρι στιγμής, πολλές έννοιες των μιγαδικών μεταβλητών απορρέουν από τη θεωρία των συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής, αν και από τον διδιάστατο χαρακτήρα των μιγαδικών αριθμών έχουν ήδη προκύψει κάποιες σημαντικές διαφορές. Στα επόμενα κεφάλαια θα προκύψουν αρκετά εντελώς νέα και αναπάντεχα αποτελέσματα, και η απόκλιση από τις πραγματικές μεταβλητές θα γίνει πιο εμφανής.

Ασκήσεις για την Ενότητα 1.3

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\text{(α)}\ \lim_{z\to i}(z+1/z) \qquad \text{(β)}\ \lim_{z\to z_0} 1/z^m,\ m \text{ ακέραιος}$$

$$\text{(γ)}\ \lim_{z\to i}\sinh z \qquad \text{(δ)}\ \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} \qquad \text{(ε)}\ \lim_{z\to\infty}\frac{\sin z}{z}$$

$$\text{(στ)}\ \lim_{z\to\infty}\frac{z^2}{(3z+1)^2} \qquad \text{(ζ)}\ \lim_{z\to\infty}\frac{z}{z^2+1}$$

2. Το πρόβλημα αυτό αφορά την απόδειξη μιας ειδικής περίπτωσης του κανόνα του l'Hospital. Έστω ότι οι $f(z)$ και $g(z)$ έχουν δυναμοσειρές γύρω από το $z = a$, και

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(k)}(a) = 0$$
$$g(a) = g'(a) = g''(a) = \cdots = g^{(k)}(a) = 0$$

Αν οι $f^{(k+1)}(a)$ και $g^{(k+1)}(a)$ δεν είναι ταυτόχρονα ίσες με το μηδέν, να δειχθεί ότι

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k+1)}(a)}{g^{(k+1)}(a)}$$

Τι συμβαίνει αν $g^{(k+1)}(a) = 0$;

3. Αν $|g(z)| \le M$, $M > 0$ για κάθε z σε μια γειτονιά του $z = z_0$, να δειχθεί ότι αν $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$, τότε

$$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0$$

4. Πού είναι παραγωγίσιμες οι παρακάτω συναρτήσεις;

$$\text{(α)}\ \sin z \qquad \text{(β)}\ \tan z \qquad \text{(γ)}\ \frac{z-1}{z^2+1} \qquad \text{(δ)}\ e^{1/z} \qquad \text{(ε)}\ 2\overline{z}$$

5. Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις $\mathrm{Re}\, z$ και $\mathrm{Im} z$ δεν είναι παραγωγίσιμες πουθενά.

6. Έστω ότι η $f(z)$ είναι συνεχής συνάρτηση για όλα τα z. Να δειχθεί ότι αν $f(z_0) \ne 0$, τότε πρέπει να υπάρχει μια γειτονιά του z_0 στην οποία να ισχύει $f(z) \ne 0$.

7. Έστω ότι η $f(z)$ είναι συνεχής συνάρτηση όπου $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$. Να δειχθεί ότι

$\lim_{z\to 0}(e^{f(z)} - 1) = 0$. Τι ισχύει για το $\lim_{z\to 0}((e^{f(z)} - 1)/z)$;

8. Έστω ότι δύο πολυώνυμα $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ και $g(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m$ είναι ίσα σε όλα τα σημεία z μιας περιοχής R. Να αποδειχθεί μέσω της έννοιας του ορίου ότι $m = n$ και ότι όλοι οι συντελεστές $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ θα πρέπει να είναι ίσοι με τους αντίστοιχους συντελεστές $\{b_j\}_{j=0}^{n}$. Υπόδειξη: Θεωρήστε τα όρια $\lim_{z\to 0}(f(z) - g(z))$, $\lim_{z\to 0}(f(z) - g(z))/(z)$, κ.λπ.

9. (α) Να αποδειχθεί, μέσω των παρακάτω τύπων αναπτύγματος σε πραγματικές σειρές Taylor

$$e^x = 1 + x + O(x^2), \qquad \cos x = 1 + O(x^2),$$
$$\sin x = x(1 + O(x^2))$$

όπου το $O(x^2)$ σημαίνει ότι οι όροι που είναι ανάλογοι του x^2 παραλείπονται (δηλ., $\lim\limits_{x\to 0}(O(x^2))/(x^2) = C$, όπου C σταθερά), η εξής ισότητα:

$$\lim_{z\to 0}(e^z - (1+z)) = \lim_{r\to 0}(e^{r\cos\theta}e^{ir\sin\theta} - (1 + r(\cos\theta + i\sin\theta))) = 0$$

(β) Να δειχθεί μέσω των παραπάνω αναπτυγμάτων Taylor ότι (πρβλ. Εξ. (1.3.18))

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{e^{\Delta z} - 1}{\Delta z}\right) = \lim_{r\to 0}\left\{\frac{(e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta) - 1) + ie^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta)}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}\right\}$$
$$= 1$$

10. Έστω $z = x$ πραγματικός αριθμός. Να βρεθούν μέσω της σχέσης $(d/dx)e^{ix} = ie^{ix}$ οι κλασικοί τύποι των παραγώγων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

11. Έστω οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$\text{(α)}\quad \frac{d^3 w}{dt^3} - k^3 w = 0$$
$$\text{(β)}\quad \frac{d^6 w}{dt^6} - k^6 w = 0$$

όπου το t είναι πραγματικό και το k πραγματική σταθερά. Να βρεθεί η γενική πραγματική λύση των παραπάνω εξισώσεων, και να γραφτεί μέσω *πραγματικών* συναρτήσεων.

12. Έστω η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$x^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + x \frac{dw}{dx} + w = 0$$

όπου x πραγματικό.

(α) Να δειχθεί ότι από τον μετασχηματισμό $x = e^t$ έπεται ότι

$$x \frac{d}{dx} = \frac{d}{dt},$$
$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt}$$

(β) Μέσω των αποτελεσμάτων αυτών να δειχθεί ότι η w ικανοποιεί επίσης τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + w = 0$$

(γ) Μέσω των αποτελεσμάτων αυτών να αποδειχθεί ότι η w έχει την πραγματική λύση

$$w = C e^{i(\log x)} + \bar{C} e^{-i(\log x)}$$

ή

$$w = A \cos(\log x) + B \sin(\log x)$$

13. Με βάση τη μεθοδολογία της Άσκησης 12, να βρεθεί η πραγματική λύση των παρακάτω εξισώσεων (όπου το x είναι πραγματικός αριθμός και το k πραγματική σταθερά):

(α) $$x^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = 0, \quad 4k^2 > 1$$

(β) $$x^3 \frac{d^3 w}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + x \frac{dw}{dx} + k^3 w = 0$$