Κεφάλαιο 1

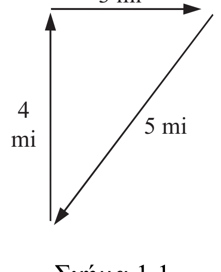
Διανυσματική ανάλυση

1.1 Διανυσματική άλγεβρα

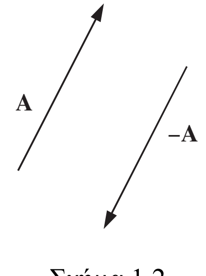
1.1.1 Πράξεις με διανύσματα

Αν περπατήσετε 4 μίλια προς τον βορρά και μετά 3 μίλια προς την ανατολή (Σχ. 1.1), θα έχετε διανύσει συνολικά 7 μίλια, αλλά *δεν* θα βρεθείτε σε 7 μίλια απόσταση από το σημείο που ξεκινήσατε – θα βρεθείτε μόνο σε 5. Χρειαζόμαστε μία άλγεβρα που να περιγράφει τέτοια μεγέθη, τα οποία, προφανώς, δεν προστίθενται με τον συνηθισμένο τρόπο. Ο λόγος, φυσικά, που κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, είναι ότι οι **μετατοπίσεις** (τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν ένα σημείο με ένα άλλο) έχουν όχι μόνο *μέγεθος* (μήκος ή μέτρο) αλλά και *κατεύθυνση*, και είναι ουσιώδες και τα δύο αυτά χαρακτηριστικά να λαμβάνονται υπ' όψη όταν τις προσθέτετε. Τέτοιου είδους αντικείμενα ονομάζονται **διανύσματα**: άλλα παραδείγματα είναι η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η δύναμη και η ορμή. Αντιθέτως, ποσότητες που έχουν μέγεθος αλλά όχι κατεύθυνση ονομάζονται **βαθμωτά**: Παραδείγματα είναι η μάζα, το φορτίο, η πυκνότητα και η θερμοκρασία.

Τα διανύσματα θα τα συμβολίζω με **παχιά γράμματα** (**A**, **B** κ.λπ.) ενώ τα βαθμωτά



Σχήμα 1.1



Σχήμα 1.2

θα τα συμβολίζω με πεζά γράμματα. Το μέγεθος του διανύσματος $\mathbf{A}$ γράφεται $|\mathbf{A}|$ ή, πιο απλά, A. Στα διαγράμματα, τα διανύσματα συμβολίζονται με βέλη: το μήκος του βέλους αντιστοιχεί στο μέγεθος του διανύσματος και η μύτη του βέλους δείχνει την κατεύθυνσή του. Το *μείον* $\mathbf{A}$ $(-\mathbf{A})$ είναι ένα διάνυσμα με μέγεθος ίσο με του $\mathbf{A}$ αλλά με αντίθετη κατεύθυνση (Σχ. 1.2). Σημειώστε ότι τα διανύσματα έχουν μέγεθος και κατεύθυνση αλλά *δεν έχουν συγκεκριμένη θέση*: μία μετατόπιση 4 μιλίων βόρεια της Ουάσιγκτον παριστάνεται από το ίδιο διάνυσμα με μία μετατόπιση 4 μιλίων βόρεια της Βαλτιμόρης (αν αγνοήσουμε, βέβαια, την καμπυλότητα της επιφάνειας της Γης). Σ' ένα διάγραμμα, λοιπόν, μπορείτε να μετατοπίζετε το βέλος όπως θέλετε, από τη στιγμή που δεν αλλάζετε το μήκος του ή την κατεύθυνσή του (παράλληλη μετατόπιση).

Ορίζουμε τέσσερις πράξεις με διανύσματα: την πρόσθεση και τα τρία είδη του πολλαπλασιασμού.

(i) Πρόσθεση δύο διανυσμάτων: Τοποθετήστε την ουρά του $\mathbf{B}$ στη μύτη του $\mathbf{A}$· το άθροισμα $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ είναι το διάνυσμα που δείχνει από την ουρά του $\mathbf{A}$ στη μύτη του $\mathbf{B}$ (Σχ. 1.3). (Ο κανόνας αυτός αποτελεί γενίκευση της ευνόητης διαδικασίας συνδυασμού δύο μετατοπίσεων.) Η πρόσθεση είναι *αντιμεταθετική*:

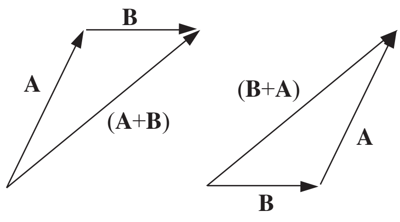
$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}.$$

3 μίλια ανατολικά μετά από 4 μίλια βόρεια σας οδηγούν στο ίδιο σημείο με 4 μίλια βόρεια μετά από 3 μίλια ανατολικά. Η πρόσθεση είναι, επίσης, *προσεταιριστική:*

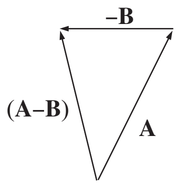
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}).$$

Για να αφαιρέσετε ένα διάνυσμα (Σχ. 1.4), προσθέστε το αντίθετό του:

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B}).$$



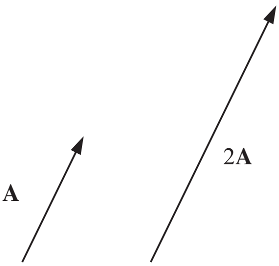
Σχήμα 1.3



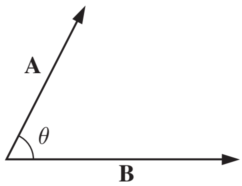
Σχήμα 1.4

(ii) Πολλαπλασιασμός με ένα βαθμωτό: Ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος με ένα θετικό βαθμωτό μέγεθος a, πολλαπλασιάζει το *μέτρο* του, αφήνει όμως την κατεύθυνσή του ανέπαφη (Σχ. 1.5). (Αν το a είναι αρνητικό, η φορά αντιστρέφεται.) Ο πολλαπλασιασμός με βαθμωτό είναι *επιμεριστικός*:

$$a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+a\mathbf{B}.$$



Σχήμα 1.5



Σχήμα 1.6

(iii) Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων: Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ορίζεται από την

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv AB \cos\theta, \tag{1.1}$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα αν ενωθούν οι ουρές τους (Σχ. 1.6). Παρατηρήστε ότι το $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ είναι ένα *βαθμωτό* μέγεθος (εξ ου και η εναλλακτική ονομασία **βαθμωτό γινόμενο**). Το βαθμωτό γινόμενο είναι *αντιμεταθετικό*,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A},$$

και *επιμεριστικό*,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}. \tag{1.2}$$

Γεωμετρικά, το $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ είναι το γινόμενο του A επί το μήκος της προβολής του $\mathbf{B}$ στον άξονα του $\mathbf{A}$ (ή το γινόμενο του B επί το μήκος της προβολής του $\mathbf{A}$ στον άξονα του $\mathbf{B}$). Αν τα δύο διανύσματα είναι παράλληλα, τότε $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB$. Συγκεκριμένα, για κάθε διάνυσμα $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2. \tag{1.3}$$

Αν τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι κάθετα, τότε $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$.

Παράδειγμα 1.1

Θέστε $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ (Σχ. 1.7), και υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbf{C}$ με τον εαυτό του.

Λύση:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B},$$

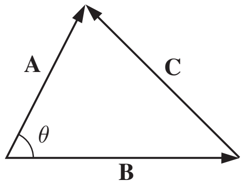
ή

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta.$$

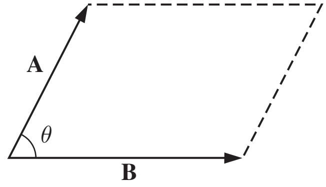
Η ισότητα αυτή ονομάζεται **νόμος των συνημιτόνων**.

(iv) Εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων: Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ορίζεται από την

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv AB \sin\theta \, \hat{\mathbf{n}}, \tag{1.4}$$



Σχήμα 1.7



Σχήμα 1.8

όπου το $\hat{\mathbf{n}}$ είναι ένα **μοναδιαίο διάνυσμα** (διάνυσμα με μήκος 1) με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$. (Θα χρησιμοποιώ ένα καπελάκι ($\hat{\ }$) για να συμβολίζω τα μοναδιαία διανύσματα.) Υπάρχουν, φυσικά, *δύο* κατευθύνσεις που είναι κάθετες σε οποιοδήποτε επίπεδο: η «προς τα μέσα» και η «προς τα έξω». Η κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{n}}$ αποσαφηνίζεται με τον **κανόνα του δεξιού χεριού**: τοποθετήστε τα δάχτυλά σας κατά μήκος της κατεύθυνσης του πρώτου διανύσματος και κλείστε την παλάμη σας (μέσω της μικρότερης γωνίας) προς το μέρος του δεύτερου – ο αντίχειράς σας τότε δείχνει την κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{n}}$. (Στο Σχ. 1.8 το $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ δείχνει *προς τα μέσα* στη σελίδα, ενώ το $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ δείχνει *έξω* από τη σελίδα.) Παρατηρήστε ότι το $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ είναι και αυτό ένα *διάνυσμα* (εξ ου και η εναλλακτική ονομασία **διανυσματικό γινόμενο**). Το εξωτερικό γινόμενο είναι *επιμεριστικό*,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{C}), \tag{1.5}$$

αλλά *όχι αντιμεταθετικό*. Πράγματι,

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \tag{1.6}$$

Γεωμετρικά, το $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ είναι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου με πλευρές τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ (Σχ. 1.8). Αν δύο διανύσματα είναι παράλληλα, το εξωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν. Συγκεκριμένα,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$$

για κάθε διάνυσμα $\mathbf{A}$.

Πρόβλημα 1.1

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των σχέσεων (1.1) και (1.4) και κατάλληλα σχήματα, δείξτε ότι το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο είναι επιμεριστικά

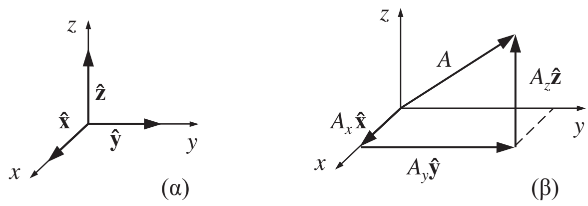
(α) όταν τα τρία διανύσματα είναι συνεπίπεδα·

! (β) στη γενική περίπτωση.

Πρόβλημα 1.2 Είναι το εξωτερικό γινόμενο προσεταιριστικό;

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \stackrel{?}{=} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}).$$

Αν είναι, *αποδείξτε* το· αν όχι, δώστε ένα αντιπαράδειγμα.



Σχήμα 1.9

1.1.2 Η διανυσματική άλγεβρα υπό μορφή συνιστωσών

Στην προηγούμενη παράγραφο όρισα τις τέσσερις διανυσματικές πράξεις (πρόσθεση, πολλαπλασιασμό με βαθμωτό, εσωτερικό γινόμενο και εξωτερικό γινόμενο) χωρίς αναφορά σε κάποιο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Στην πράξη, είναι συχνά ευκολότερο να χρησιμοποιούμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες x, y, z και να εργαζόμαστε με τις «συνιστώσες» των διανυσμάτων. Έστω ότι τα $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, και $\hat{\mathbf{z}}$ είναι μοναδιαία διανύσματα, παράλληλα με τους άξονες x, y, και z αντίστοιχα (Σχ. 1.9(α)). Κάθε διάνυσμα $\mathbf{A}$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει αυτών των μοναδιαίων **διανυσμάτων βάσης** (Σχ. 1.9(β)) ως εξής:

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}.$$

Οι αριθμοί A_x, A_y, και A_z ονομάζονται **συνιστώσες** του $\mathbf{A}$. Γεωμετρικά, είναι οι προβολές του $\mathbf{A}$ πάνω στους τρεις άξονες συντεταγμένων. Μπορούμε τώρα να επαναδιατυπώσουμε κάθε μία από τις τέσσερις διανυσματικές πράξεις με κανόνες πράξεων μεταξύ των συνιστωσών:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) + (B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) \\ &= (A_x + B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{z}}. \qquad (1.7)\end{aligned}$$

(i) Κανόνας: *Για να προσθέσετε διανύσματα, προσθέστε τις αντίστοιχες συνιστώσες.*

$$a\mathbf{A} = (aA_x)\hat{\mathbf{x}} + (aA_y)\hat{\mathbf{y}} + (aA_z)\hat{\mathbf{z}}. \qquad (1.8)$$

(ii) Κανόνας: *: Για να πολλαπλασιάσετε με ένα βαθμωτό, πολλαπλασιάστε με αυτό την κάθε συνιστώσα.*

Επειδή τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, και $\hat{\mathbf{z}}$ είναι κάθετα το ένα στο άλλο,

$$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 1, \quad \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 0. \qquad (1.9)$$

Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}})\cdot(B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \qquad (1.10)\end{aligned}$$

(iii) Κανόνας: *Για να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο, πολλαπλασιάστε τις αντίστοιχες συνιστώσες και προσθέστε τα γινόμενα.*
Ειδικότερα,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2,$$

οπότε

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \tag{1.11}$$

(Αυτή είναι, αν προτιμάτε, η τριδιάστατη γενίκευση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.) Παρατηρήστε ότι το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbf{A}$ με οποιοδήποτε *μοναδιαίο* διάνυσμα ισούται με τη συνιστώσα του $\mathbf{A}$ κατά μήκος της κατεύθυνσης του μοναδιαίου διανύσματος (έτσι, $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = A_x$, $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}} = A_y$, και $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{z}} = A_z$).

Παρομοίως,[1]

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} = \ \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} &= \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = 0, \\
\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{z}}, \\
\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} &= \hat{\mathbf{x}}, \\
\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{y}}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) \times (B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) \qquad (1.13) \\
&= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{x}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\mathbf{y}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{z}}.
\end{aligned}$$

Η έκφραση αυτή, που είναι δύσκολο να τη θυμάται κανείς, μπορεί να γραφτεί πιο νοικοκυρεμένα υπό μορφή ορίζουσας:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{1.14}$$

(iv) Κανόνας: *Για να βρείτε το εξωτερικό γινόμενο, υπολογίστε την ορίζουσα που η πρώτη γραμμή της είναι τα* $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$, *η δεύτερή της γραμμή αποτελείται από τις συνιστώσες του* $\mathbf{A}$, *και η τρίτη της γραμμή από τις συνιστώσες του* $\mathbf{B}$.

Παράδειγμα 1.2

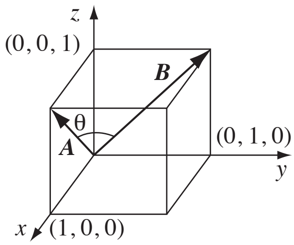
Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν δύο διαγώνιοι διαδοχικών εδρών ενός κύβου.

Λύση: Μπορούμε να θεωρήσουμε έναν κύβο που η πλευρά του έχει μήκος 1 (χωρίς απώλεια της γενικότητας), και να τον τοποθετήσουμε όπως φαίνεται στο Σχ. 1.10, με τη

[1] Τα πρόσημα αυτά χαρακτηρίζουν ένα *δεξιόστροφο* σύστημα συντεταγμένων. (Σ' ένα τέτοιο σύστημα, όταν ο άξονας x δείχνει έξω από τη σελίδα, ο άξονας y δείχνει προς τα δεξιά και ο άξονας z προς τα πάνω. Κάθε άλλο δεξιόστροφο σύστημα προκύπτει με μια σειρά διαδοχικών περιστροφών του συστήματος αυτού γύρω από κάποιους άξονες στο χώρο.) Σε οποιοδήποτε *αριστερόστροφο* σύστημα τα πρόσημα αντιστρέφονται: $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{z}}$ και ούτω καθ' εξής. Θα χρησιμοποιούμε αποκλειστικά δεξιόστροφα συστήματα.

μια γωνία του στην αρχή των αξόνων. Οι διαγώνιοι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ των εδρών του σχήματος είναι

$$\mathbf{A} = 1\,\hat{\mathbf{x}} + 0\,\hat{\mathbf{y}} + 1\,\hat{\mathbf{z}}, \qquad \mathbf{B} = 0\,\hat{\mathbf{x}} + 1\,\hat{\mathbf{y}} + 1\,\hat{\mathbf{z}}.$$



Σχήμα 1.10

Έτσι, υπό μορφή συνιστωσών

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1.$$

Εξάλλου, από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta = \sqrt{2}\sqrt{2}\cos\theta = 2\cos\theta.$$

Επομένως,

$$\cos\theta = 1/2, \qquad \text{ή} \qquad \theta = 60^\circ.$$

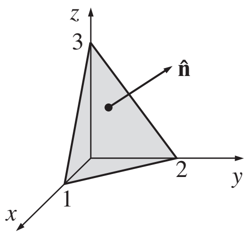
Μπορείτε, φυσικά, να βρείτε την απάντηση και με ευκολότερο τρόπο, σχεδιάζοντας τη διαγώνιο της πάνω έδρας του κύβου, οπότε σχηματίζεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Σε περιπτώσεις όμως που η γεωμετρία του σχήματος δεν είναι τόσο απλή, το τέχνασμα της σύγκρισης των δύο σχέσεων υπολογισμού του εσωτερικού γινομένου μπορεί να βοηθήσει πολύ αποτελεσματικά στην εύρεση γωνιών.

Πρόβλημα 1.3 Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι εσωτερικές διαγώνιοι ενός κύβου.

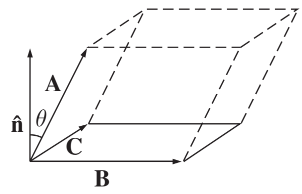
Πρόβλημα 1.4 Χρησιμοποιήστε το εξωτερικό γινόμενο για να βρείτε τις συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{n}}$ που είναι κάθετο στο επίπεδο του Σχ. 1.11.

1.1.3 Τριπλά γινόμενα

Αφού το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι και αυτό ένα διάνυσμα, μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό ή το εξωτερικό του γινόμενο με ένα τρίτο διάνυσμα, σχηματίζοντας έτσι ένα *τριπλό* γινόμενο.



Σχήμα 1.11



Σχήμα 1.12

(i) Το βαθμωτό τριπλό γινόμενο: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. Γεωμετρικά, το $|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$, είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με πλευρές τα $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, και $\mathbf{C}$, αφού $|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|$ είναι το εμβαδόν της βάσης και $|\mathbf{A} \cos\theta|$ είναι το ύψος (Σχ. 1.12). Προφανώς, λοιπόν *

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \tag{1.15}$$

αφού όλα αντιστοιχούν στο ίδιο σχήμα. Παρατηρήστε ότι τηρείται «αλφαβητική» σειρά – τα τριπλά γινόμενα που δεν τηρούν την αλφαβητική σειρά,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}),$$

λόγω της Εξίσωσης (1.6), έχουν αντίθετο πρόσημο. Υπό μορφή συνιστωσών

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \tag{1.16}$$

Παρατηρήστε ότι το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο μπορούν να αντιμετατίθενται:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

(αυτό συνάγεται άμεσα από την (1.15))· η τοποθέτηση των παρενθέσεων, εν τούτοις, είναι πολύ σημαντική: η έκφραση $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ δεν έχει κανένα απολύτως νόημα – δεν μπορείτε να σχηματίσετε το εξωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος και ενός *βαθμωτού*.

(ii) Το Διανυσματικό Τριπλό Γινόμενο: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. Ο τύπος του διανυσματικού τριπλού γινομένου γίνεται πιο ευκολομνημόνευτος με τον λεγόμενο κανόνα **BAC–CAB**:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \tag{1.17}$$

Παρατηρήστε ότι το

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) + \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$$

*Οι ισότητες στην (1.15) προκύπτουν με κυκλική μετάθεση των διανυσμάτων (Σ.τ.Μ.).

είναι ένα τελείως διαφορετικό διάνυσμα. Παρεμπιπτόντως, όλα τα *ανώτερα* διανυσματικά γινόμενα μπορούν να απλοποιηθούν με παρόμοιο τρόπο, συνήθως με κατ' επανάληψη εφαρμογή της (1.17), έτσι ώστε να μην είναι αναγκαίο μια έκφραση να περιέχει περισσότερα του ενός διανυσματικά γινόμενα σε κάθε όρο. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\\ \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})) &= \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}))-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{C}\times\mathbf{D}).\end{aligned} \tag{1.18}$$

Πρόβλημα 1.5 Αποδείξτε τον κανόνα **BAC–CAB** γράφοντας και τα δύο μέλη υπό μορφή συνιστωσών.

Πρόβλημα 1.6 Αποδείξτε ότι

$$[\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]+[\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})]+[\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})]=0.$$

Κάτω από ποιες συνθήκες είναι $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$;

1.1.4 Διανύσματα θέσης, μετατόπισης, και απόστασης

Η θέση ενός σημείου στις τρεις διαστάσεις μπορεί να προσδιοριστεί από τις καρτεσιανές του συντεταγμένες (x, y, z). Το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το εν λόγω σημείο (Σχ. 1.13) λέγεται **διάνυσμα θέσης**:

$$\mathbf{r}\equiv x\,\hat{\mathbf{x}}+y\,\hat{\mathbf{y}}+z\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{1.19}$$

Για το διάνυσμα θέσης θα χρησιμοποιήσω το σύμβολο $\mathbf{r}$ σε όλο το βιβλίο. Το μέτρο του,

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{1.20}$$

ισούται με την απόσταση από την αρχή των αξόνων, και

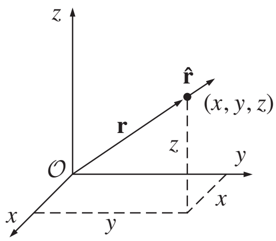
$$\hat{\mathbf{r}}=\frac{\mathbf{r}}{r}=\frac{x\,\hat{\mathbf{x}}+y\,\hat{\mathbf{y}}+z\,\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{1.21}$$

είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα που δείχνει ακτινικά προς τα έξω. Το **απειροστό διάνυσμα μετατόπισης**, από το (x, y, z) στο $(x+dx, y+dy, z+dz)$, είναι

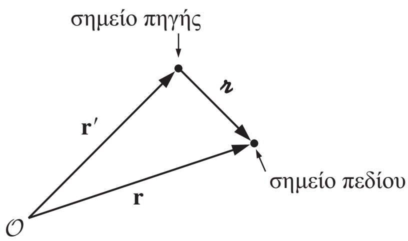
$$d\mathbf{l}=dx\,\hat{\mathbf{x}}+dy\,\hat{\mathbf{y}}+dz\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{1.22}$$

(Θα μπορούσαμε να το συμβολίσουμε με $d\mathbf{r}$, καθώς *περί αυτού* πρόκειται, αλλά ένα ειδικό σύμβολο για τις απειροστές μετατοπίσεις είναι χρήσιμο.)

Στην ηλεκτροδυναμική συναντάμε συχνά προβλήματα που αφορούν *δύο* σημεία – συνήθως ένα **σημείο πηγής**, $\mathbf{r}'$, όπου βρίσκεται ένα ηλεκτρικό φορτίο, και ένα **σημείο πεδίου**, $\mathbf{r}$, στο οποίο υπολογίζουμε το ηλεκτρικό ή το μαγνητικό πεδίο (Σχ. 1.14).



Σχήμα 1.13



Σχήμα 1.14

Συμφέρει να υιοθετήσουμε από την αρχή ένα συντομογραφικό σύμβολο για το **διάνυσμα απόστασης** από το σημείο πηγής μέχρι το σημείο πεδίου. Για αυτόν τον σκοπό θα χρησιμοποιήσω το γράμμα $\boldsymbol{\mathscr{r}}$:

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'. \tag{1.23}$$

Το μέτρο του είναι

$$\mathscr{r} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \tag{1.24}$$

και το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το $\mathbf{r}'$ προς το $\mathbf{r}$ είναι

$$\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} = \frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{1.25}$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες,

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}, \tag{1.26}$$

$$\mathscr{r} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \tag{1.27}$$

$$\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} = \frac{(x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \tag{1.28}$$

(απ' όπου μπορεί κανείς να εκτιμήσει το πλεονέκτημα του συνοπτικού συμβολισμού).

Πρόβλημα 1.7 Βρείτε το διάνυσμα απόστασης $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ από το σημείο πηγής (2,8,7) μέχρι το σημείο πεδίου (4,6,8). Υπολογίστε το μέτρο του ($\mathscr{r}$), και κατασκευάστε το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$.

1.1.5 Πώς μετασχηματίζονται τα διανύσματα

Ο ορισμός ενός διανύσματος σαν «ποσότητα με μέτρο και κατεύθυνση» δεν είναι εξ ολοκλήρου ικανοποιητικός: Τι ακριβώς *σημαίνει* «κατεύθυνση»;[2] Η ερώτηση αυτή

[2] Η ενότητα αυτή μπορεί να παραλειφθεί χωρίς απώλεια συνέχειας.

μπορεί να φαίνεται σχολαστική, σύντομα όμως θα συναντήσουμε ένα είδος παραγώγου που μάλλον *μοιάζει* με διάνυσμα, οπότε θα θέλαμε να ξέρουμε αν πράγματι είναι διάνυσμα. Έχετε συνηθίσει, ίσως, να νομίζετε πως οτιδήποτε έχει τρεις συνιστώσες που προστίθενται κατάλληλα είναι ένα διάνυσμα. Σκεφτείτε όμως το εξής: Έχουμε ένα κασόνι με φρούτα που περιέχει N_x αχλάδια, N_y μήλα και N_z μπανάνες. Είναι άραγε το $\mathbf{N} = N_x\hat{\mathbf{x}} + N_y\hat{\mathbf{y}} + N_z\hat{\mathbf{z}}$ διάνυσμα; Έχει πράγματι τρεις συνιστώσες και όταν το προσθέσετε με ένα άλλο κασόνι που έχει M_x αχλάδια, M_y μήλα και M_z μπανάνες, το αποτέλεσμα είναι $(N_x + M_x)$ αχλάδια, $(N_y + M_y)$ μήλα και $(N_z + M_z)$ μπανάνες. Άρα *προστίθεται* σαν διάνυσμα. Σίγουρα όμως *δεν* είναι διάνυσμα με τον τρόπο που ένας φυσικός εννοεί αυτή τη λέξη, διότι δεν έχει κάποια κατεύθυνση. Πού ακριβώς υστερεί;

Η απάντηση είναι ότι το $\mathbf{N}$ *δεν μετασχηματίζεται κατάλληλα όταν αλλάζετε τις συντεταγμένες*. Το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε για να περιγράφουμε τις θέσεις στον χώρο, είναι, βεβαίως, τελείως αυθαίρετο, υπάρχει όμως ένας συγκεκριμένος γεωμετρικός νόμος μετασχηματισμού που μετατρέπει τις διανυσματικές συνιστώσες από το ένα σύστημα στο άλλο. Υποθέστε, για παράδειγμα, ότι το σύστημα $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$, έχει στραφεί κατά γωνία ϕ περί τον κοινό άξονα $x = \overline{x}$, ως προς το σύστημα x, y, z. Από το Σχ. 1.15 έχουμε

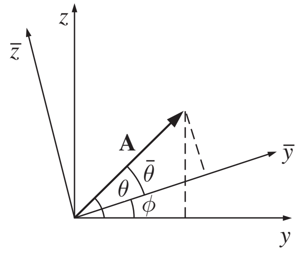
$$A_y = A\cos\theta, \qquad A_z = A\sin\theta,$$

ενώ

$$\begin{aligned}
\overline{A}_y &= A\cos\overline{\theta} = A\cos(\theta-\phi) = A(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) \\
&= \cos\phi A_y + \sin\phi A_z, \\
\overline{A}_z &= A\sin\overline{\theta} = A\sin(\theta-\phi) = A(\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi) \\
&= -\sin\phi A_y + \cos\phi A_z.
\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να εκφραστεί υπό μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} \overline{A}_y \\ \overline{A}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_y \\ A_z \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$



Σχήμα 1.15

Γενικότερα, ο νόμος μετασχηματισμού για περιστροφή γύρω από κάποιον *αυθαίρετο άξονα* στον χώρο, παίρνει τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} \overline{A}_x \\ \overline{A}_y \\ \overline{A}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \tag{1.30}$$

ή, συντομότερα,

$$\overline{A}_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} A_j, \tag{1.31}$$

όπου ο δείκτης 1 είναι για το x, ο 2 για το y και ο 3 για το z. Τα στοιχεία του πίνακα R μπορούν να προσδιοριστούν, για μια δεδομένη περιστροφή, με γεωμετρική μέθοδο, παρόμοια με εκείνη που χρησιμοποιήσαμε για την περιστροφή γύρω από τον άξονα x.

Τώρα: Οι συνιστώσες του $\mathbf{N}$ μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο; *Βεβαίως* όχι – όποιες συντεταγμένες και να χρησιμοποιήσετε για να αναπαραστήσετε τις θέσεις στον χώρο, θα υπάρχει πάντα η ίδια ποσότητα μήλων στο κασόνι. Δεν μπορείτε να μετατρέψετε ένα αχλάδι σε μπανάνα χρησιμοποιώντας ένα διαφορετικό σύστημα αξόνων, *μπορείτε* όμως το A_x να το μετατρέψετε σε $\overline{A}_y$. Τυπικά, λοιπόν, *ένα διάνυσμα είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο τριών συνιστωσών που μετασχηματίζεται, όταν αλλάζουν οι συντεταγμένες, ακριβώς όπως οι συνιστώσες μιας μετατόπισης*. Ως γνωστόν, η μετατόπιση είναι το *πρότυπο συμπεριφοράς* για όλα τα διανύσματα.

Παρεμπιπτόντως, ένας **τανυστής** (δεύτερης τάξης) είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο με *εννιά* συνιστώσες T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yx}, $\ldots$, T_{zz}, για το μετασχηματισμό των οποίων απαιτείται *δύο* φορές η δράση του πίνακα R:

$$\begin{aligned} \overline{T}_{xx} = R_{xx}(R_{xx}T_{xx} + R_{xy}T_{xy} + R_{xz}T_{xz}) \\ +R_{xy}(R_{xx}T_{yx} + R_{xy}T_{yy} + R_{xz}T_{yz}) \\ +R_{xz}(R_{xx}T_{zx} + R_{xy}T_{zy} + R_{xz}T_{zz}), \ldots \end{aligned}$$

ή, συντομότερα,

$$\overline{T}_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} R_{ik} R_{jl} T_{kl}. \tag{1.32}$$

Εν γένει, ένας τανυστής τάξης n έχει n δείκτες και 3^n συνιστώσες και μετασχηματίζεται αν δράσουμε πάνω του n φορές με τον πίνακα R. Στην ιεραρχία αυτή, ένα διάνυσμα είναι τανυστής τάξης 1 και ένα βαθμωτό είναι τανυστής τάξης 0.

Πρόβλημα 1.8

(α) Αποδείξτε ότι ο διδιάστατος πίνακας στροφής (1.29) διατηρεί το *μήκος* του $\mathbf{A}$. (Δηλαδή, δείξτε ότι $\overline{A}_y\overline{B}_y + \overline{A}_z\overline{B}_z = A_yB_y + A_zB_z$.)

(β) Ποιους περιορισμούς πρέπει να ικανοποιούν τα στοιχεία (R_{ij}) του τριδιάστατου πίνακα στροφής (1.30) προκειμένου να διατηρούν το μήκος του $\mathbf{A}$ (για όλα τα $\mathbf{A}$);

Πρόβλημα 1.9 Βρείτε τον πίνακα μετασχηματισμού R που περιγράφει μία στροφή $120°$ γύρω από έναν άξονα που περνάει από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $(1, 1, 1)$. Η στροφή γίνεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού καθώς κοιτάτε κατά μήκος του άξονα προς την αρχή.

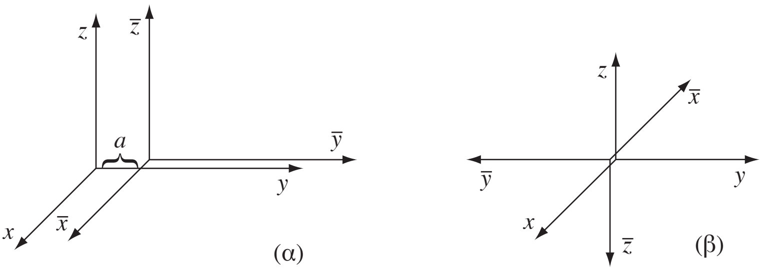
Πρόβλημα 1.10

(α) Πώς μετασχηματίζονται οι συνιστώσες ενός διανύσματος σε μία ευθύγραμμη **μεταφορά** των αξόνων (π.χ. $\overline{x} = x, \overline{y} = y - a, \overline{z} = z$, Σχ. 1.16(α));

(β) Πώς μετασχηματίζονται οι συνιστώσες ενός διανύσματος σε μία **αντιστροφή** των συντεταγμένων ($\overline{x} = -x, \overline{y} = -y, \overline{z} = -z$, Σχ. 1.16(β));

(γ) Πώς μετασχηματίζεται το εξωτερικό γινόμενο (1.13) δύο διανυσμάτων σε μία αντιστροφή; (Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων δικαιολογημένα ονομάζεται **ψευδοδιάνυσμα** λόγω αυτής της «ανώμαλης» συμπεριφοράς του.) Το εξωτερικό γινόμενο δύο ψευδοδιανυσμάτων είναι διάνυσμα ή ψευδοδιάνυσμα; Κατονομάστε δύο ψευδοδιανυσματικές ποσότητες της κλασικής μηχανικής.

(δ) Πώς μετασχηματίζεται σε μια αντιστροφή το βαθμωτό τριπλό γινόμενο τριών διανυσμάτων; (Ένα τέτοιο αντικείμενο ονομάζεται **ψευδοβαθμωτό**.)



Σχήμα 1.16

1.2 Διαφορικός λογισμός

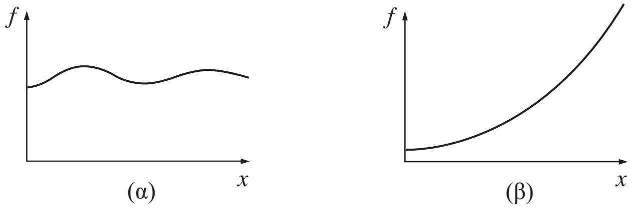
1.2.1 «Συνήθεις» παράγωγοι

Ερώτηση: Υποθέστε ότι έχουμε μία συνάρτηση μιας μεταβλητής: $f(x)$. Τι μας δίνει η παράγωγός της df/dx; *Απάντηση*: Μας λέει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η συνάρτηση $f(x)$ όταν αλλάζουμε τη μεταβλητή x κατά ένα απειροστό ποσό dx:

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx. \tag{1.33}$$

Με λόγια: Αν αλλάξουμε την x κατά ένα dx, τότε η f αλλάζει κατά ένα df· η παράγωγος είναι ο συντελεστής αναλογίας. Για παράδειγμα, στο Σχ. 1.17(α), η συνάρτηση μεταβάλλεται αργά καθώς αλλάζει η x και η παράγωγος είναι κατ' αντιστοιχία μικρή. Στο Σχ. 1.17(β) η f αυξάνεται γρήγορα με την x και η παράγωγος γίνεται μεγάλη καθώς απομακρύνεστε από το σημείο $x = 0$.

Γεωμετρική ερμηνεία. Η παράγωγος df/dx είναι η *κλίση* της καμπύλης $f(x)$.



Σχήμα 1.17

1.2.2 Κλίση

Υποθέστε, στη συνέχεια, ότι έχουμε μία συνάρτηση *τριών* μεταβλητών – σαν τη θερμοκρασία, ας πούμε, $T(x, y, z)$ σε ένα δωμάτιο. (Ξεκινώντας από μία γωνία του δωματίου, τοποθετήστε ένα σύστημα αξόνων· η T τότε θα δίνει τη θερμοκρασία κάθε σημείου με συντεταγμένες (x, y, z) στο δωμάτιο.) Θέλουμε να γενικεύσουμε την έννοια της «παραγώγου» για συναρτήσεις όπως η T, που εξαρτώνται όχι από *μία* αλλά από *τρεις* μεταβλητές.

Υποτίθεται, τώρα, ότι η παράγωγος μας λέει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται μία συνάρτηση όταν μετακινηθούμε κατά μία μικρή απόσταση. Εδώ όμως το πρόβλημα είναι πιο πολύπλοκο, διότι προφανώς η παράγωγος θα εξαρτάται και από την *κατεύθυνση* προς την οποία θα κινηθούμε: Αν πάμε προς τα πάνω (προς την οροφή), η θερμοκρασία πιθανώς να αυξηθεί αρκετά γρήγορα, αλλά αν κινηθούμε οριζοντίως, μπορεί να μην αλλάξει καθόλου. Εν ολίγοις, η ερώτηση «Πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η $T(x, y, z)$;» έχει ένα άπειρο πλήθος απαντήσεων, μία για κάθε κατεύθυνση που επιλέγουμε να εξερευνήσουμε.

Ευτυχώς, το πρόβλημα δεν είναι τόσο πολύπλοκο όσο φαίνεται. Σύμφωνα με ένα θεώρημα για τις μερικές παραγώγους,

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz. \tag{1.34}$$

Ο κανόνας αυτός μας λέει πόσο μεταβάλλεται η T αν αλλάξουμε τις τρεις μεταβλητές κατά απειροστά ποσά dx, dy και dz. Παρατηρήστε ότι *δεν* χρειαζόμαστε άπειρο πλήθος παραγώγων – *τρεις* μόνο φτάνουν: οι *μερικές* παράγωγοι κατά μήκος κάθε μιας από τις τρεις κατευθύνσεις των αξόνων.

Η Εξίσωση (1.34) φέρνει στο νου ένα εσωτερικό γινόμενο:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot (dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}})$$

$$= \quad (\nabla T) \cdot (d\mathbf{l}), \tag{1.35}$$

όπου

$$\nabla T \equiv \frac{\partial T}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \tag{1.36}$$

είναι η **κλίση** της T· είναι μία *διανυσματική* ποσότητα με τρεις συνιστώσες και αποτελεί τη γενίκευση της παραγώγου που αναζητούμε. Η Εξίσωση (1.35) είναι η τριδιάστατη εκδοχή της (1.33).

Γεωμετρική Ερμηνεία της Κλίσης. Όπως κάθε διάνυσμα, η κλίση έχει *μέτρο* και *κατεύθυνση*. Για να προσδιορίσουμε το γεωμετρικό της νόημα, ας ξαναγράψουμε το εσωτερικό γινόμενο (1.35) στη γενική μορφή:

$$dT = \nabla T \cdot d\mathbf{l} = |\nabla T||d\mathbf{l}|\cos\theta, \tag{1.37}$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των ∇T και $d\mathbf{l}$. Κρατώντας, τώρα, *σταθερό* το *μέτρο* του $|d\mathbf{l}|$ και διερευνώντας τις διάφορες κατευθύνσεις (μεταβάλλοντας, δηλαδή, την θ), είναι προφανές ότι η *μέγιστη* μεταβολή της T παρατηρείται στην κατεύθυνση $\theta = 0$ (αφού τότε θα είναι $\cos\theta = 1$). Συνεπώς, με το $|d\mathbf{l}|$ σταθερό, το dT παίρνει τη μέγιστη τιμή του αν κινηθώ *προς την κατεύθυνση* του ∇T. Έτσι,

> *Η κλίση ∇T δείχνει προς την κατεύθυνση της μέγιστης αύξησης της συνάρτησης T.*

Επιπλέον,

> *Το μέτρο $|\nabla T|$ μας δίνει την κλίση (δηλαδή τον ρυθμό αύξησης) της T στην κατεύθυνση αυτή της μέγιστης αύξησής της.*

Φανταστείτε ότι βρίσκεστε στην πλαγιά ενός λόφου. Κοιτάξτε γύρω σας και βρείτε προς ποια κατεύθυνση η ανάβαση είναι δυσκολότερη. Αυτή είναι η *κατεύθυνση* της κλίσης. Μετρήστε τώρα την *κλίση* της πλαγιάς προς αυτή την κατεύθυνση (το πηλίκο του ύψους προς το αντίστοιχο μήκος). Αυτό είναι το *μέτρο* της κλίσης. (Η συνάρτηση για την οποία μιλάμε εδώ είναι το ύψος του λόφου, και οι συντεταγμένες από τις οποίες εξαρτάται είναι, ας πούμε, το γεωγραφικό μήκος και το γεωγραφικό πλάτος. Η συνάρτηση αυτή εξαρτάται μόνο από *δύο* μεταβλητές, όχι *τρεις*, το γεωμετρικό όμως νόημα της κλίσης γίνεται ευκολότερα αντιληπτό σε δύο διαστάσεις.) Παρατηρήστε από την (1.37) ότι η κατεύθυνση της πιο απότομης *καθόδου* είναι αντίθετη από την κατεύθυνση της πιο απότομης *ανόδου*, ενώ σε γωνία $90°$ προς τη διεύθυνση αυτή η κλίση είναι μηδέν (το διάνυσμα της κλίσης τέμνει κάθετα τις ισοϋψείς καμπύλες). Μπορείτε να φανταστείτε επιφάνειες που δεν έχουν τέτοιες ιδιότητες, δεν θα αντιστοιχούν όμως σε παραγωγίσιμες συναρτήσεις γιατί θα έχουν «σπασίματα».

Τι σημαίνει άραγε μηδενική κλίση; Αν $\nabla T = 0$ στο (x, y, z) τότε $dT = 0$ για μικρές μετατοπίσεις γύρω από το σημείο (x, y, z). Αυτό, λοιπόν, είναι ένα **στάσιμο σημείο** της συνάρτησης $T(x, y, z)$. Μπορεί να είναι ένα μέγιστο (κορυφή) ή ένα ελάχιστο (κοιλάδα) ή κάποιο σαγματικό σημείο (πέρασμα) ή κάποιο σημείο καμπής («ράχη»).

Πρόκειται για κατάσταση ανάλογη με εκείνη των συναρτήσεων *μιας* μεταβλητής, όπου ένας μηδενισμός της παραγώγου σηματοδοτεί την ύπαρξη μεγίστου, ελαχίστου ή σημείου καμπής της συνάρτησης. Ειδικότερα, αν θέλετε να εντοπίσετε τα ακρότατα μιας συνάρτησης τριών μεταβλητών, βρείτε πρώτα τα σημεία όπου μηδενίζεται η κλίση.

Παράδειγμα 1.3

Βρείτε την κλίση του $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (το μέτρο του διανύσματος θέσης).

Λύση:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} r &= \frac{\partial r}{\partial x}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial r}{\partial y}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial r}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\hat{\mathbf{z}} \\
&= \frac{x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}.
\end{aligned}$$

Βγάζει νόημα το αποτέλεσμα; Λοιπόν, το νόημά του είναι ότι η απόσταση από την αρχή των αξόνων αυξάνεται με τον ταχύτερο ρυθμό στην ακτινική διεύθυνση, και ότι ο *ρυθμός* αύξησής της σε αυτήν την κατεύθυνση είναι 1… ακριβώς ό,τι αναμέναμε.

Πρόβλημα 1.11 Βρείτε τις κλίσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$.

(β) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$.

(γ) $f(x, y, z) = e^x \sin(y) \ln(z)$.

Πρόβλημα 1.12 Το ύψος κάποιου λόφου (σε πόδια) δίνεται από την

$$h(x, y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12),$$

όπου x και y είναι αντίστοιχα οι αποστάσεις (σε μίλια) ανατολικά και βόρεια κάποιας συγκεκριμένης πόλης (που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων).

(α) Σε ποιο σημείο βρίσκεται η κορυφή του λόφου;

(β) Πόσο είναι το ύψος του;

(γ) Πόσο απότομη είναι η κλίση του λόφου (σε πόδια ανά μίλι) σ' ένα σημείο που βρίσκεται 1 μίλι ανατολικά και 1 μίλι βόρεια της πόλης; Προς ποια κατεύθυνση, στο σημείο αυτό, η κλίση του λόφου γίνεται πιο απότομη;

• **Πρόβλημα 1.13** Έστω $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ το διάνυσμα απόστασης από κάποιο σταθερό σημείο (x', y', z') στο σημείο (x, y, z) και έστω $\mathscr{r}$ το μήκος του. Δείξτε ότι

(α) $\boldsymbol{\nabla}(\mathscr{r}^2) = 2\boldsymbol{\mathscr{r}}$.

(β) $\boldsymbol{\nabla}(1/\mathscr{r}) = -\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}/\mathscr{r}^2$.

(γ) Ποιος είναι ο *γενικός* τύπος για το $\boldsymbol{\nabla}(\mathscr{r}^n)$;

! **Πρόβλημα 1.14** Υποθέστε ότι η f είναι μία συνάρτηση μόνο δύο μεταβλητών (y και z). Δείξτε ότι η κλίση $\nabla f = (\partial f/\partial y)\hat{\mathbf{y}} + (\partial f/\partial z)\hat{\mathbf{z}}$ μετασχηματίζεται σε στροφές όπως στην (1.29), δηλ. σαν διάνυσμα. [*Υπόδειξη:* $(\partial f/\partial \overline{y}) = (\partial f/\partial y)(\partial y/\partial \overline{y}) + (\partial f/\partial z)(\partial z/\partial \overline{y})$, (και ο τύπος για το $\partial f/\partial \overline{z}$ είναι παρόμοιος). Γνωρίζετε ότι $\overline{y} = y\cos\phi + z\sin\phi$, $\overline{z} = -y\sin\phi + z\cos\phi$· «λύστε» τις εξισώσεις αυτές ως προς y και z (σαν συναρτήσεις των $\overline{y}$ και $\overline{z}$) και υπολογίστε τις απαραίτητες παραγώγους $\partial y/\partial \overline{y}$, $\partial z/\partial \overline{y}$, κ.λπ.].

1.2.3 Ο τελεστής ∇

Η κλίση μοιάζει με ένα διάνυσμα, ∇, που «πολλαπλασιάζει» ένα βαθμωτό μέγεθος T:

$$\nabla T = \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)T. \tag{1.38}$$

(Γράφω τα μοναδιαία διανύσματα *αριστερά*, ώστε να μη νομίζει κανείς ότι εννοώ π.χ. $\partial\hat{\mathbf{x}}/\partial x$ – πράγμα που ισούται με μηδέν αφού το $\hat{\mathbf{x}}$ είναι σταθερό. Ο παράγοντας που βρίσκεται στην παρένθεση της (1.38) ονομάζεται «**ντελ**»:

$$\boxed{\nabla = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}.} \tag{1.39}$$

Το ντελ, βεβαίως, *δεν* είναι διάνυσμα, με τη συνήθη έννοια. Πράγματι, δεν έχει κάποιο συγκεκριμένο νόημα, παρά μόνο αν του δώσουμε μία βαθμωτή συνάρτηση για να δράσει πάνω της. Επιπλέον, δεν «πολλαπλασιάζεται» με την T· είναι μάλλον κάτι σαν εντολή για την *παραγώγιση* αυτής της συνάρτησης. Για να είμαστε ακριβείς, λοιπόν, θα έπρεπε να πούμε ότι το ∇ είναι ένας **διανυσματικός τελεστής** που *δρα πάνω* στην T, όχι ένα διάνυσμα που την πολλαπλασιάζει.

Και όμως, παρά τα ξεχωριστά αυτά προσόντα που διαθέτει, το ∇ ουσιαστικά μιμείται με κάθε τρόπο τη συμπεριφορά ενός απλού διανύσματος: σχεδόν οποιαδήποτε πράξη γίνεται με τα άλλα διανύσματα, μπορεί επίσης να γίνει και με το ∇, αν αντικαταστήσουμε απλώς τη φράση «πολλαπλασιάζει» με τη φράση «δρα πάνω της». Πρέπει, επομένως, να πάρετε στα σοβαρά το διανυσματικό προσωπείο του ∇: πρόκειται για ένα έξοχο δείγμα απλοποίησης του συμβολισμού, πράγμα που θα αναγκαστείτε να αναγνωρίσετε αν τύχει να διαβάσετε ποτέ την πρωτότυπη εργασία του Maxwell για τον ηλεκτρομαγνητισμό, που γράφτηκε χωρίς ουσιαστικά να χρησιμοποιηθεί το σύμβολο ∇.

Ως γνωστόν, ένα κοινό διάνυσμα $\mathbf{A}$ πολλαπλασιάζεται με τρεις τρόπους:

1. Πολλαπλασιάζεται με ένα βαθμωτό a: $\mathbf{A}a$

2. Πολλαπλασιάζεται με ένα άλλο διάνυσμα $\mathbf{B}$, μέσω του εσωτερικού γινομένου $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

3. Πολλαπλασιάζεται με ένα άλλο διάνυσμα, μέσω του εξωτερικού γινομένου $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

Κατ’ αντιστοιχία υπάρχουν τρεις τρόποι με τους οποίους μπορεί να δράσει ο τελεστής $\boldsymbol{\nabla}$:

1. Πάνω σε μια βαθμωτή συνάρτηση T: $\boldsymbol{\nabla}T$ (η κλίση)·
2. Πάνω σε μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{v}$, μέσω του εσωτερικού γινομένου: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}$ (η **απόκλιση**)·
3. Πάνω σε μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{v}$, μέσω του εξωτερικού γινομένου: $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}$ (ο **στροβιλισμός**).

Ήδη μιλήσαμε για την κλίση. Στις επόμενες παραγράφους εξετάζουμε τα άλλα δύο είδη διανυσματικών παραγώγων: την απόκλιση και τον στροβιλισμό.

1.2.4 Η απόκλιση

Από τον ορισμό του $\boldsymbol{\nabla}$ έχουμε

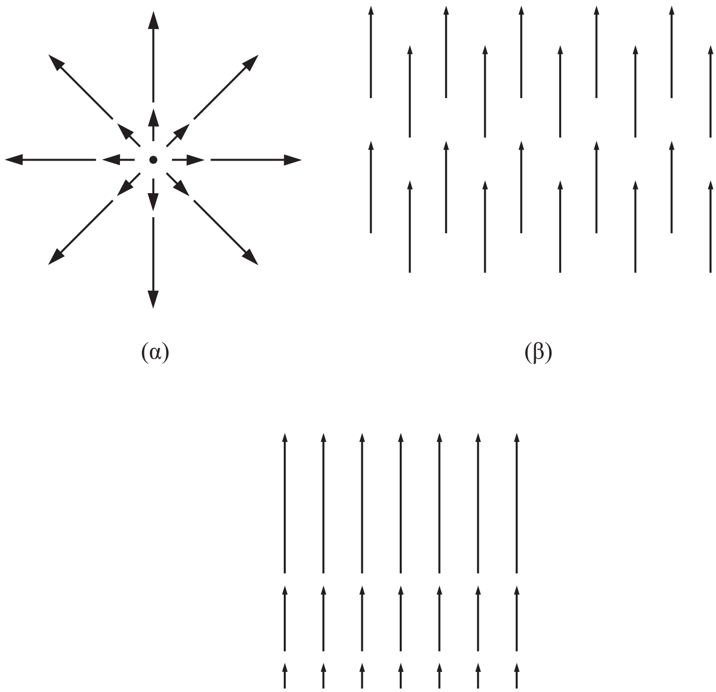
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} &= \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}}) \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Παρατηρήστε ότι η απόκλιση μιας *διανυσματικής* συνάρτησης είναι ένα *βαθμωτό μέγεθος*. (Δεν είναι δυνατό να υπάρχει η απόκλιση ενός βαθμωτού: δεν έχει νόημα.)

Γεωμετρική ερμηνεία: Ορθώς έχει επιλεγεί το όνομα **απόκλιση**, διότι το $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}$ μας δείχνει κατά πόσο το διάνυσμα $\mathbf{v}$ εκπηγάζει (αποκλίνει) από το υπό συζήτηση σημείο. Η διανυσματική συνάρτηση του Σχ. 1.18(α) έχει μεγάλη (θετική) απόκλιση στο κέντρο (αν τα βέλη δείχνανε προς τα *μέσα*, η απόκλιση θα ήταν η ίδια αλλά *αρνητική*.) Από την άλλη, η συνάρτηση του Σχ. 1.18(β) έχει μηδέν απόκλιση, ενώ η συνάρτηση του Σχ. 1.18(γ) έχει πάλι θετική απόκλιση. (Σας παρακαλώ να καταλάβετε ότι οι *τιμές της συνάρτησης* $\mathbf{v}$ *είναι διανύσματα* – δηλαδή, σε κάθε σημείο του χώρου αντιστοιχεί ένα διαφορετικό διάνυσμα. Στα σχήματα, βέβαια, το μόνο που μπορώ να κάνω είναι να σχεδιάσω τα βέλη σε λίγα αντιπροσωπευτικά σημεία.) Φανταστείτε ότι στέκεστε στην όχθη μιας μικρής ήρεμης λίμνης. Σκορπίστε λίγο πριονίδι, ή μερικές πευκοβελόνες ή ό,τι έχετε πρόχειρο στην επιφάνεια. Αν το υλικό που σκορπίσατε απλώνεται προς τα έξω, τότε το έχετε ρίξει σ’ ένα σημείο με θετική απόκλιση· αν μαζευτεί τότε το έχετε ρίξει σ’ ένα σημείο με αρνητική απόκλιση. (Σύμφωνα με το πρότυπο αυτό, η υπό συζήτηση διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{v}$ δεν είναι παρά η ταχύτητα του νερού στην επιφάνεια της λίμνης – είναι ένα *διδιάστατο* παράδειγμα, αλλά βοηθάει να αποκτήσουμε μια «αίσθηση» τι σηματοδοτεί η απόκλιση. Ένα σημείο θετικής απόκλισης λέγεται «πηγή» ενώ ένα σημείο αρνητικής απόκλισης λέγεται «χοάνη»).

Παράδειγμα 1.4

Έστω ότι οι διανυσματικές συναρτήσεις στο Σχ. 1.18 είναι οι: $\mathbf{v}_a = \mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{v}_b = \hat{\mathbf{z}}$, και $\mathbf{v}_c = z\,\hat{\mathbf{z}}$. Υπολογίστε τις αποκλίσεις τους.



(α) (β)

(γ)

Σχήμα 1.18

Λύση:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}_a = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Όπως περιμέναμε, αυτή η διανυσματική συνάρτηση έχει θετική απόκλιση.

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}_b = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 0 + 0 + 0 = 0,$$

επίσης αναμενόμενο.

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}_c = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 0 + 0 + 1 = 1.$$

Πρόβλημα 1.15 Υπολογίστε την απόκλιση των παρακάτω διανυσματικών συναρτήσεων:

(α) $\mathbf{v}_a = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\,\hat{\mathbf{y}} - 2xz\,\hat{\mathbf{z}}$.

(β) $\mathbf{v}_b = xy\,\hat{\mathbf{x}} + 2yz\,\hat{\mathbf{y}} + 3zx\,\hat{\mathbf{z}}$.

(γ) $\mathbf{v}_c = y^2\,\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\,\hat{\mathbf{y}} + 2yz\,\hat{\mathbf{z}}$.

• **Πρόβλημα 1.16** Σχεδιάστε τη διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

και υπολογίστε την απόκλισή της. Ίσως εκπλαγείτε από την απάντηση ... μπορείτε να την εξηγήσετε;

! **Πρόβλημα 1.17** Δείξτε ότι στις δύο διαστάσεις η απόκλιση μετασχηματίζεται σε στροφές σαν βαθμωτό μέγεθος. [*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε την (1.29) για να προσδιορίσετε τα $\overline{v}_y$ και $\overline{v}_z$, και τη μέθοδο του Προβλήματος 1.14 για να υπολογίσετε τις παραγώγους. Πρέπει δηλαδή να δείξετε ότι $\partial\overline{v}_y/\partial\overline{y} + \partial\overline{v}_z/\partial\overline{z} = \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z$.]

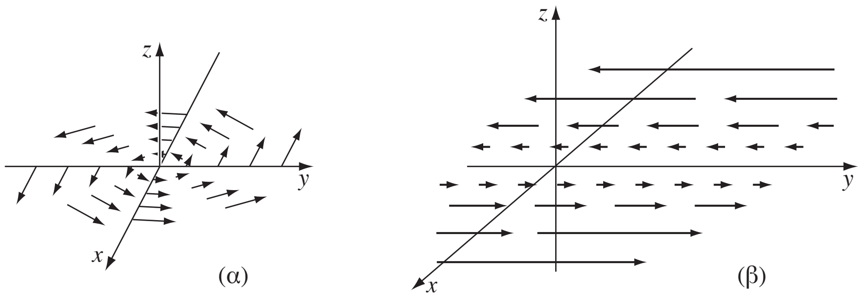
1.2.5 Ο στροβιλισμός

Από τον ορισμό του $\boldsymbol{\nabla}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Σημειώστε ότι ο στροβιλισμός μιας διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{v}$ είναι (όπως όλα τα εξωτερικά γινόμενα) *διάνυσμα*. (Δεν είναι δυνατόν να υπάρχει ο στροβιλισμός ενός βαθμωτού μεγέθους: δεν έχει νόημα.)

Γεωμετρική ερμηνεία: Ορθώς έχει επιλεγεί το όνομα *στροβιλισμός*, διότι το $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}$ είναι μέτρο του κατά πόσο το διάνυσμα $\mathbf{v}$ «στροβιλίζεται» (σχηματίζει δίνη) γύρω από κάθε συγκεκριμένο σημείο. Επομένως, οι τρεις διανυσματικές συναρτήσεις στο Σχ. 1.18 έχουν όλες μηδενικό στροβιλισμό (όπως μπορείτε εύκολα να δείτε και μόνοι σας), ενώ αντιθέτως ο στροβιλισμός των πεδίων που απεικονίζονται στο Σχ. 1.19 είναι μεγάλος. Πράγματι, ο στροβιλισμός αυτός έχει την κατεύθυνση του θετικού άξονα z, πράγμα σύμφωνο με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Φανταστείτε (ξανά) ότι στέκεστε στην όχθη μιας μικρής ήρεμης λίμνης. Τοποθετήστε τώρα έναν μικρό τροχό (που μπορείτε να φτιάξετε μόνοι σας με έναν φελλό, καρφώνοντας πάνω του μερικές οδοντογλυφίδες που δείχνουν ακτινικά προς τα έξω). Αν αρχίσει να περιστρέφεται, τότε τον τοποθετήσατε σ' ένα σημείο μη μηδενικού *στροβιλισμού*. Μία δίνη είναι σημείο με μεγάλο στροβιλισμό.



Σχήμα 1.19

Παράδειγμα 1.5

Έστω ότι η συνάρτηση του Σχ. 1.19(α) είναι η $\mathbf{v}_a = -y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}$, και αυτή του Σχ. 1.19(β) είναι η $\mathbf{v}_b = x\hat{\mathbf{y}}$. Υπολογίστε τους στροβιλισμούς τους.

Λύση:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}_a = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\hat{\mathbf{z}},$$

και

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}_b = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{z}}.$$

Όπως περιμέναμε, οι στροβιλισμοί αυτοί έχουν την κατεύθυνση του θετικού άξονα z. (Παρεμπιπτόντως, και οι δύο συναρτήσεις έχουν μηδενική απόκλιση, όπως μπορείτε να δείτε και από τις εικόνες: τίποτα δεν «απλώνεται προς τα έξω» – απλώς «στροβιλίζεται» γύρω-γύρω.)

Πρόβλημα 1.18 Υπολογίστε τους στροβιλισμούς των τριών διανυσματικών συναρτήσεων του Προβλήματος 1.15.

Πρόβλημα 1.19 Βρείτε μία διανυσματική συνάρτηση που να έχει μηδέν απόκλιση και στροβιλισμό παντού. (Και μία *σταθερά*, βεβαίως, είναι αρκετή· προσπαθήστε όμως να βρείτε κάποια λίγο πιο ενδιαφέρουσα συνάρτηση!)

1.2.6 Κανόνες γινομένων

Ο υπολογισμός των συνήθων παραγώγων διευκολύνεται από κάποιους γενικούς κανόνες, όπως ο κανόνας της πρόσθεσης,

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx},$$

ο κανόνας του πολλαπλασιασμού με μία σταθερά,

$$\frac{d}{dx}(kf) = k\frac{df}{dx},$$

ο κανόνας του γινομένου,

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx},$$

και ο κανόνας του πηλίκου,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}.$$

Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν για τις διανυσματικές παραγώγους. Έτσι,

$$\boldsymbol{\nabla}(f+g) = \boldsymbol{\nabla}f + \boldsymbol{\nabla}g, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}),$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) + (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}),$$

και

$$\boldsymbol{\nabla}(kf) = k\boldsymbol{\nabla}f, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot(k\mathbf{A}) = k(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}), \qquad \boldsymbol{\nabla}\times(k\mathbf{A}) = k(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}),$$

όπως μπορείτε να δείτε και μόνοι σας. Οι κανόνες όμως των γινομένων δεν είναι τόσο απλοί. Υπάρχουν δύο τρόποι να κατασκευαστεί ένα βαθμωτό μέγεθος ως γινόμενο δύο συναρτήσεων:

fg (γινόμενο δύο βαθμωτών συναρτήσεων),
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ (εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσματικών συναρτήσεων),

και δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί να παραχθεί ένα διάνυσμα

$f\mathbf{A}$ (βαθμωτό επί διάνυσμα),
$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ (εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων).

Υπάρχουν, κατ' αντιστοιχία, *έξι* κανόνες γινομένων. Δύο για κλίσεις:

(i) $$\boldsymbol{\nabla}(fg) = f\boldsymbol{\nabla}g + g\boldsymbol{\nabla}f,$$

(ii) $$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A},$$

δύο για αποκλίσεις

(iii) $$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\mathbf{A}) = f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}f),$$

(iv) $$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}),$$

και δύο για στροβιλισμούς

(v) $$\boldsymbol{\nabla} \times (f\mathbf{A}) = f(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\boldsymbol{\nabla} f),$$

(vi) $$\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} + \mathbf{A}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}).$$

Επειδή θα χρειάζεται να ανατρέχετε συχνά στους κανόνες αυτούς, τους έβαλα αμέσως μετά το μπροστινό εξώφυλλο για να μπορείτε να τους βρίσκετε εύκολα. Οι αποδείξεις προκύπτουν άμεσα χρησιμοποιώντας τους κανόνες γινομένου των συνήθων παραγώγων. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fA_z) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}A_x + f\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}A_y + f\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}A_z + f\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) \\
&= (\boldsymbol{\nabla} f) \cdot \mathbf{A} + f(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}).
\end{aligned}$$

Υπάρχουν, επίσης, τρεις κανόνες πηλίκων

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g\boldsymbol{\nabla} f - f\boldsymbol{\nabla} g}{g^2}, \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\mathbf{A}}{g}\right) &= \frac{g(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} g)}{g^2}, \\
\boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{\mathbf{A}}{g}\right) &= \frac{g(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\boldsymbol{\nabla} g)}{g^2}.
\end{aligned}$$

Από τη στιγμή όμως που οι κανόνες αυτοί θυμίζουν έντονα τον αντίστοιχο κανόνα των συνήθων παραγώγων, δεν θεώρησα απαραίτητο να τους συμπεριλάβω στο εσωτερικό του μπροστινού εξωφύλλου.

Πρόβλημα 1.20 Αποδείξτε τους κανόνες γινομένων (i), (iv), και (v).

Πρόβλημα 1.21

(α) Αν οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι δύο διανυσματικές συναρτήσεις, τι νόημα έχει η έκφραση $(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}$; (Ποιες είναι, δηλαδή, οι x, y, και z συνιστώσες της συναρτήσει των καρτεσιανών συνιστωσών των $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, και $\boldsymbol{\nabla}$;)

(β) Υπολογίστε το $(\hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\hat{\mathbf{r}}$, όπου $\hat{\mathbf{r}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο ορίστηκε στην Εξ. (1.21).

(γ) Για τις συναρτήσεις του Προβλήματος 1.15 υπολογίστε το $(\mathbf{v}_a \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}_b$.

Πρόβλημα 1.22 (Για μαζοχιστές(-τριες) μόνο.) Αποδείξτε τους κανόνες γινομένου (ii) και (vi). Αναζητήστε τον ορισμό του γινομένου $(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}$ στο Πρόβλημα 1.21.

Πρόβλημα 1.23 Επαληθεύστε τους κανόνες των πηλίκων.

Πρόβλημα 1.24

(α) Επαληθεύστε τον κανόνα γινομένου (iv) (υπολογίζοντας κάθε μέλος χωριστά) για τις συναρτήσεις

$$\mathbf{A} = x\,\hat{\mathbf{x}} + 2y\,\hat{\mathbf{y}} + 3z\,\hat{\mathbf{z}}, \qquad \mathbf{B} = 3y\,\hat{\mathbf{x}} - 2x\,\hat{\mathbf{y}}.$$

(β) Κάντε το ίδιο για τον κανόνα γινομένου (ii).

(γ) Το ίδιο για τον κανόνα (vi).

1.2.7 Δεύτερες παράγωγοι

Όλες οι πρώτες παράγωγοι που μπορούμε να σχηματίσουμε με το $\boldsymbol{\nabla}$ είναι η κλίση, η απόκλιση και ο στροβιλισμός· δρώντας με το $\boldsymbol{\nabla}$ *δύο* φορές μπορούμε να σχηματίσουμε πέντε είδη *δεύτερων* παραγώγων. Αφού η κλίση $\boldsymbol{\nabla}T$ είναι *διάνυσμα*, μπορούμε να βρούμε την *απόκλιση* και τον *στροβιλισμό* της. Έχουμε λοιπόν

(1) Την απόκλιση της κλίσης: $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}T)$.

(2) Τον στροβιλισμό της κλίσης: $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}T)$.

Επειδή η απόκλιση $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}$ είναι μέγεθος *βαθμωτό*, το μόνο που μπορούμε είναι να βρούμε την *κλίση* της. Επομένως:

(3) Κλίση της απόκλισης: $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})$.

Ο στροβιλισμός $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}$ είναι *διάνυσμα*, άρα μπορούμε να βρούμε την *απόκλιση* και τον *στροβιλισμό* του:

(4) Απόκλιση του στροβιλισμού: $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})$.

(5) Στροβιλισμός του στροβιλισμού: $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})$.

Τα πέντε αυτά είδη δεύτερης παραγώγου εξαντλούν τις δυνατότητες και, στην πραγματικότητα, δεν προσφέρουν όλα τους κάτι καινούριο. Ας τα εξετάσουμε λεπτομερώς ένα-ένα:

$$\begin{aligned}
(1) \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}T) &= \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) \\
&= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \qquad (1.42)
\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα, που συντομότερα το γράφουμε $\nabla^2 T$, ονομάζεται **Λαπλασιανή** του T· θα το εξετάσουμε λεπτομερώς παρακάτω. Σημειώστε ότι η Λαπλασιανή ενός *βαθμωτού* μεγέθους είναι επίσης *βαθμωτό* μέγεθος. Συχνά, εν τούτοις, θα γίνεται λόγος και για τη Λαπλασιανή ενός *διανύσματος* $\nabla^2\mathbf{v}$. Με αυτό θα εννοούμε μια *διανυσματική* ποσότητα που η x συνιστώσα της είναι η Λαπλασιανή της v_x, κ.λπ.:[3]

$$\nabla^2\mathbf{v} \equiv (\nabla^2 v_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 v_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 v_z)\hat{\mathbf{z}}. \tag{1.43}$$

Αυτό είναι απλώς μια χρήσιμη *επέκταση* της σημασίας του συμβόλου ∇^2.

(2) Ο στροβιλισμός της κλίσης είναι πάντα *μηδέν*:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} T) = 0. \tag{1.44}$$

Το σημαντικό αυτό αποτέλεσμα θα το χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές· είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του $\boldsymbol{\nabla}$, όπως μπορείτε εύκολα να δείτε (Εξίσωση (1.39)). *Προσοχή όμως*: ίσως σκεφθείτε ότι η Εξίσωση (1.44) είναι εντελώς «προφανής» – δεν ισούται άραγε με $(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla})T$, και δεν είναι πάντα μηδέν το εξωτερικό γινόμενο οποιουδήποτε διανύσματος (στην προκειμένη περίπτωση του $\boldsymbol{\nabla}$) με τον εαυτό του; Ο συλλογισμός αυτός, όμως, είναι απλώς *υποδεικτικός* και όχι *αποδεικτικός*, αφού το $\boldsymbol{\nabla}$ είναι ένας *τελεστής* και δεν *«πολλαπλασιάζεται»* με τον συνήθη τρόπο. Η (1.44) απορρέει ουσιαστικά από την ισότητα των μεικτών παραγώγων:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{1.45}$$

Αν νομίζετε ότι όλα αυτά που αναφέρω δεν είναι απαραίτητα, σκεφθείτε το διάνυσμα

$$(\boldsymbol{\nabla} T) \times (\boldsymbol{\nabla} S).$$

Είναι *άραγε* πάντα μηδέν; (*Θα ήταν*, βεβαίως, αν και το $\boldsymbol{\nabla}$ ήταν ένα συνηθισμένο διάνυσμα).

(3) Το $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v})$, για κάποιους λόγους, το συναντάμε σπάνια σε φυσικές εφαρμογές και δεν του έχει δοθεί κάποιο ειδικό όνομα – είναι απλώς η *κλίση της απόκλισης*. Παρατηρήστε ότι το $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v})$ *δεν* είναι το ίδιο με τη Λαπλασιανή ενός διανύσματος: $\nabla^2\mathbf{v} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} \neq \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v})$.

(4) Η απόκλιση του στροβιλισμού, όπως ο στροβιλισμός της κλίσης, είναι *πάντα* μηδέν:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}) = 0. \tag{1.46}$$

Μπορείτε να το αποδείξετε μόνοι σας. (Υπάρχει πάλι μία γρήγορη αλλά «ψεύτικη» απόδειξη, που χρησιμοποιεί τη διανυσματική ταυτότητα $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$.)

(5) Από τον ορισμό του $\boldsymbol{\nabla}$ μπορείτε να ελέγξετε ότι:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2\mathbf{v}. \tag{1.47}$$

Επομένως, ο στροβιλισμός του στροβιλισμού δεν μας δίνει τίποτα καινούριο· ο πρώτος όρος είναι απλώς η παράγωγος αριθμός 3 και ο δεύτερος η Λαπλασιανή (ενός διανύσματος). (Η (1.47) χρησιμοποιείται συχνά για να δοθεί ένας *γενικός ορισμός* της

[3] Σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, όπου τα μοναδιαία διανύσματα εξαρτώνται από τη θέση, πρέπει να παραγωγίζονται και αυτά (δείτε την Παράγραφο 1.4.1).

Λαπλασιανής ενός διανύσματος, επειδή η (1.43) ισχύει μόνο στις Καρτεσιανές συντεταγμένες.)

Άρα, δύο μόνο είδη δεύτερης παραγώγου υπάρχουν: η Λαπλασιανή (που είναι θεμελιώδους σημασίας) και η κλίση της απόκλισης (που συναντάται σπανίως). Ακολουθώντας την ίδια τυπική διαδικασία, μπορούμε να διερευνήσουμε τις *τρίτες* παραγώγους, αλλά, ευτυχώς, οι δεύτερες παράγωγοι είναι πρακτικά επαρκείς για όλα τα φυσικά προβλήματα.

Και ένα τελευταίο σχόλιο για τον διανυσματικό λογισμό. Απορρέει, *στο σύνολό του*, από τον τελεστή $\boldsymbol{\nabla}$, και από το ότι παίρνουμε σοβαρά υπ' όψη τον διανυσματικό του χαρακτήρα. Ακόμα και *μόνο* τον ορισμό του $\boldsymbol{\nabla}$ αν θυμόσασταν, θα ήσασταν ικανοί, θεωρητικά, να αναπαράγετε όλα τα υπόλοιπα.

Πρόβλημα 1.25 Υπολογίστε τη Λαπλασιανή των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $T_a = x^2 + 2xy + 3z + 4$.

(β) $T_b = \sin x \sin y \sin z$.

(γ) $T_c = e^{-5x} \sin 4y \cos 3z$.

(δ) $\mathbf{v} = x^2\,\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\,\hat{\mathbf{y}} - 2xz\,\hat{\mathbf{z}}$.

Πρόβλημα 1.26 Αποδείξτε ότι η απόκλιση του στροβιλισμού ισούται με μηδέν. *Ελέγξτε* το αυτό για τη συνάρτηση $\mathbf{v}_a$ του Προβλήματος 1.15.

Πρόβλημα 1.27 Αποδείξτε ότι ο στροβιλισμός της κλίσης ισούται με μηδέν. *Ελέγξτε* το αυτό για τη συνάρτηση (β) του Προβλήματος 1.11.

1.3 Ολοκληρωτικός λογισμός

1.3.1 Επικαμπύλια, επιφανειακά, και χωρικά ολοκληρώματα

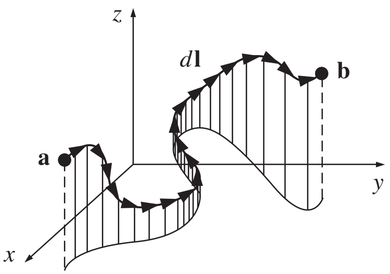
Στην ηλεκτροδυναμική συναντάμε διάφορα είδη ολοκληρωμάτων, μεταξύ των οποίων τα σημαντικότερα είναι τα **επικαμπύλια ολοκληρώματα**, τα **επιφανειακά ολοκληρώματα** (ή αλλιώς **ροής**), και τα **ολοκληρώματα όγκου**.

(α) **Επικαμπύλια ολοκληρώματα.** Ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γράφεται με την παρακάτω μορφή

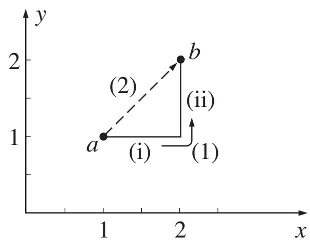
$$\int_{\mathbf{a}\,\mathcal{P}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}, \tag{1.48}$$

όπου $\mathbf{v}$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση, $d\mathbf{l}$ είναι το διάνυσμα της απειροστής μετατόπισης (1.22), και η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος μιας προκαθορισμένης καμπύλης $\mathcal{P}$ από το σημείο $\mathbf{a}$ μέχρι το σημείο $\mathbf{b}$ (Σχ. 1.20). Αν η εν λόγω καμπύλη είναι κλειστή (δηλαδή, αν $\mathbf{b} = \mathbf{a}$), βάζουμε ένα κυκλάκι στο σύμβολο του ολοκληρώματος:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}. \tag{1.49}$$



Σχήμα 1.20



Σχήμα 1.21

Σε κάθε σημείο της καμπύλης παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της $\mathbf{v}$ (που υπολογίζεται σε αυτό το σημείο) επί την μετατόπιση $d\mathbf{l}$ μέχρι το επόμενο σημείο της καμπύλης. Για έναν φυσικό, το πιο γνωστό παράδειγμα επικαμπύλιου ολοκληρώματος είναι το έργο που παράγει μια δύναμη F: $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$.

Συνήθως η τιμή ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος εξαρτάται καίρια από τη συγκεκριμένη καμπύλη μεταξύ των σημείων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, αλλά υπάρχει μια ειδική κατηγορία διανυσματικών συναρτήσεων για τις οποίες η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος είναι *ανεξάρτητη* της καμπύλης και καθορίζεται πλήρως από τα άκρα. Σε εύθετο χρόνο θα περιγράψουμε την ειδική αυτή κατηγορία διανυσματικών πεδίων. (Μια *δύναμη* που χαρακτηρίζεται από αυτήν την ιδιότητα λέγεται **διατηρητική**.)

Παράδειγμα 1.6

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\mathbf{v} = y^2\,\hat{\mathbf{x}} + 2x(y+1)\,\hat{\mathbf{y}}$ από το σημείο $\mathbf{a} = (1,1,0)$ μέχρι το σημείο $\mathbf{b} = (2,2,0)$, κατά μήκος των διαδρομών (1) και (2) του Σχ. 1.21. Πόσο είναι το $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ για τον βρόχο που ξεκινά από το $\mathbf{a}$, φτάνει στο $\mathbf{b}$ κατά μήκος της (1), και επιστρέφει στο $\mathbf{a}$ κατά μήκος της (2);

Λύση: Όπως πάντα, $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$. Η διαδρομή (1) αποτελείται από δύο τμήματα. Κατά μήκος του «οριζόντιου» τμήματος έχουμε $dy = dz = 0$, επομένως

(i) $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}},\ y = 1,\ \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = y^2\,dx = dx$, οπότε $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 dx = 1$.

Στο «κατακόρυφο» τμήμα έχουμε $dx = dz = 0$, συνεπώς

(ii) $d\mathbf{l} = dy\,\hat{\mathbf{y}},\ x = 2,\ \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2x(y+1)\,dy = 4(y+1)\,dy$, οπότε

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 4\int_1^2 (y+1)\,dy = 10.$$

Για τη διαδρομή (1) έχουμε

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 1 + 10 = 11.$$

Εν τω μεταξύ, στη διαδρομή (2) ισχύει $x = y,\ dx = dy$, και $dz = 0$, οπότε

$d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}},\ \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = x^2\,dx + 2x(x+1)\,dx = (3x^2 + 2x)\,dx,$

επομένως

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (3x^2 + 2x)\, dx = (x^3 + x^2)\Big|_1^2 = 10.$$

(Στρατηγική μας είναι να τα εκφράσουμε όλα ως προς μία μεταβλητή· εξίσου καλά θα μπορούσαμε, απαλείφοντας το x, να τα εκφράσουμε όλα ως προς το y.)

Για τον βρόχο που ακολουθεί αρχικά την (1) και *επιστρέφει* μέσω της (2), έχουμε

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 11 - 10 = 1.$$

(β) **Επιφανειακά Ολοκληρώματα.** Ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα γράφεται με την παρακάτω μορφή

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}, \tag{1.50}$$

όπου $\mathbf{v}$ είναι πάλι κάποια διανυσματική συνάρτηση, και $d\mathbf{a}$ είναι το στοιχειώδες εμβαδόν, με κατεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια (Σχ. 1.22). Υπάρχουν, βέβαια, *δύο* κάθετες κατευθύνσεις σε κάθε επιφάνεια, οπότε το *πρόσημο* ενός επιφανειακού ολοκληρώματος έχει μια εγγενή απροσδιοριστία. Αν η επιφάνεια είναι *κλειστή* (σχηματίζοντας ένα «μπαλόνι»), όπου πάλι βάζουμε ένα κυκλάκι στο σύμβολο του ολοκληρώματος

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a},$$

τότε κατά σύμβαση η «προς τα έξω» κατεύθυνση είναι θετική, ενώ για ανοιχτές επιφάνειες καθορίζεται αυθαίρετα. Αν το $\mathbf{v}$ περιγράφει τη ροή ενός ρευστού (διερχόμενη μάζα ανά μονάδα επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου), τότε το $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$ αναπαριστά τη συνολική μάζα ανά μονάδα χρόνου που διαπερνά την επιφάνεια – εξ ου και ο εναλλακτικός όρος, «ροή».

Συνήθως η τιμή ενός επιφανειακού ολοκληρώματος εξαρτάται από τη συγκεκριμένη επιφάνεια που επιλέγουμε, αλλά υπάρχει μια ειδική κατηγορία διανυσματικών συναρτήσεων για τις οποίες η τιμή είναι *ανεξάρτητη* της επιφάνειας, και καθορίζεται εξ ολοκλήρου από το σύνορό της. Σύντομα θα είμαστε σε θέση να χαρακτηρίσουμε την ειδική αυτή κατηγορία.

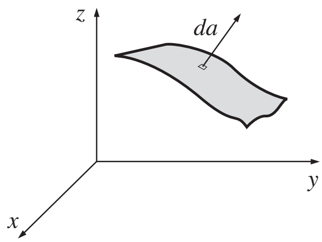
Παράδειγμα 1.7

Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα της $\mathbf{v} = 2xz\,\hat{\mathbf{x}} + (x+2)\,\hat{\mathbf{y}} + y(z^2 - 3)\,\hat{\mathbf{z}}$ πάνω στις πέντε πλευρές (εκτός από την κάτω) του κυβικού κουτιού (πλευράς 2) στο Σχ. 1.23. Έστω ότι η «προς τα πάνω και προς τα έξω» κατεύθυνση είναι η θετική, όπως δείχνουν τα βέλη.

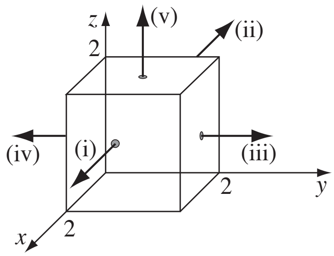
Λύση: Αν πάρουμε μία μία τις πλευρές έχουμε:

(i) $x = 2,\ d\mathbf{a} = dy\, dz\, \hat{\mathbf{x}},\ \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = 2xz\, dy\, dz = 4z\, dy\, dz$, άρα

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = 4 \int_0^2 dy \int_0^2 z\, dz = 16.$$



Σχήμα 1.22



Σχήμα 1.23

(ii) $x = 0,\ d\mathbf{a} = -dy\,dz\,\hat{\mathbf{x}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = -2xz\,dy\,dz = 0$, άρα

$$\int \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = 0.$$

(iii) $y = 2,\ d\mathbf{a} = dx\,dz\,\hat{\mathbf{y}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = (x+2)\,dx\,dz$, άρα

$$\int \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = \int_0^2 (x+2)\,dx \int_0^2 dz = 12.$$

(iv) $y = 0,\ d\mathbf{a} = -dx\,dz\,\hat{\mathbf{y}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = -(x+2)\,dx\,dz$, άρα

$$\int \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = -\int_0^2 (x+2)\,dx \int_0^2 dz = -12.$$

(v) $z = 2,\ d\mathbf{a} = dx\,dy\,\hat{\mathbf{z}},\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = y(z^2-3)\,dx\,dy = y\,dx\,dy$, άρα

$$\int \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = \int_0^2 dx \int_0^2 y\,dy = 4.$$

Προφανώς η *συνολική* ροή είναι

$$\int_{\text{επιφάνεια}} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{a} = 16 + 0 + 12 - 12 + 4 = 20.$$

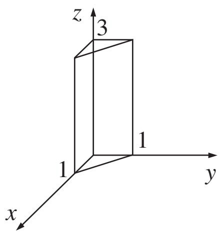
(γ) **Ολοκληρώματα όγκου.** Ένα ολοκλήρωμα όγκου γράφεται με την παρακάτω μορφή

$$\int_{\mathcal{V}} T\,d\tau, \tag{1.51}$$

όπου T είναι μια βαθμωτή συνάρτηση και $d\tau$ είναι ο στοιχειώδης όγκος. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$d\tau = dx\,dy\,dz. \tag{1.52}$$

Για παράδειγμα, αν T είναι η πυκνότητα μιας ουσίας (η οποία μπορεί να μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο), τότε το ολοκλήρωμα όγκου θα αντιστοιχεί στη συνολική μάζα



Σχήμα 1.24

της ουσίας. Ενίοτε θα συναντούμε ολοκληρώματα όγκου *διανυσματικών* συναρτήσεων:

$$\int \mathbf{v}\, d\tau = \int (v_x\, \hat{\mathbf{x}} + v_y\, \hat{\mathbf{y}} + v_z\, \hat{\mathbf{z}}) d\tau = \hat{\mathbf{x}} \int v_x d\tau + \hat{\mathbf{y}} \int v_y d\tau + \hat{\mathbf{z}} \int v_z d\tau. \quad (1.53)$$

Τα μοναδιαία διανύσματα, όντας σταθερά, βγαίνουν έξω από το ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 1.8

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα όγκου της $T = xyz^2$ για το πρίσμα του Σχ. 1.24.

Λύση: Τα τρία ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν με οποιαδήποτε σειρά. Ας δούμε πρώτα το x: πηγαίνει από το 0 ώς το $(1-y)$· μετά το y (πάει από το 0 ώς το 1)· και τέλος το z (πάει από το 0 ώς το 3):

$$\int T\, d\tau = \int_0^3 z^2 \left\{ \int_0^1 y \left[\int_0^{1-y} x\, dx \right] dy \right\} dz =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^3 z^2\, dz \int_0^1 (1-y)^2 y\, dy = \tfrac{1}{2}(9)(\tfrac{1}{12}) = \tfrac{3}{8}.$$

Πρόβλημα 1.28 Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{v} = x^2\, \hat{\mathbf{x}} + 2yz\, \hat{\mathbf{y}} + y^2\, \hat{\mathbf{z}}$ από την αρχή των αξόνων μέχρι το σημείο (1,1,1) μέσω τριών διαφορετικών διαδρομών:

(α) $(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,1,0) \to (1,1,1)$.

(β) $(0,0,0) \to (0,0,1) \to (0,1,1) \to (1,1,1)$.

(γ) Μέσω ευθείας γραμμής.

(δ) Πόσο είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα επάνω στην κλειστή καμπύλη που ακολουθεί αρχικά τη διαδρομή (α) και *επιστρέφει* κατά μήκος της (β);

Πρόβλημα 1.29 Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα της συνάρτησης του Παραδείγματος 1.7, πάνω στη *βάση* του κουτιού. Για λόγους συνέπειας, θεωρήστε την «προς τα πάνω» κατεύθυνση θετική. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα για αυτή την συνάρτηση εξαρτάται μόνο από το σύνορο; Ποια είναι η συνολική ροή διαμέσου της *κλειστής* επιφάνειας του κουτιού (*συμπεριλαμβανομένης* της βάσης); [*Σημείωση:* Για την *κλειστή* επιφάνεια η θετική κατεύθυνση είναι η «προς τα έξω», και συνεπώς η «προς τα κάτω» για την κάτω πλευρά.]

Πρόβλημα 1.30 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα όγκου της συνάρτησης $T = z^2$ στο τετράεδρο με γωνίες τα σημεία (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), και (0,0,1).

1.3.2 Το θεμελιώδες θεώρημα της ανάλυσης

Υποθέστε ότι η $f(x)$ είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής. Το **θεμελιώδες θεώρημα της ανάλυσης** λέει ότι:

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a). \tag{1.54}$$

Αν δυσκολεύεστε να αναγνωρίσετε αυτή την εξίσωση, ας τη γράψουμε αλλιώς:

$$\int_a^b F(x)\, dx = f(b) - f(a),$$

όπου $df/dx = F(x)$. Το θεμελιώδες θεώρημα σας λέει πώς να ολοκληρώσετε την $F(x)$: πρέπει να βρείτε μια συνάρτηση $f(x)$ που η *πρώτη της παράγωγος* ισούται με την F.

Γεωμετρική Ερμηνεία: Σύμφωνα με την Εξ. (1.33), το $df = (df/dx)dx$ είναι η απειροστή μεταβολή της f όταν πηγαίνετε από το (x) στο $(x + dx)$. Το θεμελιώδες θεώρημα (1.54) λέει ότι αν τεμαχίσετε το διάστημα από το a στο b (Σχ. 1.25) σε πολλά μικρά τμήματα dx και προσθέσετε τις μεταβολές df από κάθε μικρό τμήμα, το αποτέλεσμα (όχι απρόσμενα) θα ισούται με τη συνολική μεταβολή της f: $f(b) - f(a)$. Με άλλα λόγια, δύο είναι οι τρόποι για να βρείτε τη συνολική μεταβολή μιας συνάρτησης: *είτε* αφαιρώντας τις τιμές της στα άκρα, *είτε* βήμα-βήμα, προσθέτοντας όλες τις μικρές μεταβολές καθώς προχωράτε. Όποιο τρόπο και αν προτιμήσετε, η απάντηση είναι ίδια.

Παρατηρήστε τη δομή του θεμελιώδους θεωρήματος: *Το ολοκλήρωμα μιας παραγώγου σε κάποιο διάστημα υπολογίζεται από τις τιμές της συναρτήσεως στα άκρα (ή σύνορα) του διαστήματος.* Στον διανυσματικό λογισμό υπάρχουν τρία είδη παραγώγων (κλίση, απόκλιση και στροβιλισμός) και το καθένα έχει το δικό του «θεμελιώδες θεώρημα» με την ίδια ουσιαστικά διατύπωση. Δεν σκοπεύω να τα αποδείξω εδώ αυτά τα θεωρήματα· θα προσπαθήσω να εξηγήσω το *νόημά* τους, καθιστώντας τα έτσι πιο *ευλογοφανή*. Οι αποδείξεις δίνονται στο Παράρτημα Α.

1.3.3 Το θεμελιώδες θεώρημα για τις κλίσεις

Υποθέστε ότι έχουμε μία βαθμωτή συνάρτηση τριών μεταβλητών $T(x, y, z)$. Ξεκινώντας από το σημείο $\mathbf{a}$ μετακινούμαστε κατά μία μικρή απόσταση $d\mathbf{l}_1$ (Σχ. 1.26).