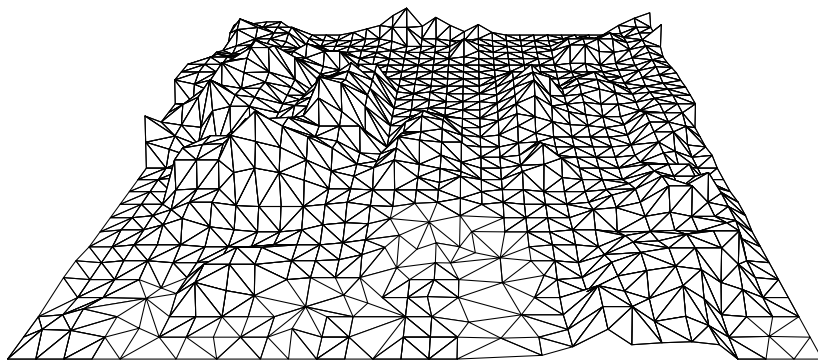
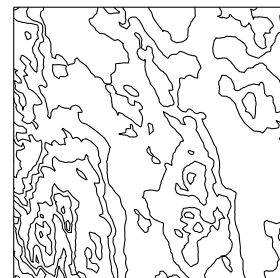


9 Τριγωνισμοί Delaunay

Παρεμβολή καθ' ύψος

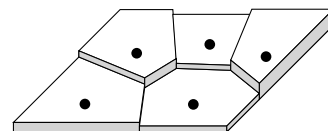
Όταν σε προηγούμενα κεφάλαια αναφερθήκαμε σε χάρτες ενός τμήματος της επιφάνειας της Γης, υποθέσαμε σιωπηρά ότι δεν υπάρχουν υψομετρικές διαφορές. Η παραδοχή αυτή πιθανόν να είναι εύλογη για μια χώρα όπως η Ολλανδία, αλλά είναι εντελώς άστοχη για την Ελβετία. Στο κεφάλαιο αυτό θα διορθώσουμε αυτήν την κατάσταση.

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα τμήμα της επιφάνειας της Γης με τη μορφή ενός *αναγλύφου*. Ανάγλυφο είναι μια διδιάστατη επιφάνεια στον τριδιάστατο χώρο με μια χαρακτηριστική ιδιότητα: κάθε κατακόρυφη ευθεία το τέμνει σε ένα το πολύ σημείο. Με άλλα λόγια, είναι το γράφημα μιας συνάρτησης $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ που αποδίδει ένα ύψος $f(p)$ σε κάθε σημείο p του πεδίου ορισμού, A , του αναγλύφου. (Δεδομένου ότι η Γη είναι σφαιρική, τα ανάγλυφα που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο δεν την αναπαριστούν καλά σε πλανητική κλίμακα. Σε πιο τοπικό επίπεδο, όμως, αποτελούν ένα αρκετά καλό μοντέλο.) Ένα ανάγλυφο μπορεί να απεικονιστεί μέσω ενός προοπτικού σχεδίου όπως αυτό του Σχήματος 9.1, ή μέσω ισουψών καμπυλών – γραμμών ίσου ύψους – όπως σε έναν τοπογραφικό χάρτη.

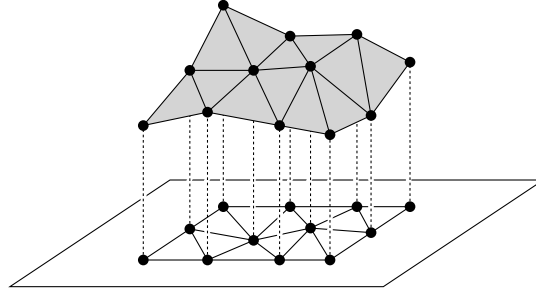


Σχήμα 9.1
Προοπτική άποψη αναγλύφου

Φυσικά, δεν γνωρίζουμε το ύψος κάθε σημείου της επιφάνειας της Γης: το γνωρίζουμε μόνο στα σημεία όπου το έχουμε μετρήσει. Αυτό σημαίνει ότι, όταν αναφερόμαστε σε κάποιο ανάγλυφο, οι τιμές της συνάρτησης f μας είναι γνωστές μόνο σε ένα πεπερασμένο σύνολο $P \subset A$ δειγματικών σημείων. Από το ύψος των δειγματικών σημείων θα πρέπει με κάποιον τρόπο να υπολογίσουμε προσεγγιστικά το ύψος στα υπόλοιπα σημεία του πεδίου ορισμού. Μια απλοϊκή μέθοδος είναι να αποδώσουμε σε κάθε $p \in A$ το ύψος του πλησιέστερου δειγματικού σημείου. Ωστόσο, με τον τρόπο αυτό προκύπτει ένα «στρωματικό» ανάγλυφο, που δεν φαίνεται πολύ φυσικό. Ως εκ τούτου, θα χρησιμοποιήσουμε την εξής μέθοδο για τον προσεγγιστικό υπολογισμό ενός αναγλύφου. Αρχικά υπολογίζουμε έναν *τριγωνισμό* του P : μια επίπεδη υποδιαίρεση στην οποία οι φραγμένες έδρες είναι τρίγωνα και οι κορυφές είναι τα σημεία του P . (Υποθέτουμε ότι τα δειγματικά σημεία είναι τέτοια ώστε το πεδίο ορισμού του

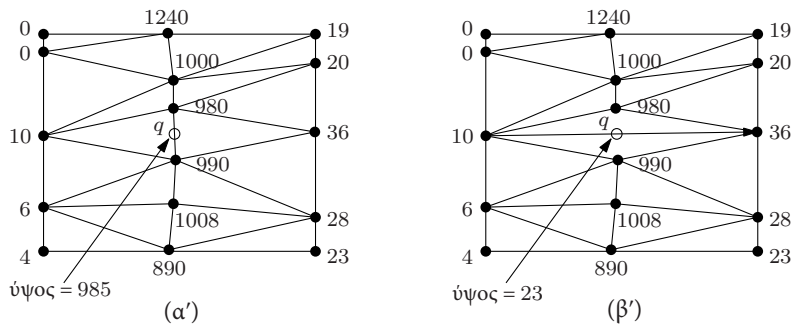


αναγλύφου να μπορεί να καλυφθεί από τα τρίγωνα.) Έπειτα ανυψώνουμε κάθε δειγματικό σημείο στο σωστό του ύψος, οπότε κάθε τρίγωνο του τριγωνισμού απεικονίζεται σε ένα τρίγωνο του τριδιάστατου χώρου. Η διαδικασία αυτή αναπαρίσταται στο Σχήμα 9.2. Το αποτέλεσμα είναι ένα πολυεδρικό ανάγλυφο, το γράφημα μιας συνεχούς, τμηματικά γραμμικής συνάρτησης. Αυτό το πολυεδρικό ανάγλυφο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προσέγγιση του πραγματικού αναγλύφου.



Σχήμα 9.2
Παραγωγή πολυεδρικού αναγλύφου από σύνολο δειγματικών σημείων

Το ερώτημα παραμένει: πώς τριγωνίζουμε το σύνολο των δειγματικών σημείων; Γενικά, αυτό μπορεί να επιτευχθεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Ποιος τριγωνισμός είναι όμως ο καταλληλότερος για τον σκοπό μας, δηλαδή για την προσεγγιστική αναπαράσταση ενός αναγλύφου; Στο ερώτημα αυτό δεν υπάρχει σαφής απάντηση. Δεν γνωρίζουμε το πραγματικό ανάγλυφο, γνωρίζουμε μόνο το ύψος του στα δειγματικά σημεία. Εφόσον δεν έχουμε καμία άλλη πληροφορία, και το ύψος στα δειγματικά σημεία είναι το σωστό ύψος υπό οποιονδήποτε τριγωνισμό, όλοι οι τριγωνισμοί του P φαίνονται εξίσου καλοί. Εντούτοις, κάποιοι τριγωνισμοί φαίνονται πιο φυσικοί από κάποιους άλλους. Ας εξετάσουμε για παράδειγμα το Σχήμα 9.3, όπου απεικονίζονται δύο τριγωνισμοί του ίδιου σημειοσυνόλου. Από τα ύψη των δειγματικών σημείων μάς δημιουργείται η εντύπωση ότι τα σημεία αυτά έχουν ληφθεί από τη ράχη ενός βουνού. Ο τριγωνισμός (α') αντανακλά αυτήν τη διαισθητική εικόνα. Αντιθέτως, ο τριγωνισμός (β'), στον οποίο μία μόνο ακμή έχει «μεταστραφεί», εισάγει μια στενή κοιλάδα που τέμνει κάθετα τη ράχη. Διαισθητικά, αυτό φαίνεται λανθασμένο. Θα μπορούσαμε άραγε να μετατρέψουμε αυτήν τη διαισθήση σε ένα κριτήριο από το οποίο να προκύπτει ότι ο τριγωνισμός (α') είναι καλύτερος από τον τριγωνισμό (β');



Σχήμα 9.3
Η μεταστροφή μιας ακμής μπορεί να έχει μεγάλη σημασία

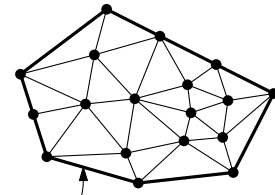
Το πρόβλημα με τον τριγωνισμό (β') είναι ότι το ύψος του σημείου q καθορίζεται από δύο σημεία που είναι σχετικά απομακρυσμένα. Αυτό συμβαίνει επειδή το q κείται στο μέσον μιας πλευράς δύο μακρόστενων και οξύληκτων τριγώνων. Το πρόβλημα οφείλεται στην «ισχνότητα» αυτών των τριγώνων. Από ό,τι φαίνεται, λοιπόν, ένας τριγωνισμός που περιέχει μικρές γωνίες είναι κακός. Συνεπώς, θα ταξινομούμε τους διάφορους τριγωνισμούς με βάση την ελάχιστη γωνία τους. Αν οι ελάχιστες γωνίες δύο τριγωνισμών είναι ίσες, τότε μπορούμε να εξετάσουμε τις αμέσως μεγαλύτερες γωνίες, κ.ο.κ. Δεδομένου ότι το πλήθος των δυνατών τριγωνισμών ενός δεδομένου σημειοσυνόλου P είναι πεπερασμένο, θα πρέπει να υπάρχει βέλτιστος τριγωνισμός, δηλαδή τριγωνισμός

που μεγιστοποιεί την ελάχιστη γωνία. Αυτός θα είναι ο ζητούμενος τριγωνισμός.

9.1 Τριγωνισμοί επίπεδων σημειοσυνόλων

Έστω $P := \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο. Για να μπορέσουμε να ορίσουμε τυπικά έναν τριγωνισμό του P , ορίζουμε αρχικά ως *μεγιστιαία επίπεδη υποδιαίρεση* μια υποδιαίρεση \mathcal{S} στην οποία δεν μπορεί να προστεθεί στην \mathcal{S} καμία ακμή που συνδέει δύο κορυφές χωρίς να καταστραφεί η επιπεδότητα. Με άλλα λόγια, κάθε ακμή που δεν ανήκει στην \mathcal{S} τέμνει κάποια από τις υπάρχουσες ακμές. Ορίζουμε ως *τριγωνισμό* του P μια μεγιστιαία επίπεδη υποδιαίρεση η οποία έχει σύνολο κορυφών το P .

Με τον ορισμό αυτό, είναι προφανές ότι υπάρχει τριγωνισμός. Αποτελείται όμως από τρίγωνα; Ναι, κάθε έδρα εκτός από τη μη φραγμένη πρέπει να είναι τρίγωνο: κάθε φραγμένη έδρα είναι ένα πολύγωνο, και όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 3 κάθε πολύγωνο μπορεί να τριγωνιστεί. Τι γίνεται με τη μη φραγμένη έδρα; Όπως μπορεί κανείς να αντιληφθεί εύκολα, κάθε ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο διαδοχικά σημεία επάνω στο σύνορο του κυρτού περιβλήματος του P αποτελεί ακμή σε οποιονδήποτε τριγωνισμό \mathcal{T} . Αυτό σημαίνει ότι η ένωση των φραγμένων εδρών του \mathcal{T} είναι πάντα το κυρτό περιβλήμα του P , και ότι η μη φραγμένη έδρα είναι πάντα το συμπλήρωμα του κυρτού περιβλήματος. (Στην εφαρμογή μας, αυτό σημαίνει ότι αν, π.χ., το πεδίο ορισμού είναι μια ορθογώνια περιοχή, θα πρέπει να φροντίσουμε τα ακραία σημεία του πεδίου ορισμού να συμπεριλαμβάνονται στο σύνολο των δειγματικών σημείων, έτσι ώστε τα τρίγωνα στον τριγωνισμό να καλύψουν το πεδίο ορισμού του αναγλύφου.) Το πλήθος των τριγώνων είναι το ίδιο σε κάθε τριγωνισμό του P . Το ίδιο ισχύει και για το πλήθος των ακμών. Τόσο το ένα όσο και το άλλο πλήθος εξαρτάται από το πλήθος των σημείων του P που βρίσκονται επάνω στο σύνορο του κυρτού περιβλήματος του P . (Σε αυτά τα σημεία προσμετρώνται και σημεία στο εσωτερικό ακμών του κυρτού περιβλήματος. Έτσι, το πλήθος των σημείων επάνω στο σύνορο του κυρτού περιβλήματος δεν είναι αναγκαστικά το ίδιο με το πλήθος των κορυφών του κυρτού περιβλήματος.) Η εξάρτηση αυτή περιγράφεται επακριβώς στο ακόλουθο θεώρημα.



σύνορο κυρτού περιβλήματος

Θεώρημα 9.1 Έστω P ένα σύνολο n σημείων στο επίπεδο, που δεν είναι όλα συνευθειακά, και k το πλήθος των σημείων του P που κείνται επάνω στο σύνορο του κυρτού περιβλήματος του P . Τότε σε κάθε τριγωνισμό του P υπάρχουν $2n - 2 - k$ τρίγωνα και $3n - 3 - k$ ακμές.

Απόδειξη. Έστω \mathcal{T} ένας τριγωνισμός του P , και m το πλήθος των τριγώνων του \mathcal{T} . Σημειωτέον ότι το πλήθος των εδρών του τριγωνισμού, το οποίο συμβολίζουμε με n_f , είναι $m + 1$. Κάθε τρίγωνο έχει τρεις ακμές, και η μη φραγμένη έδρα έχει k ακμές. Επιπλέον, κάθε ακμή προσπίπτει σε δύο ακριβώς έδρες. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος ακμών του \mathcal{T} είναι $n_e := (3m + k)/2$. Από τον τύπο του Euler έχουμε ότι

$$n - n_e + n_f = 2.$$

Θέτοντας στον τύπο τις τιμές των n_e και n_f , παίρνουμε $m = 2n - 2 - k$, από όπου στη συνέχεια έπεται ότι $n_e = 3n - 3 - k$. \square

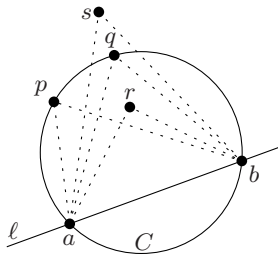
Έστω \mathcal{T} ένας τριγωνισμός του P , και ας υποθέσουμε ότι περιλαμβάνει m τρίγωνα. Ας εξετάσουμε τις $3m$ γωνίες των τριγώνων του \mathcal{T} , διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m}$ η προκύπτουσα ακολουθία γωνιών, όπου $\alpha_i \leq \alpha_j$, για $i < j$. Ορίζουμε ως *γωνιοδιάνυσμα* του \mathcal{T} το διάνυσμα $A(\mathcal{T}) := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m})$. Έστω \mathcal{T}' ένας άλλος τριγωνισμός του ίδιου σημειοσυνόλου P , και έστω $A(\mathcal{T}') := (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{3m})$ το γωνιοδιάνυσμά του. Λέμε

ότι το γωνιοδιάνυσμα του \mathcal{T} είναι μεγαλύτερο από το γωνιοδιάνυσμα του \mathcal{T}' αν το $A(\mathcal{T})$ είναι λεξικογραφικά μεγαλύτερο του $A(\mathcal{T}')$, ή, με άλλα λόγια, αν υπάρχει κάποιο i στο διάστημα $1 \leq i \leq 3m$ τέτοιο ώστε

$$\alpha_j = \alpha'_j \text{ για κάθε } j < i, \quad \text{και} \quad \alpha_i > \alpha'_i.$$

Η σχέση αυτή συμβολίζεται $A(\mathcal{T}) > A(\mathcal{T}')$. Ένας τριγωνισμός \mathcal{T} λέγεται *γωνιακά βέλτιστος* αν $A(\mathcal{T}) \geq A(\mathcal{T}')$ για κάθε τριγωνισμό \mathcal{T}' του P . Οι γωνιακά βέλτιστοι τριγωνισμοί μας ενδιαφέρουν γιατί, όπως είδαμε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου, ενδείκνυνται για την κατασκευή ενός πολυεδρικού αναγλύφου από ένα σύνολο δειγματικών σημείων.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε πότε ένας τριγωνισμός είναι γωνιακά βέλτιστος. Για τον σκοπό αυτό, είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε το ακόλουθο θεώρημα, που ονομάζεται συχνά «θεώρημα του Θαλή». Η μικρότερη γωνία που ορίζουν τρία σημεία p, q, r συμβολίζεται $\angle pqr$.

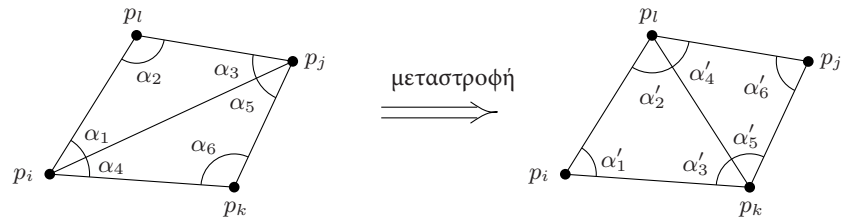


Θεώρημα 9.2 Έστω C ένας κύκλος, ℓ μια ευθεία που τέμνει τον C στα σημεία a και b , και p, q, r , και s σημεία που κείνται στην ίδια πλευρά της ℓ . Έστω ότι τα p και q κείνται επί του C , το r κείται εντός του C , και το s κείται εκτός του C . Στην περίπτωση αυτή,

$$\angle arb > \angle apb = \angle aqb > \angle asb.$$

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια μια ακμή $e = \overline{p_i p_j}$ ενός τριγωνισμού \mathcal{T} του P . Αν η e δεν είναι ακμή της μη φραγμένης έδρας, τότε προσπίπτει σε δύο τρίγωνα $p_i p_j p_k$ και $p_i p_j p_l$. Αν τα δύο αυτά τρίγωνα σχηματίζουν κυρτό τετράπλευρο, μπορούμε να πάρουμε έναν νέο τριγωνισμό \mathcal{T}' αφαιρώντας από τον \mathcal{T} την $\overline{p_i p_j}$ και εισάγοντας στη θέση της την $\overline{p_k p_l}$. Την πράξη αυτή την ονομάζουμε *μεταστροφή ακμής*. Η μόνη διαφορά στα γωνιοδιανύσματα των \mathcal{T} και \mathcal{T}' είναι οι

Σχήμα 9.4
Μεταστροφή ακμής



έξι γωνίες $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ του $A(\mathcal{T})$, που έχουν αντικατασταθεί στο $A(\mathcal{T}')$ από τις $\alpha'_1, \dots, \alpha'_6$. Η διαδικασία αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 9.4. Λέμε ότι η ακμή $e = \overline{p_i p_j}$ είναι *ανεπίτρεπτη* αν

$$\min_{1 \leq i \leq 6} \alpha_i < \min_{1 \leq i \leq 6} \alpha'_i.$$

Με άλλα λόγια, μια ακμή είναι ανεπίτρεπτη αν μεταστρέφοντάς την μπορούμε να αυξήσουμε τοπικά την ελάχιστη γωνία. Η παρατήρηση που ακολουθεί έπεται άμεσα από τον ορισμό της έννοιας της ανεπίτρεπτης ακμής.

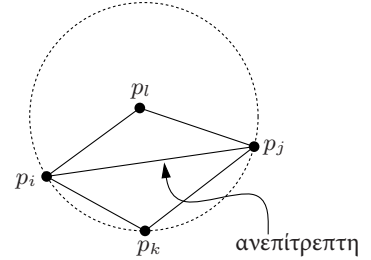
Παρατήρηση 9.3 Έστω \mathcal{T} ένας τριγωνισμός με μια ανεπίτρεπτη ακμή e . Εάν \mathcal{T}' είναι ο τριγωνισμός που προκύπτει από τον \mathcal{T} με μεταστροφή της e , τότε $A(\mathcal{T}') > A(\mathcal{T})$.

Σε πρακτικό επίπεδο, δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τις γωνίες $\alpha_1, \dots, \alpha_6, \alpha'_1, \dots, \alpha'_6$ για να ελέγξουμε αν μια δεδομένη ακμή είναι επιτρεπτή. Αντ' αυτού, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το απλό κριτήριο που διατυπώνεται στο ακόλουθο λήμμα. Η ορθότητα αυτού του κριτηρίου έπεται από το θεώρημα του Θαλή.

Λήμμα 9.4 Έστω ότι η ακμή $\overline{p_i p_j}$ προσπίπτει στα τρίγωνα $p_i p_j p_k$ και $p_i p_j p_l$ και έστω C ο κύκλος που διέρχεται από τα p_i, p_j , και p_k . Η ακμή $\overline{p_i p_j}$ είναι ανεπίτρεπτη αν και μόνο αν το σημείο p_l κείται στο εσωτερικό του C . Επιπλέον, αν τα σημεία p_i, p_j, p_k, p_l σχηματίζουν κυρτό τετράπλευρο και δεν κείνται επάνω στον ίδιο κύκλο, τότε ακριβώς μία από τις ακμές $\overline{p_i p_j}$ και $\overline{p_k p_l}$ είναι ανεπίτρεπτη.

Παρατηρούμε ότι το κριτήριο είναι συμμετρικό ως προς τα p_k και p_l : το p_l κείται εντός του κύκλου που διέρχεται από τα p_i, p_j, p_k αν και μόνο αν το p_k κείται εντός του κύκλου που διέρχεται από τα p_i, p_j, p_l . Όταν και τα τέσσερα σημεία κείνται επάνω στον ίδιο κύκλο, τότε αμφότερες οι $\overline{p_i p_j}$ και $\overline{p_k p_l}$ είναι επιτρεπτές. Σημειώτεον ότι τα δύο τρίγωνα που προσπίπτουν σε μια ανεπίτρεπτη ακμή πρέπει να σχηματίζουν κυρτό τετράπλευρο, έτσι ώστε μια ανεπίτρεπτη ακμή να μπορεί πάντα να μεταστραφεί.

Κάθε τριγωνισμός που δεν περιέχει ανεπίτρεπτες ακμές ονομάζεται *επιτρεπτός τριγωνισμός*. Από την παραπάνω παρατήρηση έπεται ότι κάθε γωνιακά βέλτιστος τριγωνισμός είναι επιτρεπτός. Ο υπολογισμός ενός επιτρεπτού τριγωνισμού είναι πολύ απλός, εφόσον μας δοθεί κάποιος αρχικός τριγωνισμός. Απλώς μεταστρέφουμε ανεπίτρεπτες ακμές έως ότου όλες οι ακμές να είναι επιτρεπτές.



Αλγόριθμος ΕΠΙΤΡΕΠΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΙΣΜΟΣ(\mathcal{T})

Είσοδος. Κάποιος τριγωνισμός \mathcal{T} ενός σημειοσυνόλου P .

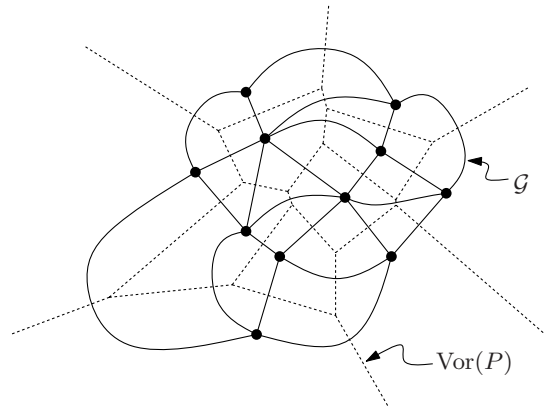
Έξοδος. Ένας επιτρεπτός τριγωνισμός του P .

1. ενόσω ο \mathcal{T} περιέχει κάποια ανεπίτρεπτη ακμή $\overline{p_i p_j}$
2. (* Μεταστρέφουμε την $\overline{p_i p_j}$ *)
3. Έστω $p_i p_j p_k$ και $p_i p_j p_l$ τα δύο παρακείμενα προς την $\overline{p_i p_j}$ τρίγωνα.
4. Αφαιρούμε από τον \mathcal{T} την $\overline{p_i p_j}$, και προσθέτουμε στη θέση της την $\overline{p_k p_l}$.
5. επιστροφή \mathcal{T}

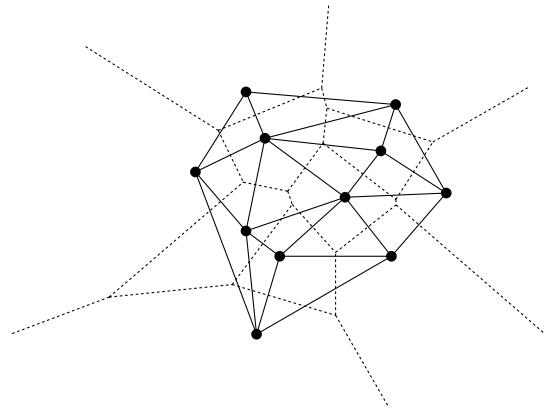
Πώς γνωρίζουμε ότι ο αλγόριθμος αυτός τερματίζει; Από την Παρατήρηση 9.3 έπεται ότι σε κάθε επανάληψη του βρόχου το γωνιοδιάλυμα του \mathcal{T} αυξάνεται. Δεδομένου ότι το πλήθος των διαφορετικών τριγωνισμών του P είναι πεπερασμένο, ο αλγόριθμος σίγουρα τερματίζει. Όταν τερματίσει, το αποτέλεσμα είναι ένας επιτρεπτός τριγωνισμός. Αν και ο αλγόριθμος τερματίζει σίγουρα, είναι τόσο αργός που δεν παρουσιάζει πρακτικό ενδιαφέρον. Ο λόγος που παρ' όλα αυτά τον παραθέσαμε παραπάνω είναι ότι αργότερα θα χρειαστούμε μια παρόμοια διαδικασία. Εν τω μεταξύ, θα εξετάσουμε κάτι εντελώς διαφορετικό –φαινομενικά τουλάχιστον.

9.2 Ο τριγωνισμός Delaunay

Έστω P ένα σύνολο n σημείων –ή εστιών, όπως θα τα αποκαλούμε μερικές φορές– στο επίπεδο. Υπενθυμίζουμε (βλ. Κεφάλαιο 7) ότι το διάγραμμα Voronoi του P είναι η υποδιαίρεση του επιπέδου σε n περιοχές, μία για κάθε εστία του P , για την οποία ισχύει ότι η περιοχή μιας εστίας $p \in P$ περιέχει όλα τα σημεία του επιπέδου που έχουν ως πλησιέστερη εστία το p . Το διάγραμμα Voronoi του P συμβολίζεται με $\text{Vor}(P)$. Η περιοχή μιας εστίας p λέγεται κυψελίδα Voronoi του p , και συμβολίζεται $\mathcal{V}(p)$. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε το δυϊκό γράφημα του διαγράμματος Voronoi. Αυτό το γράφημα \mathcal{G} περιέχει έναν κόμβο για κάθε κυψελίδα Voronoi –ισοδύναμα, για κάθε εστία– και ένα τόξο μεταξύ δύο κόμβων αν οι αντίστοιχες κυψελίδες έχουν μια κοινή ακμή. Παρατηρούμε ότι αυτό σημαίνει πως το \mathcal{G} έχει ένα τόξο για κάθε ακμή του $\text{Vor}(P)$. Όπως μπορείτε να δείτε στο Σχήμα 9.5, υπάρχει μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία ανάμεσα στις φραγμένες έδρες του \mathcal{G} και στις κορυφές του $\text{Vor}(P)$.



Σχήμα 9.5
Το δυϊκό γράφημα του $\text{Vor}(P)$

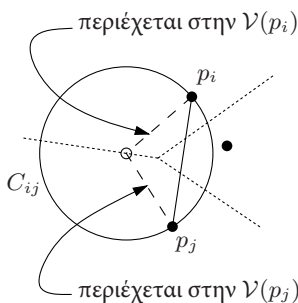


Σχήμα 9.6
Το γράφημα Delaunay $\mathcal{TD}(P)$

Ας θεωρήσουμε την ευθύγραμμη εναποτύπωση του \mathcal{G} , όπου ο κόμβος που αντιστοιχεί στην κυψελίδα Vorοποι $\mathcal{V}(p)$ είναι το σημείο p , και το τόξο που συνδέει τους κόμβους των κυψελίδων $\mathcal{V}(p)$ και $\mathcal{V}(q)$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα \overline{pq} –βλ. Σχήμα 9.6. Ονομάζουμε αυτή την εναποτύπωση *γράφημα Delaunay* του P , και τη συμβολίζουμε $\mathcal{TD}(P)$. (Αν και το όνομα ακούγεται γαλλικό, τα γραφήματα Delaunay δεν έχουν καμία σχέση με τον Γάλλο ζωγράφο. Πήραν το όνομά τους από τον ρώσο μαθηματικό Boris Nikolaevich Delone, του οποίου το όνομα γραφόταν στην κυριλλική ως «Борис Николаевич Делоне», και θα μεταγραφόταν στα αγγλικά ως «Delone». Ωστόσο, επειδή οι εργασίες του δημοσιεύονταν στα γαλλικά –στην εποχή του οι γλώσσες της επιστήμης ήταν τα γαλλικά και τα γερμανικά– το όνομά του είναι περισσότερο γνωστό με τη γαλλική μεταγραφή.) Όπως αποδεικνύεται, το γράφημα Delaunay ενός σημειοσυνόλου έχει αρκετές αναπάντεχες ιδιότητες. Η πρώτη είναι ότι πρόκειται πάντα για επίπεδο γράφημα: η εναποτύπωση δεν περιέχει κανένα ζεύγος τεμνόμενων ακμών.

Θεώρημα 9.5 Το γράφημα Delaunay ενός σημειοσυνόλου στο επίπεδο είναι επίπεδο γράφημα.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το θεώρημα αυτό, θα χρειαστούμε μια ιδιότητα των ακμών ενός διαγράμματος Vorοποι, την οποία διατυπώσαμε στο Θεώρημα 7.4(ii). Χάρην πληρότητας, επαναλαμβάνουμε την ιδιότητα αυτή, διατυπωμένη με όρους των γραφημάτων Delaunay.



Το γράφημα Delaunay $\mathcal{TD}(P)$ περιλαμβάνει την ακμή $\overline{p_i p_j}$ αν και μόνο αν υπάρχει κλειστός δίσκος C_{ij} ο οποίος έχει τα p_i και p_j επάνω στο σύνορό του και δεν έχει καμία άλλη εστία του P στο εσωτερικό του. (Το κέντρο ενός τέτοιου δίσκου κείται επάνω στην κοινή ακμή των $\mathcal{V}(p_i)$ και $\mathcal{V}(p_j)$.)

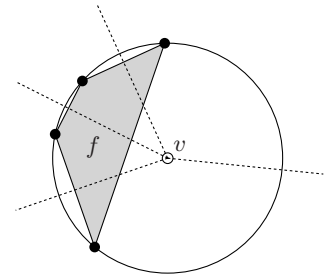
Ας ονομάσουμε t_{ij} το τρίγωνο με κορυφές τα p_i, p_j , και το κέντρο του C_{ij} . Σημειώτεον ότι η πλευρά του t_{ij} που συνδέει το p_i με το κέντρο του C_{ij} περιέχεται στην $\mathcal{V}(p_i)$: κάτι αντίστοιχο ισχύει και για το σημείο p_j . Έστω $\overline{p_k p_l}$ μια

άλλη ακμή του $\mathcal{FD}(P)$, και ας ορίσουμε τον κύκλο C_{kl} και το τρίγωνο t_{kl} παρόμοια προς τα C_{ij} και t_{ij} .

Ας υποθέσουμε, αντίθετα προς το αποδεδειγμένο, ότι οι $\overline{p_i p_j}$ και $\overline{p_k p_l}$ τέμνονται. Τόσο το p_k όσο και το p_l θα πρέπει να κείνται έξω από τον C_{ij} και συνεπώς κείνται επίσης έξω από το t_{ij} . Αυτό σημαίνει ότι η $\overline{p_k p_l}$ θα πρέπει να τέμνει μία από τις πλευρές του t_{ij} που προσπίπτουν στο κέντρο του C_{ij} . Αντίστοιχα, η $\overline{p_i p_j}$ θα πρέπει να τέμνει μία από τις πλευρές του t_{kl} που προσπίπτουν στο κέντρο του C_{kl} . Έπεται ότι μία από τις πλευρές του t_{ij} που προσπίπτουν στο κέντρο του C_{ij} θα πρέπει να τέμνει μία από τις πλευρές του t_{kl} που προσπίπτουν στο κέντρο του C_{kl} . Αυτό, όμως, είναι αδύνατον, αφού οι πλευρές αυτές περιέχονται σε ξένες μεταξύ τους κυψελίδες Voronoi. \square

Το γράφημα Delaunay του P είναι μια εναποτύπωση του δυϊκού γραφήματος του διαγράμματος Voronoi. Όπως παρατηρήσαμε νωρίτερα, έχει μία έδρα για κάθε κορυφή του $\text{Vor}(P)$. Οι ακμές στο σύνορο μιας έδρας αντιστοιχούν στις ακμές Voronoi που προσπίπτουν στην αντίστοιχη κορυφή Voronoi. Συγκεκριμένα, αν μια κορυφή v του $\text{Vor}(P)$ αποτελεί κορυφή των κυψελίδων Voronoi για τις εστίες $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$, τότε η αντίστοιχη έδρα f του $\mathcal{FD}(P)$ έχει ως κορυφές της τις $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.4(i), στην περίπτωση αυτή τα σημεία $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ κείνται επάνω σε έναν κύκλο γύρω από την v , και επομένως γνωρίζουμε όχι μόνο ότι η f είναι ένα k -γωνο, αλλά επιπλέον ότι είναι και κυρτό.

Αν τα σημεία του P είναι τυχαία καταναμημένα, η πιθανότητα τέσσερα από αυτά να κείνται επάνω σε έναν κύκλο είναι πολύ μικρή. Θα λέμε –στο κεφάλαιο αυτό– ότι ένα σύνολο σημείων βρίσκεται σε γενική θέση αν δεν περιέχει καμιά τετράδα σημείων επάνω σε κύκλο. Αν το P βρίσκεται σε γενική θέση, τότε όλες οι κορυφές του διαγράμματος Voronoi έχουν βαθμό τρία, και συνεπώς όλες οι φραγμένες έδρες του $\mathcal{FD}(P)$ είναι τρίγωνα. Αυτός είναι ο λόγος που το $\mathcal{FD}(P)$ αποκαλείται συχνά και *τριγωνισμός Delaunay* του P . Εμείς προτιμούμε να είμαστε κάπως πιο προσεκτικοί, και γι' αυτό θα αποκαλούμε το $\mathcal{FD}(P)$ *γράφημα Delaunay* του P . Ορίζουμε ως *τριγωνισμό Delaunay* οποιονδήποτε τριγωνισμό ο οποίος προκύπτει από το γράφημα Delaunay με την προσθήκη ακμών. Δεδομένου ότι όλες οι έδρες του $\mathcal{FD}(P)$ είναι κυρτές, η κατασκευή ενός τέτοιου τριγωνισμού είναι εύκολη. Παρατηρούμε ότι ο τριγωνισμός Delaunay του P είναι μοναδικός αν και μόνο αν το $\mathcal{FD}(P)$ αποτελεί τριγωνισμό, το οποίο ισχύει αν το P βρίσκεται σε γενική θέση.



Το Θεώρημα 7.4 για διαγράμματα Voronoi αναδιατυπώνεται με όρους γραφημάτων Delaunay ως εξής.

Θεώρημα 9.6 Έστω P ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο.

- (i) Τρία σημεία $p_i, p_j, p_k \in P$ αποτελούν κορυφές της ίδιας έδρας του γραφήματος Delaunay του P αν και μόνο αν ο κύκλος που διέρχεται από τα p_i, p_j, p_k δεν περιέχει στο εσωτερικό του κανένα σημείο του P .
- (ii) Δύο σημεία $p_i, p_j \in P$ σχηματίζουν ακμή του γραφήματος Delaunay του P αν και μόνο αν υπάρχει κλειστός δίσκος C που περιέχει τα p_i και p_j στο σύνορό του και δεν περιέχει κανένα άλλο σημείο του P .

Από το Θεώρημα 9.6 έπεται άμεσα το ακόλουθο συμπέρασμα σχετικά με τους τριγωνισμούς Delaunay.

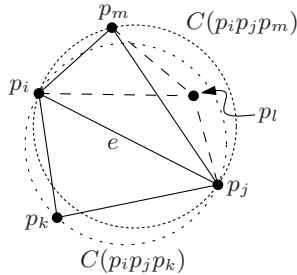
Θεώρημα 9.7 Έστω P ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο, και \mathcal{T} ένας τριγωνισμός του P . Ο \mathcal{T} είναι ένας τριγωνισμός Delaunay του P αν και μόνο αν κανένα σημείο του P δεν κείται στο εσωτερικό του περιγεγραμμένου κύκλου κάποιου τριγώνου του \mathcal{T} .

Όπως εξηγήσαμε νωρίτερα, για να είναι ένας τριγωνισμός καλός για τον σκοπό της παρεμβολής καθ' ύψος, θα πρέπει το γωνιοδιάγραμμά του να είναι

όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Επομένως, το επόμενο βήμα μας θα είναι να εξετάσουμε το γωνιοδιάνυσμα των τριγωνισμών Delaunay. Για τον σκοπό αυτό, θα πρέπει να κάνουμε μια μικρή παράκαμψη μέσω επιτρεπτών τριγωνισμών.

Θεώρημα 9.8 Έστω P ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο. Ένας τριγωνισμός \mathcal{T} του P είναι επιτρεπτός αν και μόνο αν είναι τριγωνισμός Delaunay του P .

Απόδειξη. Από τους ορισμούς, έπεται άμεσα ότι κάθε τριγωνισμός Delaunay είναι επιτρεπτός.



Θα αποδείξουμε ότι κάθε επιτρεπτός τριγωνισμός είναι τριγωνισμός Delaunay με εις άτοπον απαγωγή. Έστω λοιπόν ότι ο \mathcal{T} είναι ένας επιτρεπτός τριγωνισμός του P που δεν αποτελεί τριγωνισμό Delaunay. Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.6, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τρίγωνο $p_i p_j p_k$ τέτοιο ώστε ο περιγεγραμμένος κύκλος $C(p_i p_j p_k)$ να περιέχει στο εσωτερικό του κάποιο σημείο $p_l \in P$. Έστω ότι η $e := \overline{p_i p_j}$ είναι η πλευρά του τριγώνου $p_i p_j p_l$ για την οποία ισχύει ότι το τρίγωνο $p_i p_j p_l$ δεν τέμνει το $p_i p_j p_k$. Από όλα τα ζεύγη $(p_i p_j p_k, p_l)$ στον \mathcal{T} , επιλέγουμε εκείνο που μεγιστοποιεί τη γωνία $\angle p_i p_l p_j$. Ας εξετάσουμε στη συνέχεια το τρίγωνο $p_i p_j p_m$ που είναι παρακείμενο του $p_i p_j p_k$ με κοινή πλευρά την e . Δεδομένου ότι ο τριγωνισμός \mathcal{T} είναι επιτρεπτός, η e είναι επιτρεπτή. Από το Λήμμα 9.4, αυτό συνεπάγεται ότι το p_m δεν κείται στο εσωτερικό του $C(p_i p_j p_k)$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος $C(p_i p_j p_m)$ του $p_i p_j p_m$ περιέχει το τμήμα του $C(p_i p_j p_k)$ που χωρίζεται από το $p_i p_j p_k$ μέσω της e . Συνεπώς, $p_l \in C(p_i p_j p_m)$. Ας υποθέσουμε ότι το $\overline{p_j p_m}$ είναι η πλευρά του $p_i p_j p_m$ για την οποία ισχύει ότι το $p_j p_m p_l$ δεν τέμνει το $p_i p_j p_m$. Τώρα όμως από το θεώρημα του Θαλή έχουμε ότι $\angle p_j p_l p_m > \angle p_i p_l p_j$, πράγμα που αντιφάσκει προς την επιλογή του ζεύγους $(p_i p_j p_k, p_l)$. \square

Αφού κάθε γωνιακά βέλτιστος τριγωνισμός είναι οπωσδήποτε επιτρεπτός, από το Θεώρημα 9.8 συνεπάγεται ότι κάθε γωνιακά βέλτιστος τριγωνισμός του P είναι τριγωνισμός Delaunay του P . Όταν το P βρίσκεται σε γενική θέση, υπάρχει μόνο ένας επιτρεπτός τριγωνισμός, ο οποίος επομένως είναι και ο μοναδικός γωνιακά βέλτιστος τριγωνισμός, συγκεκριμένα ο μοναδικός τριγωνισμός Delaunay που συμπίπτει με το γράφημα Delaunay. Όταν το P δεν βρίσκεται σε γενική θέση, τότε οποιοσδήποτε τριγωνισμός του γραφήματος Delaunay είναι επιτρεπτός. Αυτοί οι τριγωνισμοί Delaunay πιθανόν να μην είναι όλοι τους γωνιακά βέλτιστοι. Ωστόσο, τα γωνιοδιανύσματά τους δεν διαφέρουν πάρα πολύ. Επιπλέον, μέσω του θεωρήματος του Θαλή μπορεί να αποδειχθεί ότι σε οποιονδήποτε τριγωνισμό ενός συνόλου σημείων που κείται επάνω σε κύκλο η ελάχιστη γωνία είναι η ίδια, δηλαδή η ελάχιστη γωνία είναι ανεξάρτητη από τον τριγωνισμό. Αυτό συνεπάγεται ότι κάθε τριγωνισμός που μετατρέπεται το γράφημα Delaunay σε τριγωνισμό Delaunay έχει την ίδια ελάχιστη γωνία. Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα.

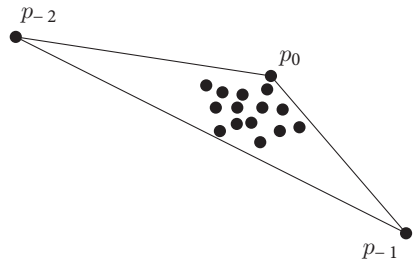
Θεώρημα 9.9 Έστω P ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο. Κάθε γωνιακά βέλτιστος τριγωνισμός του P είναι τριγωνισμός Delaunay του P . Επιπλέον, κάθε τριγωνισμός Delaunay του P μεγιστοποιεί την ελάχιστη γωνία ως προς όλους τους τριγωνισμούς του P .

9.3 Υπολογισμός του τριγωνισμού Delaunay

Όπως είδαμε, για τον σκοπό μας –την προσέγγιση ενός αναγλύφου μέσω της κατασκευής ενός πολυεδρικού αναγλύφου από ένα σύνολο P δειγματικών σημείων– ένας τριγωνισμός Delaunay του P είναι κατάλληλος. Ο λόγος είναι ότι ο τριγωνισμός Delaunay μεγιστοποιεί την ελάχιστη γωνία. Πώς λοιπόν υπολογίζουμε έναν τέτοιο τριγωνισμό Delaunay;

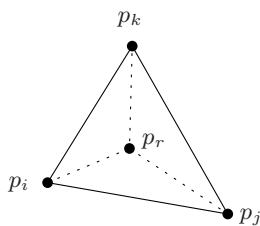
Από το Κεφάλαιο 7, γνωρίζουμε ήδη πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το διάγραμμα Voronoi του P . Από το $\text{Vor}(P)$ μπορούμε να προσδιορίσουμε εύκολα το γράφημα Delaunay $\mathcal{TD}(P)$, και να πάρουμε έναν τριγωνισμό Delaunay τριγωνίζοντας τις έδρες που έχουν περισσότερες από τρεις κορυφές. Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε μια διαφορετική τακτική: θα υπολογίσουμε έναν τριγωνισμό Delaunay άμεσα, χρησιμοποιώντας την τυχαιοκρατική αυξητική τεχνική που εφαρμόσαμε τόσο επιτυχημένα στο πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού στο Κεφάλαιο 4 και στο πρόβλημα του εντοπισμού σημείου στο Κεφάλαιο 6.

Στο Κεφάλαιο 6 μας διευκόλυνε να ξεκινήσουμε με ένα μεγάλο ορθογώνιο που περιείχε όλη τη σκηνή, ώστε να αποφύγουμε τα προβλήματα που προκαλούν τα μη φραγμένα τραπέζια. Στο ίδιο πνεύμα, θα ξεκινήσουμε με ένα μεγάλο τρίγωνο που περιέχει το σύνολο P . Θα προσθέσουμε δύο επιπλέον σημεία, p_{-1} και p_{-2} , τα οποία, μαζί με το υψηλότερο σημείο p_0 του P , σχηματίζουν ένα τρίγωνο που εμπεριέχει όλα τα σημεία. Αυτό σημαίνει ότι θα υπολογίσουμε έναν τριγωνισμό Delaunay του συνόλου $P \cup \{p_{-1}, p_{-2}\}$ αντί του P . Ο μετέπειτα στόχος μας είναι να πάρουμε τον τριγωνισμό Delaunay του P διαγράφοντας τα p_{-1} και p_{-2} μαζί με όλες τις προσπίπτουσες ακμές. Επομένως, θα πρέπει να επιλέξουμε τα p_{-1} και p_{-2} αρκετά απομακρυσμένα, έτσι ώστε να μην καταστραφεί κάποιο από τα τρίγωνα του τριγωνισμού Delaunay του P . Συγκεκριμένα, θα πρέπει να φροντίσουμε να μην βρίσκονται σε κανέναν κύκλο ο οποίος διέρχεται από τρία σημεία του P . Θα αναβάλουμε τις σχετικές λεπτομέρειες για αργότερα: προς το παρόν θα εξετάσουμε τον αλγόριθμο.

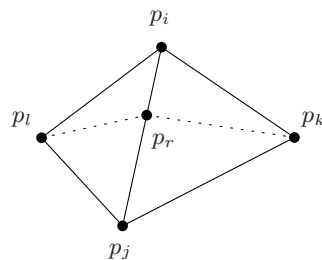


Ο αλγόριθμος είναι τυχαιοκρατικού αυξητικού τύπου, δηλαδή τα σημεία προστίθενται με τυχαία σειρά και τηρείται ένας τριγωνισμός Delaunay του τρέχοντος σημειοσυνόλου. Ας εξετάσουμε την προσθήκη ενός σημείου p_r . Κατ' αρχάς βρίσκουμε το τρίγωνο του τρέχοντος τριγωνισμού που περιέχει το p_r (το πώς γίνεται αυτό θα εξηγηθεί αργότερα) και προσθέτουμε ακμές από το p_r προς τις κορυφές αυτού του τριγώνου. Αν το p_r τύχει να βρίσκεται πάνω σε κάποια ακμή e του τριγωνισμού, θα πρέπει να προσθέσουμε ακμές από το p_r προς τις απέναντι κορυφές στα τρίγωνα που έχουν κοινή πλευρά την e . Οι δύο αυτές περιπτώσεις απεικονίζονται στο Σχήμα 9.7. Τώρα έχουμε και πάλι έναν τριγωνισμό, ο οποίος όμως πιθανόν να μην είναι τριγωνισμός Delaunay. Ο λόγος είναι ότι η προσθήκη του p_r μπορεί να καταστήσει κάποιες από τις υπάρχουσες ακμές ανεπίτρεπτες. Για αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα, καλούμε

το p_r κείται στο εσωτερικό τριγώνου



το p_r κείται επάνω σε ακμή



Σχήμα 9.7
Οι δύο δυνατές περιπτώσεις κατά την προσθήκη ενός σημείου p_r

μια διαδικασία ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ για κάθε ακμή που ενδέχεται να είναι ανεπίτρεπτη. Η διαδικασία αντικαθιστά ανεπίτρεπτες ακμές με επιτρεπτές μέσω μεταστροφής ακμών. Πριν εξετάσουμε τις λεπτομέρειές της, παραθέτουμε μια πλήρη περιγραφή του κυρίως αλγορίθμου. Για να διευκολύνουμε την ανάλυσή μας, θα θεωρήσουμε ότι το P είναι ένα σύνολο με $n + 1$ σημεία.

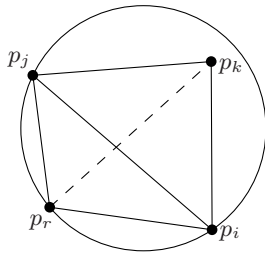
Αλγόριθμος ΤΡΙΓΩΝΙΣΜΟΣ DELAUNAY(P)

Είσοδος. Ένα σύνολο P από $n + 1$ σημεία στο επίπεδο.

Έξοδος. Ένας τριγωνισμός Delaunay του P .

1. Έστω p_0 το λεξικογραφικά υψηλότερο σημείο του P , δηλαδή το ακραίο δεξιό από τα σημεία με τη μεγαλύτερη τεταγμένη.
2. Έστω p_{-1} και p_{-2} δύο σημεία στο \mathbb{R}^2 σε αρκετά μεγάλη απόσταση και τέτοια ώστε το P να εμπεριέχεται στο τρίγωνο $p_0p_{-1}p_{-2}$.
3. Δημιουργούμε τον τριγωνισμό \mathcal{T} που αποτελείται από το μοναδικό τρίγωνο $p_0p_{-1}p_{-2}$.
4. Υπολογίζουμε μια τυχαία μετάθεση p_1, p_2, \dots, p_n του $P \setminus \{p_0\}$.
5. για $r \leftarrow 1$ έως n
6. (* Εισάγουμε το p_r στον \mathcal{T} : *)
7. Βρίσκουμε ένα τρίγωνο $p_i p_j p_k \in \mathcal{T}$ που περιέχει το p_r .
8. εάν το p_r κείται στο εσωτερικό του τριγώνου $p_i p_j p_k$
9. τότε Προσθέτουμε ακμές από το p_r προς τις τρεις κορυφές του $p_i p_j p_k$, διασπώντας έτσι το $p_i p_j p_k$ σε τρία τρίγωνα.
10. ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ($p_r, \overline{p_i p_j}, \mathcal{T}$)
11. ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ($p_r, \overline{p_j p_k}, \mathcal{T}$)
12. ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ($p_r, \overline{p_k p_i}, \mathcal{T}$)
13. άλλως (* το p_r κείται επάνω σε ακμή του $p_i p_j p_k$, έστω στην ακμή $\overline{p_i p_j}$ *)
14. Προσθέτουμε ακμές από το p_r προς το p_k και προς την τρίτη κορυφή p_l του άλλου τριγώνου που προσπίπτει στην $\overline{p_i p_j}$, διασπώντας έτσι τα δύο τρίγωνα που προσπίπτουν στην $\overline{p_i p_j}$ σε τέσσερα τρίγωνα.
15. ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ($p_r, \overline{p_i p_l}, \mathcal{T}$)
16. ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ($p_r, \overline{p_l p_j}, \mathcal{T}$)
17. ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ($p_r, \overline{p_j p_k}, \mathcal{T}$)
18. ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ($p_r, \overline{p_k p_i}, \mathcal{T}$)
19. Διαγράφουμε από τον \mathcal{T} τα σημεία p_{-1} και p_{-2} , και όλες τις προσπίπτουσες σε αυτά ακμές.
20. επιστροφή \mathcal{T}

Ας δούμε τώρα λεπτομερώς πώς μετατρέπεται ο τριγωνισμός που παίρνουμε μετά τη γραμμή 9 (ή τη γραμμή 14) σε τριγωνισμό Delaunay. Από το Θεώρημα 9.8 γνωρίζουμε ότι ένας τριγωνισμός είναι τριγωνισμός Delaunay αν οι ακμές του είναι όλες επιτρεπτές. Στο πνεύμα λοιπόν του αλγορίθμου ΕΠΙΤΡΕΠΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΙΣΜΟΣ, μεταστρέφουμε ανεπίτρεπτες ακμές μέχρις ότου ο τριγωνισμός να γίνει ξανά επιτρεπτός. Το ερώτημα που παραμένει είναι ποιες ακμές ενδέχεται να καταστούν ανεπίτρεπτες λόγω της εισαγωγής του p_r . Παρατηρούμε ότι μια ακμή $\overline{p_i p_j}$ που ήταν επιτρεπτή πριν μπορεί να καταστεί ανεπίτρεπτη μόνο αν έχει αλλάξει κάποιο από τα τρίγωνα που προσπίπτουν σε αυτήν. Επομένως, αρκεί να ελεγχθούν οι ακμές των νέων τριγώνων. Αυτό γίνεται μέσω του υποπρογράμματος ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ, το οποίο ελέγχει και ενδεχομένως μεταστρέφει μια ακμή. Αν η ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ μεταστρέψει μία ακμή, πιθανόν να καταστούν ανεπίτρεπτες κάποιες άλλες ακμές. Για τον λόγο αυτό, η ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ καλεί τον εαυτό της αναδρομικά με όρισμα τέτοιες ενδεχομένως ανεπίτρεπτες ακμές.

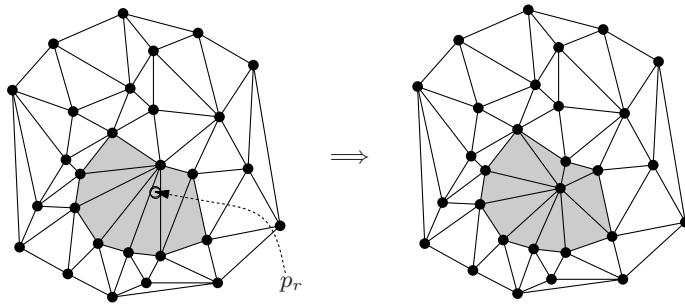


ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ($p_r, \overline{p_i p_j}, \mathcal{T}$)

1. (* Το εισαγόμενο σημείο είναι το p_r , και η $\overline{p_i p_j}$ είναι η ακμή του \mathcal{T} που πιθανόν να πρέπει να μεταστραφεί. *)
2. εάν η $\overline{p_i p_j}$ είναι ανεπίτρεπτη
3. τότε Έστω $p_i p_j p_k$ το τρίγωνο που είναι παρακείμενο του $p_r p_i p_j$ με κοινή πλευρά την $\overline{p_i p_j}$.
4. (* Μεταστροφή της $\overline{p_i p_j}$: *) Αντικαθιστούμε την $\overline{p_i p_j}$ με την $\overline{p_r p_k}$.
5. ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ($p_r, \overline{p_i p_k}, \mathcal{T}$)
6. ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ($p_r, \overline{p_k p_j}, \mathcal{T}$)

Κανονικά, ο έλεγχος στην γραμμή 2 για το αν μια ακμή είναι ανεπίτρεπτη μπορεί να εκτελεστεί με εφαρμογή του Λήμματος 9.4. Η παρουσία των ειδικών

σημείων p_{-1} και p_{-2} περιπλέκει κάπως την κατάσταση. Θα επανέλθουμε σε αυτό το ζήτημα αργότερα· κατ' αρχάς θα αποδείξουμε την ορθότητα του αλγορίθμου.



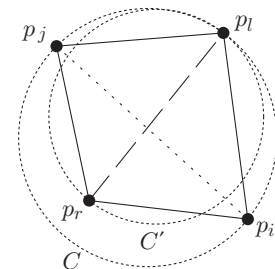
Σχήμα 9.8
Όλες οι ακμές που δημιουργούνται προσπίπτουν στο p_r

Για να βεβαιωθούμε για την ορθότητα του αλγορίθμου, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι, μετά την εκτέλεση όλων των κλήσεων της ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ, δεν απομένει καμία ανεπίτρεπτη ακμή. Από τον κώδικα της ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ, είναι εμφανές ότι κάθε νέα ακμή που δημιουργείται λόγω της εισαγωγής του p_r προσπίπτει στο p_r . Η κατάσταση αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 9.8: τα τρίγωνα που καταστρέφονται και τα νέα τρίγωνα αναπαρίστανται με γκριζό χρώμα. Η κρίσιμη παρατήρηση (που αποδεικνύεται παρακάτω) είναι ότι όλες οι νέες ακμές πρέπει να είναι επιτρεπτές, και άρα δεν χρειάζεται να τις ελέγξουμε. Αυτό, σε συνδυασμό με την προηγούμενη παρατήρηση ότι μια ακμή μπορεί να καταστεί ανεπίτρεπτη μόνο αν αλλάξει κάποιο από τα τρίγωνα που προσπίπτουν σε αυτήν, αποδεικνύει ότι ο αλγόριθμος ελέγχει κάθε ακμή που ενδέχεται να καταστεί ανεπίτρεπτη. Συνεπώς, είναι ορθός. Σημειωτέον ότι, όπως και ο αλγόριθμος ΕΠΙΤΡΕΠΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΙΣΜΟΣ, έτσι και αυτός αποκλείεται να εμπλακεί σε ατέρμονα βρόχο, διότι κάθε μεταστροφή καθιστά το γωνιοδιάνυσμα του τριγωνισμού μεγαλύτερο.

Λήμμα 9.10 Κάθε νέα ακμή που δημιουργείται στον αλγόριθμο ΤΡΙΓΩΝΙΣΜΟΣ DELAUNAY ή στη διαδικασία ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ κατά την εισαγωγή του p_r είναι ακμή του γραφήματος Delaunay του $\{p_{-2}, p_{-1}, p_0, \dots, p_r\}$.

Απόδειξη. Ας εξετάσουμε πρώτα τις ακμές $\overline{p_r p_i}$, $\overline{p_r p_j}$, $\overline{p_r p_k}$ (και πιθανώς $\overline{p_r p_l}$) που δημιουργούνται από τη διάσπαση του $p_i p_j p_k$ (και πιθανώς και του $p_i p_j p_l$). Καθώς το $p_i p_j p_k$ είναι τρίγωνο στον τριγωνισμό Delaunay πριν την προσθήκη του p_r , ο περιγεγραμμένος κύκλος C του $p_i p_j p_k$ δεν περιέχει στο εσωτερικό του κανένα σημείο p_t με $t < r$. Συρρικνώνοντας τον C μπορούμε να βρούμε έναν κύκλο C' που περιέχεται στον C και διέρχεται από τα p_i και p_r . Αφού $C' \subset C$, γνωρίζουμε ότι ο C' είναι κενός. Αυτό σημαίνει ότι η $\overline{p_r p_i}$ είναι ακμή του γραφήματος Delaunay μετά την προσθήκη του p_r . Το ίδιο ισχύει για τις $\overline{p_r p_j}$ και $\overline{p_r p_k}$ (και για την $\overline{p_r p_l}$, αν υπάρχει).

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια μια ακμή που μεταστρέφεται από τη ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ. Μια τέτοια μεταστροφή ακμής αντικαθιστά πάντα μια ακμή $\overline{p_i p_j}$ ενός τριγώνου $p_i p_j p_l$ με μια ακμή $\overline{p_r p_l}$ που προσπίπτει στο p_r . Αφού το $p_i p_j p_l$ ήταν τρίγωνο Delaunay πριν την προσθήκη του p_r , και δεδομένου ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του, C , περιέχει το p_r –διαφορετικά, η $\overline{p_i p_j}$ δεν θα ήταν ανεπίτρεπτη– μπορούμε συρρικνώνοντας τον περιγεγραμμένο κύκλο να πάρουμε έναν κενό κύκλο C' με μόνο τα p_r και p_l στο σύνορό του. Συνεπώς, η $\overline{p_r p_l}$ είναι ακμή του γραφήματος Delaunay μετά την προσθήκη. \square



Αποδείξαμε την ορθότητα του αλγορίθμου. Απομένει να περιγράψουμε πώς μπορούν να υλοποιηθούν δύο σημαντικά βήματα: η εύρεση του τριγώνου που περιέχει το σημείο p_r στην γραμμή 7 του αλγορίθμου ΤΡΙΓΩΝΙΣΜΟΣ DELAUNAY, και η σωστή αντιμετώπιση των σημείων p_{-1} και p_{-2} στον έλεγχο της γραμμής 2 της διαδικασίας ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ. Ξεκινάμε με το πρώτο ζήτημα.

Για να βρούμε το τρίγωνο που περιέχει το p_r , ακολουθούμε μια τακτική παρόμοια με εκείνη που εφαρμόσαμε στο Κεφάλαιο 6: κατά την κατασκευή του τριγωνισμού Delaunay, κατασκευάζουμε επίσης μια δομή εντοπισμού σημείου, \mathcal{D} , που αποτελεί κατευθυντό άκυκλο γράφημα. Τα φύλλα της \mathcal{D} αντιστοιχούν στα τρίγωνα του τρέχοντος τριγωνισμού \mathcal{T} , και τηρούμε αμφίδρομους δείκτες μεταξύ αυτών των φύλλων και του τριγωνισμού. Οι εσωτερικοί κόμβοι της \mathcal{D} αντιστοιχούν σε τρίγωνα που περιλαμβάνονταν στον τριγωνισμό σε κάποιο προηγούμενο στάδιο, αλλά έχουν ήδη καταστραφεί. Η δομή εντοπισμού σημείου κατασκευάζεται ως εξής. Στη γραμμή 3 δημιουργούμε την \mathcal{D} ως κατευθυντό άκυκλο γράφημα με ένα μόνο φύλλο, που αντιστοιχεί στο τρίγωνο $p_0p_{-1}p_{-2}$.

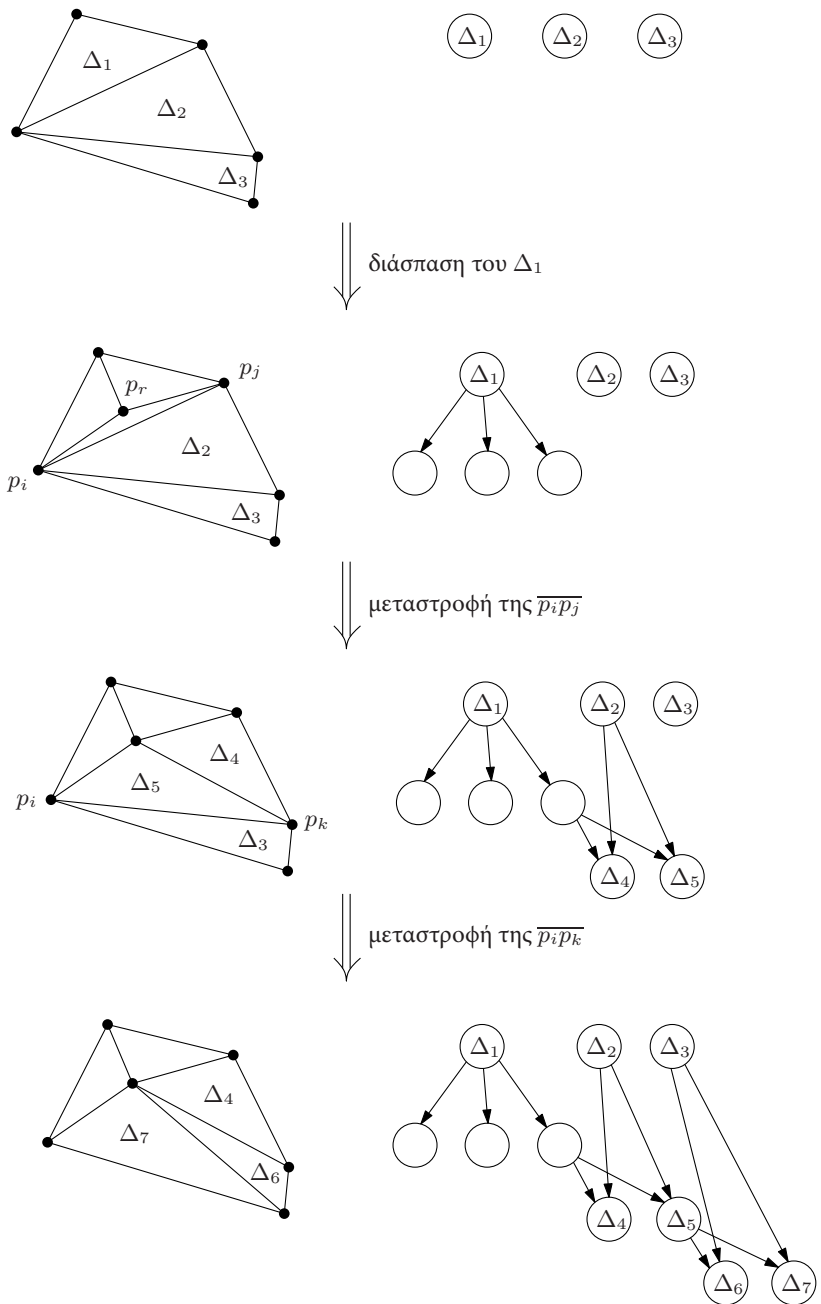
Ας υποθέσουμε τώρα ότι κάποια στιγμή διασπούμε ένα τρίγωνο $p_i p_j p_k$ του τρέχοντος τριγωνισμού σε τρία (ή δύο) νέα τρίγωνα. Η αντίστοιχη μεταβολή στη \mathcal{D} είναι η προσθήκη σε αυτήν τριών (ή δύο) νέων φύλλων, και η μετατροπή του φύλλου για το $p_i p_j p_k$ σε εσωτερικό κόμβο με εξερχόμενους δείκτες προς αυτά τα τρία (ή δύο) φύλλα. Αντίστοιχα, όταν αντικαθιστούμε δύο τρίγωνα $p_k p_i p_j$ και $p_i p_j p_l$ με τα τρίγωνα $p_k p_i p_l$ και $p_k p_l p_j$ μέσω μιας μεταστροφής ακμής, δημιουργούμε φύλλα για τα δύο νέα τρίγωνα, και προσθέτουμε στους κόμβους των $p_k p_i p_j$ και $p_i p_j p_l$ δείκτες προς τα δύο νέα φύλλα. Στο Σχήμα 9.9 βλέπουμε ένα παράδειγμα των τροποποιήσεων που προκαλεί στην \mathcal{D} η προσθήκη ενός σημείου. Παρατηρούμε ότι όταν μετατρέπουμε ένα φύλλο σε εσωτερικό κόμβο, αυτό αποκτά το πολύ τρεις εξερχόμενους δείκτες.

Μέσω της \mathcal{D} μπορούμε να εντοπίσουμε στον τρέχοντα τριγωνισμό το επόμενο σημείο προς εισαγωγή p_r , ως εξής. Ξεκινάμε από τη ρίζα της \mathcal{D} , που αντιστοιχεί στο αρχικό τρίγωνο $p_0 p_{-1} p_{-2}$. Ελέγχουμε τους τρεις θυγατρικούς κόμβους της ρίζας για να δούμε ποιο τρίγωνο περιέχει το p_r , και μεταβαίνουμε στον αντίστοιχο θυγατρικό. Κατόπιν ελέγχουμε τους θυγατρικούς αυτού του κόμβου, μεταβαίνουμε στον θυγατρικό που αντιστοιχεί στο τρίγωνο που περιέχει το p_r , κ.ο.κ., μέχρι να φθάσουμε σε φύλλο της \mathcal{D} . Το φύλλο αυτό αντιστοιχεί σε τρίγωνο του τρέχοντος τριγωνισμού που περιέχει το p_r . Δεδομένου ότι ο βαθμός εξόδου οποιουδήποτε κόμβου είναι το πολύ τρία, η αναζήτηση απαιτεί χρόνο γραμμικό ως προς το πλήθος των κόμβων που βρίσκονται στη διαδρομή αναζήτησης, ή, με άλλα λόγια, ως προς το πλήθος των αποθηκευμένων στην \mathcal{D} τριγώνων που περιέχουν το p_r .

Απομένει μόνο μία λεπτομέρεια: ο τρόπος επιλογής των p_{-1} και p_{-2} , και ο τρόπος υλοποίησης του ελέγχου για το αν μια ακμή είναι επιτρεπτή. Από τη μία πλευρά, πρέπει να επιλέξουμε τα p_{-1} και p_{-2} πολύ απομακρυσμένα, διότι δεν θέλουμε η παρουσία τους να επηρεάσει τον τριγωνισμό Delaunay του P . Από τη άλλη πλευρά, θέλουμε να αποφύγουμε τις τεράστιες συντεταγμένες που απαιτούνται για αυτό. Αυτό που κάνουμε λοιπόν είναι το εξής: χειριζόμαστε αυτά τα σημεία *συμβολικά*, δηλαδή δεν αποδίδουμε σε αυτά πραγματικές συντεταγμένες, αλλά τροποποιούμε τους ελέγχους για τον εντοπισμό σημείου και για τις ανεπίτρεπτες ακμές έτσι ώστε να λειτουργούν *όπως θα λειτουργούσαν* αν τα είχαμε επιλέξει πολύ απομακρυσμένα.

Σε ό,τι ακολουθεί, θα θεωρούμε ότι το σημείο $p = (x_p, y_p)$ είναι υψηλότερο από το $q = (x_q, y_q)$ εάν $y_p > y_q$ ή $y_p = y_q$ και $x_q > x_p$, και θα χρησιμοποιούμε τη (λεξικογραφική) διάταξη που ορίζεται στο P από αυτήν τη σχέση.

Έστω ℓ_{-1} μια οριζόντια ευθεία που κείται κάτω από ολόκληρο το σύνολο P , και ℓ_{-2} μια οριζόντια ευθεία που κείται πάνω από το P . Θεωρητικά, επιλέγουμε ως p_{-1} ένα σημείο που κείται επάνω στην ευθεία ℓ_{-1} σε αρκετά μεγάλη απόσταση προς τα δεξιά ώστε να κείται έξω από κάθε κύκλο που ορίζεται από τρία μη συνευθειακά σημεία του P , και τέτοιο ώστε η ωρολόγια διάταξη των σημείων του P γύρω από το p_{-1} να συμπίπτει με τη (λεξικογραφική) διάταξή τους. Κατόπιν, επιλέγουμε ως p_{-2} ένα σημείο που κείται επάνω στην ευθεία ℓ_{-2} σε αρκετά μεγάλη απόσταση προς τα αριστερά ώστε να κείται έξω από κάθε κύκλο που ορίζεται από τρία μη συνευθειακά σημεία του $P \cup \{p_{-1}\}$, και τέτοιο



Σχήμα 9.9
Η μεταβολή της δομής δεδομένων \mathcal{D} λόγω της εισαγωγής του σημείου p_r στο τρίγωνο Δ_1 (το τμήμα της \mathcal{D} που δεν αλλάζει δεν έχει συμπεριληφθεί στο σχήμα)

ώστε η αντιωρολόγια διάταξη των σημείων του $P \cup \{p_{-1}\}$ γύρω από το p_{-2} να συμπίπτει με τη (λεξικογραφική) διάταξή τους.

Ο τριγωνισμός Delaunay του $P \cup \{p_{-1}, p_{-2}\}$ αποτελείται από τον τριγωνισμό Delaunay του P , τις ακμές που συνδέουν το p_{-1} με κάθε σημείο επάνω στο δεξιό κυρτό περίβλημα του P , τις ακμές που συνδέουν το p_{-2} με κάθε σημείο επάνω στο αριστερό κυρτό περίβλημα του P , και την ακμή $\overline{p_{-1}p_{-2}}$. Το χαμηλότερο σημείο του P και το υψηλότερο σημείο p_0 του P συνδέονται τόσο με το p_{-1} όσο και με το p_{-2} .

Κατά το βήμα του εντοπισμού σημείου, χρειάζεται να προσδιοριστεί η θέση κάποιου σημείου p_j ως προς την προσανατολισμένη ευθεία από το p_i προς το p_k . Με βάση τον τρόπο επιλογής των p_{-1} και p_{-2} , οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- το p_j κείται στα αριστερά της ευθείας από το p_i προς το p_{-1} ·
- το p_j κείται στα αριστερά της ευθείας από το p_{-2} προς το p_i ·
- το p_j έπεται λεξικογραφικά του p_i .

Απομένει να εξηγήσουμε πώς πρέπει να αντιμετωπίζονται τα p_{-1} και p_{-2} όταν ελέγχουμε εάν μια ακμή είναι ανεπίτρεπτη. Έστω $\overline{p_i p_j}$ η ακμή που πρέπει να ελεγχθεί, και p_k και p_l οι άλλες κορυφές των τριγώνων που προσπίπτουν στην $\overline{p_i p_j}$ (εάν υπάρχουν).

- Η $\overline{p_i p_j}$ είναι μια ακμή του τριγώνου $p_0 p_{-1} p_{-2}$. Οι ακμές αυτές είναι πάντοτε επιτρεπτές.
- Οι δείκτες i, j, k, l είναι όλοι μη αρνητικοί. Αυτή είναι η κανονική περίπτωση· κανένα από τα σημεία που υπεισέρχονται στον έλεγχο δεν αντιμετωπίζεται συμβολικά. Άρα, η $\overline{p_i p_j}$ είναι ανεπίτρεπτη εάν και μόνο εάν το p_l κείται εντός του κύκλου που ορίζουν τα p_i, p_j , και p_k .
- Όλες οι άλλες περιπτώσεις. Σε αυτήν την περίπτωση, η $\overline{p_i p_j}$ είναι επιτρεπτή εάν και μόνο εάν $\min(k, l) < \min(i, j)$.

Μόνο η τελευταία περίπτωση απαιτεί περαιτέρω αιτιολόγηση. Αφού η κατάσταση όπου η $\overline{p_i p_j}$ είναι η $\overline{p_{-1} p_{-2}}$ αντιμετωπίζεται στην πρώτη περίπτωση, το πολύ ένας από τους δείκτες i και j είναι αρνητικός. Από την άλλη πλευρά, είτε το p_k είτε το p_l είναι το σημείο p_r που μόλις εισαγάγαμε, και συνεπώς το πολύ ένας από τους δείκτες k και l είναι αρνητικός.

Εάν μόνο ένας από τους τέσσερις δείκτες είναι αρνητικός, τότε το σημείο αυτό κείται εκτός του κύκλου που ορίζουν τα άλλα τρία σημεία, και συνεπώς η μέθοδος είναι ορθή.

Διαφορετικά τα $\min(i, j)$ και $\min(k, l)$ είναι αμφότερα αρνητικά, και το γεγονός ότι το p_{-2} κείται έξω από οποιονδήποτε κύκλο ο οποίος ορίζεται από τρία σημεία του $P \cup \{p_{-1}\}$ συνεπάγεται ότι η μέθοδος είναι ορθή.

9.4 Ανάλυση

Ας εξετάσουμε κατ' αρχάς τη δομική μεταβολή που προκαλεί ο αλγόριθμος, η οποία συνίσταται στο πλήθος των τριγώνων που δημιουργούνται και διαγράφονται κατά την εκτέλεσή του. Πριν ξεκινήσουμε την ανάλυση, ας εισαγάγουμε κάποιες συμβολιστικές συμβάσεις: $P_r := \{p_1, \dots, p_r\}$ και $\mathcal{TD}_r := \mathcal{TD}(\{p_{-2}, p_{-1}, p_0\} \cup P_r)$.

Λήμμα 9.11 Το αναμενόμενο πλήθος τριγώνων που δημιουργούνται από τον αλγόριθμο ΤΡΙΓΩΝΙΣΜΟΣ DELAUNAY είναι το πολύ $9n + 1$.

Απόδειξη. Κατά την έναρξη, δημιουργούμε ένα μόνο τρίγωνο, το $p_0p_{-1}p_{-2}$. Στην r -οστή επανάληψη του αλγορίθμου, όπου εισάγουμε το p_r , αρχικά διασπούμε ένα ή δύο τρίγωνα, δημιουργώντας τρία ή τέσσερα νέα τρίγωνα. Η διάσπαση αυτή δημιουργεί το ίδιο πλήθος ακμών στο \mathcal{TD}_r , και συγκεκριμένα τις $\overline{p_r p_i}$, $\overline{p_r p_j}$, $\overline{p_r p_k}$ (και ίσως την $\overline{p_r p_l}$). Επιπλέον, για κάθε ακμή που μεταστρέφουμε στη διαδικασία ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ, δημιουργούμε δύο νέα τρίγωνα. Και πάλι, η μεταστροφή δημιουργεί μια ακμή του \mathcal{TD}_r που προσπίπτει στο p_r . Συνοψίζοντας: αν μετά την εισαγωγή του p_r υπάρχουν k ακμές του \mathcal{TD}_r που προσπίπτουν στο p_r , τότε έχουμε δημιουργήσει το πολύ $2(k-3) + 3 = 2k - 3$ νέα τρίγωνα. Το πλήθος k είναι ο βαθμός του p_r στο \mathcal{TD}_r : συμβολίζουμε αυτόν τον βαθμό $\deg(p_r, \mathcal{TD}_r)$.

Ποιος είναι λοιπόν ο αναμενόμενος βαθμός του p_r , ως προς όλες τις δυνατές μεταθέσεις του συνόλου P ; Όπως και στα Κεφάλαια 4 και 6, για να υπολογίσουμε ένα φράγμα για αυτήν την τιμή θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική της *οπισθόδρομης ανάλυσης*. Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε προσωρινά το σύνολο P_r σταθερό. Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα φράγμα για τον αναμενόμενο βαθμό του σημείου p_r , το οποίο είναι ένα *τυχαίο* στοιχείο του συνόλου P_r . Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.3, το γράφημα Delaunay \mathcal{TD}_r έχει το πολύ $3(r+3) - 6$ ακμές. Τρεις από αυτές είναι οι ακμές του $p_0p_{-1}p_{-2}$, και επομένως ο συνολικός βαθμός των κορυφών του P_r είναι μικρότερος από $2[3(r+3) - 9] = 6r$. Αυτό σημαίνει ότι ο αναμενόμενος βαθμός ενός τυχαίου σημείου του P_r είναι το πολύ 6. Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έχουμε ότι για το πλήθος των τριγώνων που δημιουργούνται στο βήμα r ισχύει το ακόλουθο φράγμα.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{πλήθος τριγώνων που δημιουργούνται στο βήμα } r] &\leq \mathbb{E}[2 \deg(p_r, \mathcal{TD}_r) - 3] \\ &= 2 \mathbb{E}[\deg(p_r, \mathcal{TD}_r)] - 3 \\ &\leq 2 \cdot 6 - 3 = 9 \end{aligned}$$

Το συνολικό πλήθος των δημιουργούμενων τριγώνων είναι 1, για το αρχικό τρίγωνο $p_0p_{-1}p_{-2}$, συν το πλήθος των τριγώνων που δημιουργούνται σε καθένα από τα βήματα εισαγωγής. Από τη γραμμικότητα των αναμενόμενων τιμών, συμπεραίνουμε ότι το αναμενόμενο συνολικό πλήθος δημιουργούμενων τριγώνων διέπεται από το φράγμα $1 + 9n$. \square

Ακολουθεί το βασικό συμπέρασμα.

Θεώρημα 9.12 *Ο τριγωνισμός Delaunay ενός συνόλου P από n σημεία στο επίπεδο μπορεί να υπολογιστεί σε αναμενόμενο χρόνο $O(n \log n)$, και σε αναμενόμενο χώρο $O(n)$.*

Απόδειξη. Η ορθότητα του αλγορίθμου έπεται από τη μελέτη που έχει προηγηθεί. Όσο για τις απαιτήσεις σε χώρο, παρατηρούμε ότι μόνο η δομή αναζήτησης \mathcal{D} θα μπορούσε να απαιτεί περισσότερο από γραμμικό χώρο. Ωστόσο, κάθε κόμβος της \mathcal{D} αντιστοιχεί σε ένα τρίγωνο που δημιουργείται από τον αλγόριθμο, και σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα το αναμενόμενο πλήθος αυτών των τριγώνων είναι $O(n)$.

Για να υπολογίσουμε ένα φράγμα για τον αναμενόμενο χρόνο εκτέλεσης, αγνοούμε προσωρινά τον χρόνο που αναλώνεται στο βήμα του εντοπισμού σημείου (γραμμή 7). Έτσι, ο χρόνος που απαιτείται είναι ανάλογος του πλήθους των δημιουργούμενων τριγώνων. Από το προηγούμενο λήμμα, λοιπόν, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, αν δεν προσμετρήσουμε τον χρόνο για τον εντοπισμό σημείου, ο αναμενόμενος χρόνος εκτέλεσης είναι $O(n)$.

Απομένει να συνυπολογίσουμε τα βήματα για τον εντοπισμό σημείου. Ο χρόνος που απαιτείται για τον εντοπισμό του σημείου p_r στον τρέχοντα τριγωνισμό είναι γραμμικός ως προς το πλήθος των κόμβων της \mathcal{D} από τους οποίους

διερχόμαστε. Κάθε κόμβος από τον οποίο διερχόμαστε αντιστοιχεί σε ένα τρίγωνο που δημιουργήθηκε σε κάποιο προηγούμενο στάδιο και που περιέχει το p_r . Αν προσμετρήσουμε το τρίγωνο του τρέχοντος τριγωνισμού χωριστά, τότε ο χρόνος για τον εντοπισμό του p_r είναι $O(1)$ συν μια γραμμική ποσότητα ως προς το πλήθος των τριγώνων που υπήρχαν σε κάποιο προηγούμενο στάδιο, αλλά έχουν διαγραφεί, και περιέχουν το p_r .

Ένα τρίγωνο $p_i p_j p_k$ μπορεί να διαγραφεί από τον τριγωνισμό για έναν από τους εξής δύο λόγους:

- Κάποιο νέο σημείο p_l προστέθηκε εντός (ή επί του συνόρου) του $p_i p_j p_k$, και το $p_i p_j p_k$ διασπάστηκε σε τρία (ή δύο) υποτρίγωνα.
- Κάποια μεταστροφή ακμής προκάλεσε την αντικατάσταση του $p_i p_j p_k$ και κάποιου παρακείμενου τριγώνου $p_i p_j p_l$ με το ζεύγος $p_k p_i p_l$ και $p_k p_j p_l$.

Στην πρώτη περίπτωση, το τρίγωνο $p_i p_j p_k$ ήταν τρίγωνο Delaunay πριν την εισαγωγή του p_l . Στη δεύτερη περίπτωση, είτε το $p_i p_j p_k$ ήταν τρίγωνο Delaunay και προστέθηκε το p_l , είτε το $p_i p_j p_l$ ήταν τρίγωνο Delaunay και προστέθηκε το p_k . Αν το τρίγωνο Delaunay ήταν το $p_i p_j p_l$, τότε η μεταστροφή της ακμής $\overline{p_i p_j}$ σημαίνει ότι αμφότερα τα p_k και p_r κείνται εντός του περιγεγραμμένου κύκλου του $p_i p_j p_l$.

Σε όλες τις περιπτώσεις, μπορούμε να αποδώσουμε το γεγονός ότι ο αλγόριθμος διήλθε από το τρίγωνο $p_i p_j p_k$ σε ένα τρίγωνο Delaunay Δ που διαγράφηκε στο ίδιο στάδιο με το $p_i p_j p_k$, και του οποίου ο περιγεγραμμένος κύκλος περιέχει το p_r . Έστω $K(\Delta)$ το υποσύνολο των σημείων του P που κείνται στον περιγεγραμμένο κύκλο ενός δεδομένου τριγώνου Δ . Στον παραπάνω συλλογισμό, το γεγονός ότι ο αλγόριθμος διήλθε από ένα τρίγωνο κατά τον εντοπισμό του p_r αποδίδεται σε κάποιο τρίγωνο Δ με $p_r \in K(\Delta)$. Όπως μπορεί κανείς να αντιληφθεί εύκολα, σε ένα τρίγωνο Δ μπορεί να αποδοθεί το πολύ ένα τέτοιο γεγονός για καθένα από τα σημεία του $K(\Delta)$. Συνεπώς, ο συνολικός χρόνος για τα βήματα του εντοπισμού σημείου είναι

$$O(n + \sum_{\Delta} \text{πληθ}(K(\Delta))), \quad (9.1)$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλα τα τρίγωνα Delaunay Δ που δημιουργούνται από τον αλγόριθμο. Όπως θα δείξουμε αργότερα, η αναμενόμενη τιμή αυτού του αθροίσματος είναι $O(n \log n)$, οπότε το θεώρημα έχει αποδειχθεί. \square

Απομένει να υπολογίσουμε ένα φράγμα για το αναμενόμενο μέγεθος των συνόλων $K(\Delta)$. Αν το Δ είναι τρίγωνο του τριγωνισμού Delaunay \mathcal{TD}_r , τότε πόσο αναμένεται να είναι το $\text{πληθ}(K(\Delta))$; Για $r = 1$ θα αναμέναμε να είναι περίπου n , και για $r = n$ ξέρουμε ότι είναι μηδέν. Τι συμβαίνει στο ενδιάμεσο; Το καλό με την τυχαιοκρατία είναι ότι λειτουργεί σαν «παρεμβολή» μεταξύ αυτών των δύο άκρων. Η σωστή διαισθητική πρόβλεψη θα ήταν ότι, αφού το P_r είναι τυχαίο δείγμα, το πλήθος των σημείων που κείνται εντός του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου $\Delta \in \mathcal{TD}_r$ είναι περίπου $O(n/r)$. Προσοχή όμως: αυτό δεν ισχύει πραγματικά για όλα τα τρίγωνα στο \mathcal{TD}_r . Παρ' όλα αυτά, το άθροισμα στην έκφραση (9.1) συμπεριφέρεται σαν να ισχύει για όλα τα τρίγωνα.

Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας θα παραθέσουμε μια σύντομη απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού για την περίπτωση ενός σημειοσυνόλου σε γενική θέση. Ο ισχυρισμός αληθεύει και για τη γενική περίπτωση, αλλά είναι κάπως πιο δύσκολο να το αποδείξουμε, οπότε αναβάλλουμε αυτό το ζήτημα για την επόμενη ενότητα, όπου θα μελετήσουμε το πρόβλημα σε μεγαλύτερη γενικότητα.

Λήμμα 9.13 Αν το P είναι ένα σημειοσύνολο σε γενική θέση, τότε

$$\sum_{\Delta} \text{πληθ}(K(\Delta)) = O(n \log n),$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλα τα τρίγωνα Delaunay Δ που δημιουργούνται από τον αλγόριθμο.

Απόδειξη. Αφού το P βρίσκεται σε γενική θέση, κάθε υποσύνολο P_r βρίσκεται σε γενική θέση. Αυτό σημαίνει ότι ο τριγωνισμός μετά την προσθήκη του σημείου p_r είναι ο μοναδικός τριγωνισμός $\mathcal{T}\mathcal{D}_r$. Έστω \mathcal{T}_r το σύνολο των τριγώνων του $\mathcal{T}\mathcal{D}_r$. Το σύνολο των τριγώνων Delaunay που δημιουργούνται στο στάδιο r ισούται εξ ορισμού με $\mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r-1}$. Συνεπώς, μπορούμε να ξαναγράψουμε το άθροισμα του οποίου το φράγμα θέλουμε να υπολογίσουμε ως

$$\sum_{r=1}^n \left(\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r-1}} \text{πληθ}(K(\Delta)) \right).$$

Για ένα σημείο q , έστω $k(P_r, q)$ το πλήθος των τριγώνων $\Delta \in \mathcal{T}_r$ για τα οποία $q \in K(\Delta)$, και έστω $k(P_r, q, p_r)$ το πλήθος των τριγώνων $\Delta \in \mathcal{T}_r$ για τα οποία ισχύει όχι μόνο ότι $q \in K(\Delta)$ αλλά και ότι το p_r προσπίπτει στο Δ . Υπενθυμίζουμε ότι κάθε τρίγωνο Delaunay που δημιουργείται στο στάδιο r προσπίπτει στο p_r , και άρα έχουμε ότι

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r-1}} \text{πληθ}(K(\Delta)) = \sum_{q \in P \setminus P_r} k(P_r, q, p_r). \quad (9.2)$$

Θεωρούμε προσωρινά το P_r σταθερό. Με άλλα λόγια, θεωρούμε ότι όλες οι αναμενόμενες τιμές είναι ως προς το σύνολο των μεταθέσεων του συνόλου P για τις οποίες το P_r ισούται με ένα σταθερό σύνολο P_r^* . Έτσι, η τιμή του $k(P_r, q, p_r)$ εξαρτάται μόνο από την επιλογή του p_r . Δεδομένου ότι η πιθανότητα να προσπίπτει ένα τρίγωνο $\Delta \in \mathcal{T}_r$ σε ένα τυχαίο σημείο $p \in P_r^*$ είναι μικρότερη ή ίση του $3/r$, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[k(P_r, q, p_r)] \leq \frac{3k(P_r, q)}{r}.$$

Αθροίζοντας ως προς όλα τα $q \in P \setminus P_r$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (9.2), παίρνουμε

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r-1}} \text{πληθ}(K(\Delta)) \right] \leq \frac{3}{r} \sum_{q \in P \setminus P_r} k(P_r, q). \quad (9.3)$$

Αφού κάθε $q \in P \setminus P_r$ είναι εξίσου πιθανό να εμφανιστεί ως p_{r+1} , έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[k(P_r, p_{r+1})] = \frac{1}{n-r} \sum_{q \in P \setminus P_r} k(P_r, q).$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (9.3), παίρνουμε

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r-1}} \text{πληθ}(K(\Delta)) \right] \leq 3 \left(\frac{n-r}{r} \right) \mathbb{E}[k(P_r, p_{r+1})].$$

Τι είναι το $k(P_r, p_{r+1})$; Είναι το πλήθος των τριγώνων Δ του \mathcal{T}_r για τα οποία $p_{r+1} \in K(\Delta)$. Από το κριτήριο του Θεωρήματος 9.6 (i), έπεται ότι τα τρίγωνα αυτά είναι ακριβώς εκείνα τα τρίγωνα του \mathcal{T}_r που θα διαγραφούν λόγω της εισαγωγής του p_{r+1} . Συνεπώς, μπορούμε να ξαναγράψουμε την προηγούμενη έκφραση ως εξής:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r-1}} \text{πληθ}(K(\Delta)) \right] \leq 3 \left(\frac{n-r}{r} \right) \mathbb{E}[\text{πληθ}(\mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r+1})].$$

Από το Θεώρημα 9.1 έχουμε ότι το πλήθος των τριγώνων στο σύνολο \mathcal{T}_m είναι ακριβώς $2(m+3) - 2 - 3 = 2m + 1$. Επομένως, το πλήθος των τριγώνων που διαγράφονται λόγω της εισαγωγής του σημείου p_{r+1} είναι ακριβώς κατά δύο μικρότερο του πλήθους των τριγώνων που δημιουργούνται λόγω της εισαγωγής του p_{r+1} , οπότε μπορούμε να ξαναγράψουμε το άθροισμα ως εξής:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r-1}} \text{πληθ}(K(\Delta))\right] \leq 3\left(\frac{n-r}{r}\right)\left(\mathbb{E}[\text{πληθ}(\mathcal{T}_{r+1} \setminus \mathcal{T}_r)] - 2\right).$$

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε το P_r σταθερό. Σε αυτό το σημείο μπορούμε απλώς να πάρουμε τη μέση τιμή ως προς όλες τις επιλογές του $P_r \subset P$ και στα δύο μέλη της παραπάνω ανίσωσης, οπότε συμπεραίνουμε ότι ισχύει και αν θεωρήσουμε ότι η αναμενόμενη τιμή είναι ως προς όλες τις δυνατές μεταθέσεις του συνόλου P .

Ξέρουμε ήδη ότι το πλήθος των τριγώνων που δημιουργούνται λόγω της εισαγωγής του p_{r+1} ταυτίζεται με το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν στο p_{r+1} στον \mathcal{T}_{r+1} , και ότι το αναμενόμενο πλήθος αυτών των ακμών είναι το πολύ 6. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\mathbb{E}\left[\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r-1}} \text{πληθ}(K(\Delta))\right] \leq 12\left(\frac{n-r}{r}\right).$$

Αν αθροίσουμε ως προς r , η απόδειξη του λήμματος έχει ολοκληρωθεί. \square

9.5* Ένα πλαίσιο για τυχαιοκρατικούς αλγορίθμους

Μέχρι τώρα σε αυτό το βιβλίο έχουμε εξετάσει τρεις τυχαιοκρατικούς αυξητικούς αλγορίθμους: έναν για γραμμικό προγραμματισμό, στο Κεφάλαιο 4, έναν για τον υπολογισμό τραπεζιομερούς χάρτη, στο Κεφάλαιο 6, και έναν για τον υπολογισμό τριγωνισμού Delaunay, σε αυτό το κεφάλαιο. (Θα συναντήσουμε άλλον έναν στο Κεφάλαιο 11.) Όλοι αυτοί οι αλγόριθμοι, όπως και οι περισσότεροι άλλοι τυχαιοκρατικοί αυξητικοί αλγόριθμοι στη βιβλιογραφία της υπολογιστικής γεωμετρίας, λειτουργούν σύμφωνα με την ακόλουθη αρχή.

Ας υποθέσουμε ότι το πρόβλημα συνίσταται στο να υπολογίσουμε κάποια γεωμετρική δομή $\mathcal{T}(X)$, που ορίζεται από ένα σύνολο X γεωμετρικών αντικειμένων. (Για παράδειγμα, έναν τριγωνισμό Delaunay που ορίζεται από ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο.) Ένας τυχαιοκρατικός αυξητικός αλγόριθμος το επιτυγχάνει αυτό προσθέτοντας τα αντικείμενα του X με τυχαία σειρά, τηρώντας ταυτόχρονα ενημερωμένη τη δομή \mathcal{T} . Για να προσθέσει το επόμενο αντικείμενο, ο αλγόριθμος βρίσκει πρώτα πού πρέπει να μεταβληθεί η τρέχουσα δομή λόγω κάποιας ασυμφωνίας με το αντικείμενο –το βήμα του εντοπισμού– και στη συνέχεια ενημερώνει τη δομή τοπικά –το βήμα της ενημέρωσης. Επειδή όλοι οι τυχαιοκρατικοί αυξητικοί αλγόριθμοι μοιάζουν τόσο πολύ μεταξύ τους, η ανάλυσή τους γίνεται επίσης με παρόμοιο τρόπο. Για να αποφύγουμε να αποδεικνύουμε τα ίδια φράγματα ξανά και ξανά για διαφορετικά προβλήματα, έχει αναπτυχθεί ένα αξιωματικό πλαίσιο που αποτυπώνει την ουσία των τυχαιοκρατικών αυξητικών αλγορίθμων. Το πλαίσιο αυτό (που λέγεται *χώρος μορφών*) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθούν «έτοιμα προς χρήση» φράγματα σχετικά με τον αναμενόμενο χρόνο εκτέλεσης πολλών τυχαιοκρατικών αυξητικών αλγορίθμων. Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε αυτό το πλαίσιο, και θα παρουσιάσουμε ένα θεώρημα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση οποιουδήποτε τυχαιοκρατικού αυξητικού αλγορίθμου που μπορεί να ενταχθεί στο πλαίσιο. Για παράδειγμα, το θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα για να αποδειχθεί το Λήμμα 9.13, χωρίς να υποτεθεί αυτή τη φορά ότι το P πρέπει να βρίσκεται σε γενική θέση.

Ορίζουμε ως *χώρο μορφών* μια τετράδα (X, Π, D, K) . Στην τετράδα αυτή, το X αντιπροσωπεύει τα δεδομένα εισόδου του προβλήματος: ένα πεπερασμένο σύνολο (γεωμετρικών) *αντικειμένων* η πληθικότητα του X συμβολίζεται με n . Το Π είναι ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία ονομάζονται *μορφές*. Τέλος, καθεμιά από τις συναρτήσεις D και K αντιστοιχίζει σε κάθε μορφή $\Delta \in \Pi$ ένα υποσύνολο του X , που συμβολίζεται $D(\Delta)$ και $K(\Delta)$, αντίστοιχα. Λέμε ότι τα στοιχεία του συνόλου $D(\Delta)$ *ορίζουν* τη μορφή Δ , και ότι τα στοιχεία του συνόλου $K(\Delta)$ *βρίσκονται σε σύγκρουση με* τη Δ , ή *εξαιλείφουν* τη Δ . Το πλήθος των στοιχείων του $K(\Delta)$ αποκαλείται *μέγεθος σύγκρουσης* της μορφής Δ . Απαιτούμε η τετράδα (X, Π, D, K) να ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες.

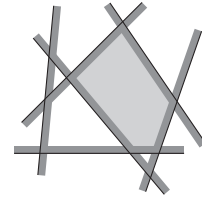
- Το πλήθος $d := \max\{\text{πληθ}(D(\Delta)) \mid \Delta \in \Pi\}$ είναι σταθερό. Το πλήθος αυτό λέγεται *μέγιστος βαθμός* του χώρου μορφών. Επιπλέον, το πλήθος των μορφών που έχουν το ίδιο ορίζον σύνολο θα πρέπει να φράσσεται από μια σταθερά.
- Για κάθε μορφή $\Delta \in \Pi$, έχουμε $D(\Delta) \cap K(\Delta) = \emptyset$.

Μία μορφή Δ λέγεται *ενεργή* επί ενός υποσυνόλου $S \subseteq X$ αν το $D(\Delta)$ περιέχεται στο S και το $K(\Delta)$ είναι ξένο προς το S . Το σύνολο των μορφών που είναι ενεργές επί του S συμβολίζεται με $\mathcal{T}(S)$, οπότε έχουμε ότι

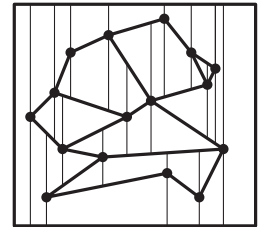
$$\mathcal{T}(S) := \{\Delta \in \Pi : D(\Delta) \subseteq S \text{ και } K(\Delta) \cap S = \emptyset\}.$$

Οι ενεργές μορφές συνιστούν τη δομή που θέλουμε να υπολογίσουμε. Ακριβέστερα, ο σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε το σύνολο $\mathcal{T}(X)$. Πριν συνεχίσουμε τη μελέτη αυτού του αφηρημένου πλαισίου, ας δούμε πώς συμμορφώνονται με αυτό οι γεωμετρικές δομές που έχουμε συναντήσει μέχρι στιγμής.

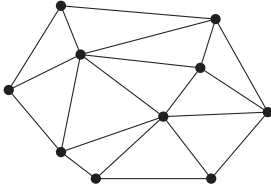
Τομή ημιεπιπέδων. Σε αυτή την περίπτωση το σύνολο εισόδου X είναι ένα σύνολο ημιεπιπέδων στο επίπεδο. Θέλουμε να ορίσουμε τα Π , D , και K με τέτοιο τρόπο ώστε το σύνολο $\mathcal{T}(X)$ να είναι αυτό που θέλουμε να υπολογίσουμε, δηλαδή η τομή των ημιεπιπέδων του X . Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε ως εξής. Το σύνολο Π των μορφών αποτελείται από όλα τα σημεία τομής των ευθειών που οριοθετούν τα ημιεπίπεδα του X . Το ορίζον σύνολο $D(\Delta)$ μιας μορφής $\Delta \in \Pi$ αποτελείται από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζουν το σημείο τομής, και το εξαλειπτικό σύνολο $K(\Delta)$ αποτελείται από όλα τα ημιεπίπεδα που δεν περιέχουν το σημείο τομής. Επομένως, για κάθε υποσύνολο $S \subset X$, και ειδικά για το ίδιο το X , το $\mathcal{T}(S)$ είναι το σύνολο των κορυφών της κοινής τομής των ημιεπιπέδων του S .



Τραπεζιομερείς χάρτες. Εδώ το σύνολο εισόδου X είναι ένα σύνολο ευθύγραμμων τμημάτων στο επίπεδο. Το σύνολο των μορφών Π περιέχει όλα τα τραπέζια που εμφανίζονται στον τραπεζιομερή χάρτη οποιουδήποτε $S \subseteq X$. Το ορίζον σύνολο $D(\Delta)$ μιας μορφής Δ είναι το σύνολο των ευθύγραμμων τμημάτων που απαιτούνται για τον ορισμό της Δ . Το εξαλειπτικό σύνολο $K(\Delta)$ ενός τραπεζίου Δ είναι το σύνολο των ευθύγραμμων τμημάτων που τέμνουν το Δ . Με αυτούς τους ορισμούς, το $\mathcal{T}(S)$ είναι ακριβώς το σύνολο των τραπεζίων του τραπεζιομερούς χάρτη του S .



Τριγωνισμός Delaunay. Το σύνολο εισόδου X είναι ένα σύνολο σημείων σε γενική θέση στο επίπεδο. Το σύνολο μορφών Π αποτελείται από τρίγωνα που σχηματίζονται από τρία (μη συνευθειακά) σημεία του X . Το ορίζον σύνολο $D(\Delta)$ αποτελείται από τα σημεία που αποτελούν τις κορυφές του Δ , και το εξαλειπτικό σύνολο $K(\Delta)$ είναι το σύνολο των σημείων που κείνται εντός του περιγεγραμμένου κύκλου του Δ . Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.6, το $\mathcal{T}(S)$ είναι ακριβώς το σύνολο των τριγώνων του μοναδικού τριγωνισμού Delaunay του S .



Όπως αναφέραμε παραπάνω, το ζητούμενο είναι να υπολογιστεί η δομή $\mathcal{T}(X)$. Με έναν τυχαιοκρατικό αυξητικό αλγόριθμο αυτό γίνεται ως εξής: υπολογίζεται μια τυχαία μετάθεση x_1, x_2, \dots, x_n των αντικειμένων του X και στη συνέχεια προστίθενται τα αντικείμενα με αυτή τη σειρά, ενώ ταυτόχρονα τηρείται το σύνολο $\mathcal{T}(X_r)$, όπου $X_r := \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$. Η θεμελιώδης ιδιότητα των χώρων μορφών η οποία καθιστά δυνατή αυτή τη διαδικασία είναι ότι μπορούμε να αποφανθούμε αν μια μορφή Δ εμφανίζεται στο $\mathcal{T}(X_r)$ εξετάζοντάς την τοπικά –το μόνο που χρειάζεται είναι να προσδιορίσουμε τα οριζόντα και τα εξαλειπτικά αντικείμενα της Δ . Ειδικότερα, το $\mathcal{T}(X_r)$ δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία προστέθηκαν τα αντικείμενα στο X_r . Για παράδειγμα, ένα τρίγωνο Δ ανήκει στον τριγωνισμό Delaunay του S αν και μόνο αν οι κορυφές του Δ ανήκουν στο S , και κανένα σημείο του S δεν κείται εντός του περιγεγραμμένου κύκλου του Δ .

Το πρώτο πράγμα που κάναμε συνήθως όταν αναλύαμε έναν τυχαιοκρατικό αυξητικό αλγόριθμο ήταν να αποδείξουμε ένα φράγμα για την αναμενόμενη δομική μεταβολή –παραδείγματος χάριν, βλ. Λήμμα 9.11. Η ίδια ανάλυση γίνεται και στο ακόλουθο θεώρημα, αλλά αυτή τη φορά στο αφηρημένο πλαίσιο των χώρων μορφών.

Θεώρημα 9.14 Έστω (X, Π, D, K) ένας χώρος μορφών, και έστω ότι τα \mathcal{T} και X_r έχουν οριστεί όπως παραπάνω. Το αναμενόμενο πλήθος μορφών στο $\mathcal{T}(X_r) \setminus \mathcal{T}(X_{r-1})$ είναι το πολύ

$$\frac{d}{r} E[\text{πληθ}(\mathcal{T}(X_r))],$$

όπου d ο μέγιστος βαθμός του χώρου μορφών.

Απόδειξη. Όπως και σε προηγούμενες περιπτώσεις στις οποίες θέλαμε να υπολογίσουμε ένα φράγμα για τη δομική μεταβολή, θα εφαρμόσουμε την τεχνική της οπισθόδρομης ανάλυσης: αντί να προσπαθήσουμε να μελετήσουμε το πλήθος των μορφών που εμφανίζονται λόγω της προσθήκης του x_r στο X_{r-1} , θα μελετήσουμε το πλήθος των μορφών που εξαφανίζονται όταν αφαιρούμε το x_r από το X_r . Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε προσωρινά ότι το X_r είναι ένα σταθερό υποσύνολο $X_r^* \subset X$ πληθικότητας r . Τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε ένα φράγμα για το αναμενόμενο πλήθος μορφών $\Delta \in \mathcal{T}(X_r)$ που εξαφανίζονται όταν αφαιρούμε ένα τυχαίο αντικείμενο x_r από το X_r . Από τον ορισμό του \mathcal{T} , για κάθε τέτοια οντότητα Δ θα πρέπει να ισχύει ότι $x_r \in D(\Delta)$. Δεδομένου ότι υπάρχουν το πολύ $d \cdot \text{πληθ}(\mathcal{T}(X_r))$ ζεύγη (x, Δ) με $\Delta \in \mathcal{T}(X_r)$ και $x \in D(\Delta)$, έχουμε ότι

$$\sum_{x \in X_r} \text{πληθ}(\{\Delta \in \mathcal{T}(X_r) \mid x \in D(\Delta)\}) \leq d \cdot \text{πληθ}(\mathcal{T}(X_r)).$$

Συνεπώς, το αναμενόμενο πλήθος μορφών που εξαφανίζονται λόγω της αφαίρεσης ενός τυχαίου αντικειμένου από το X_r είναι το πολύ $\frac{d}{r} \text{πληθ}(\mathcal{T}(X_r))$. Στην ανάλυση αυτή, το σύνολο X_r ήταν ένα σταθερό υποσύνολο $X_r^* \subset X$ πληθικότητας r . Για να πάρουμε το γενικό φράγμα, πρέπει να υπολογίσουμε τη μέση τιμή ως προς όλα τα δυνατά υποσύνολα μεγέθους r , οπότε προκύπτει το φράγμα $\frac{d}{r} E[\text{πληθ}(\mathcal{T}(X_r))]$. \square

Το θεώρημα αυτό δίνει ένα γενικό φράγμα για το αναμενόμενο μέγεθος της δομικής μεταβολής κατά την εκτέλεση ενός τυχαιοκρατικού αυξητικού αλγορίθμου. Ποιο είναι όμως το κόστος των βημάτων εντοπισμού; Σε πολλές περιπτώσεις θα χρειαστούμε ένα φράγμα της ίδιας μορφής όπως σε αυτό το κεφάλαιο, δηλαδή ένα φράγμα για την ποσότητα

$$\sum_{\Delta} \text{πληθ}(K(\Delta)),$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλες τις μορφές Δ που δημιουργούνται από τον αλγόριθμο, δηλαδή σε όλες τις οντότητες που εμφανίζονται σε κάποιο από τα $\mathcal{T}(X_r)$. Το φράγμα αυτό προσδιορίζεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 9.15 Έστω (X, Π, D, K) ένας χώρος μορφών, και έστω ότι τα \mathcal{T} και X_r έχουν οριστεί όπως παραπάνω. Η αναμενόμενη τιμή της ποσότητας

$$\sum_{\Delta} \text{πληθ}(K(\Delta)),$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλες τις μορφές Δ που εμφανίζονται σε ένα τουλάχιστον από τα $\mathcal{T}(X_r)$ για $1 \leq r \leq n$, είναι το πολύ

$$\sum_{r=1}^n d^2 \binom{n-r}{r} \left(\frac{\mathbb{E}[\text{πληθ}(\mathcal{T}(X_r))]}{r} \right),$$

όπου d ο μέγιστος βαθμός του χώρου μορφών.

Απόδειξη. Μπορούμε να ακολουθήσουμε κατ' ουσίαν την απόδειξη του Λήμματος 9.13. Κατ' αρχάς γράφουμε το άθροισμα στη μορφή

$$\sum_{r=1}^n \left(\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r-1}} \text{πληθ}(K(\Delta)) \right).$$

Κατόπιν, θέτουμε $k(X_r, y)$ το πλήθος των μορφών $\Delta \in \mathcal{T}(X_r)$ για τις οποίες $y \in K(\Delta)$, και θέτουμε $k(X_r, y, x_r)$ το πλήθος των μορφών $\Delta \in \mathcal{T}(X_r)$ για τις οποίες όχι μόνο $y \in K(\Delta)$ αλλά και $x_r \in D(\Delta)$. Για κάθε νέα μορφή που εμφανίζεται λόγω της προσθήκης του x_r θα πρέπει να ισχύει ότι $x_r \in D(\Delta)$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r-1}} \text{πληθ}(K(\Delta)) = \sum_{y \in X \setminus X_r} k(X_r, y, x_r). \quad (9.4)$$

Στη συνέχεια σταθεροποιούμε το σύνολο X_r . Συνεπώς, η αναμενόμενη τιμή του $k(X_r, y, x_r)$ εξαρτάται μόνο από την επιλογή του $x_r \in X_r$. Καθώς η πιθανότητα να ισχύει $x_r \in D(\Delta)$ για κάποια μορφή $\Delta \in \mathcal{T}(X_r)$ είναι το πολύ d/r , έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[k(X_r, y, x_r)] \leq \frac{dk(X_r, y)}{r}.$$

Αν αθροίσουμε αυτήν την ανίσωση για όλα τα $y \in X \setminus X_r$ και χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (9.4), παίρνουμε

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r-1}} \text{πληθ}(K(\Delta)) \right] \leq \frac{d}{r} \sum_{y \in X \setminus X_r} k(X_r, y). \quad (9.5)$$

Από την άλλη πλευρά, κάθε $y \in X \setminus X_r$ είναι εξίσου πιθανό να εμφανιστεί ως x_{r+1} , οπότε

$$\mathbb{E}[k(X_r, x_{r+1})] = \frac{1}{n-r} \sum_{y \in X \setminus X_r} k(X_r, y).$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (9.5) έχουμε ότι

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r-1}} \text{πληθ}(K(\Delta)) \right] \leq d \binom{n-r}{r} \mathbb{E}[k(X_r, x_{r+1})].$$

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι $k(X_r, x_{r+1})$ είναι το πλήθος των μορφών Δ του $\mathcal{T}(X_r)$ που θα διαγραφούν στο επόμενο στάδιο, όπου εισάγεται το x_{r+1} . Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να γράψουμε την τελευταία έκφραση ως εξής:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r-1}} \text{πληθ}(K(\Delta)) \right] \leq d \binom{n-r}{r} \mathbb{E}[\text{πληθ}(\mathcal{T}(X_r) \setminus \mathcal{T}(X_{r+1}))]. \quad (9.6)$$

Ωστόσο, αντίθετα προς την απόδειξη του Λήμματος 9.13, δεν μπορούμε απλώς να θέσουμε ως φράγμα για το πλήθος των μορφών που διαγράφονται στο στάδιο $r + 1$ το πλήθος των μορφών που δημιουργούνται σε αυτό το στάδιο, διότι σε έναν γενικό χώρο μορφών αυτό ενδέχεται να μην ισχύει. Συνεχίζουμε λοιπόν κάπως διαφορετικά.

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι αν πάρουμε τη μέση τιμή ως προς όλες τις επιλογές του X_r και στα δύο μέλη της (9.6) βρίσκουμε ότι αυτή ισχύει και στην περίπτωση που η αναμενόμενη τιμή αφορά όλες τις μεταθέσεις του X . Εν συνεχεία, αθροίζουμε για όλα τα r , και ξαναγράφουμε το άθροισμα ως εξής:

$$\sum_{r=1}^n d\left(\frac{n-r}{r}\right) \pi\lambda\eta\theta(\mathcal{T}(X_r) \setminus \mathcal{T}(X_{r+1})) = \sum_{\Delta} d\left(\frac{n - [j(\Delta) - 1]}{j(\Delta) - 1}\right), \quad (9.7)$$

όπου το άθροισμα στο δεξιό μέλος εκτείνεται σε όλες τις μορφές Δ που δημιουργούνται και αργότερα διαγράφονται από τον αλγόριθμο, και όπου με $j(\Delta)$ συμβολίζουμε το στάδιο στο οποίο διαγράφεται η μορφή Δ . Έστω $i(\Delta)$ το στάδιο στο οποίο δημιουργείται η μορφή Δ . Δεδομένου ότι $i(\Delta) \leq j(\Delta) - 1$, έχουμε ότι

$$\frac{n - [j(\Delta) - 1]}{j(\Delta) - 1} = \frac{n}{j(\Delta) - 1} - 1 \leq \frac{n}{i(\Delta)} - 1 = \frac{n - i(\Delta)}{i(\Delta)}.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (9.7), έχουμε ότι

$$\sum_{r=1}^n d\left(\frac{n-r}{r}\right) \pi\lambda\eta\theta(\mathcal{T}(X_r) \setminus \mathcal{T}(X_{r+1})) \leq \sum_{\Delta} d\left(\frac{n - i(\Delta)}{i(\Delta)}\right).$$

Το δεξιό μέλος αυτής της έκφρασης είναι το πολύ

$$\sum_{r=1}^n d\left(\frac{n-r}{r}\right) \pi\lambda\eta\theta(\mathcal{T}(X_r) \setminus \mathcal{T}(X_{r-1}))$$

(όπου η διαφορά είναι μόνο εκείνες οι μορφές που δημιουργούνται αλλά δεν διαγράφονται ποτέ) και άρα έχουμε

$$\mathbb{E}\left[\sum_{r=1}^n \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r-1}} \pi\lambda\eta\theta(K(\Delta))\right] \leq \sum_{r=1}^n d\left(\frac{n-r}{r}\right) \mathbb{E}[\pi\lambda\eta\theta(\mathcal{T}(X_r) \setminus \mathcal{T}(X_{r-1}))].$$

Από το Θεώρημα 9.14, παίρνουμε το φράγμα που θέλαμε να αποδείξουμε:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{r=1}^n \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r-1}} \pi\lambda\eta\theta(K(\Delta))\right] \leq \sum_{r=1}^n d\left(\frac{n-r}{r}\right) \frac{d}{r} \mathbb{E}[\pi\lambda\eta\theta(\mathcal{T}(X_r))]. \quad \square$$

Η ανάλυση στο αφηρημένο επίπεδο έχει πλέον ολοκληρωθεί. Ας δούμε για παράδειγμα πώς μπορούμε να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα στον τυχαιοκρατικό αυξητικό αλγόριθμό μας για τον υπολογισμό του τριγωνισμού Delaunay. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι

$$\sum_{\Delta} \pi\lambda\eta\theta(K(\Delta)) = O(n \log n),$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλα τα τρίγωνα Δ που δημιουργούνται από τον αλγόριθμο, και όπου $K(\Delta)$ είναι το σύνολο των σημείων εντός του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου Δ .

Δυστυχώς, όταν τα σημεία δεν βρίσκονται σε γενική θέση, φαίνεται να είναι αδύνατο να ορίσουμε σωστά έναν χώρο μορφών με μορφές που να είναι τρίγωνα. Επομένως θα επιλέξουμε τις μορφές κάπως διαφορετικά.

Έστω P ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο, όχι απαραίτητα σε γενική θέση. Έστω $\Omega := \{p_0, p_{-1}, p_{-2}\}$ το σύνολο των τριών σημείων που χρησιμοποιήσαμε για να αρχίσει η κατασκευή. Υπενθυμίζουμε ότι το p_0 είναι το λεξικογραφικά μεγαλύτερο σημείο στο P , ενώ τα σημεία p_{-1} και p_{-2} επιλέχθηκαν έτσι ώστε να μην καταστρέφουν καμία ακμή Delaunay μεταξύ σημείων του P . Θέτουμε $X := P \setminus \{p_0\}$. Κάθε τριάδα $\Delta = (p_i, p_j, p_k)$ σημείων του $X \cup \Omega$ που δεν κείται επάνω σε ευθεία ορίζει μια μορφή με $D(\Delta) := \{p_i, p_j, p_k\} \cap X$, ενώ $K(\Delta)$ είναι το σύνολο των σημείων του X που κείται είτε στο εσωτερικό του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $p_i p_j p_k$ είτε στο κυκλικό τόξο αυτού του κύκλου που εκτείνεται από το p_i έως το p_k και περιέχει το p_j . Μια τέτοια μορφή Δ την αποκαλούμε *γωνία Delaunay* του X , διότι η Δ είναι ενεργή επί του $S \subseteq X$ αν και μόνο αν τα p_i, p_j , και p_k είναι διαδοχικά σημεία επί του συνόρου κάποιας έδρας του γραφήματος Delaunay $\mathcal{TD}(\Omega \cup S)$. Σημειώτεον ότι κάθε σύνολο τριών μη συνευθειακών σημείων ορίζει τρεις διαφορετικές μορφές.

Η σημαντική παρατήρηση είναι ότι οποτεδήποτε ο αλγόριθμος ΤΡΙΓΩΝΙΣΜΟΣ DELAUNAY δημιουργεί ένα νέο τρίγωνο, το τρίγωνο αυτό είναι του τύπου $p_i p_r p_j$, όπου p_r είναι το σημείο που εισήχθη στο στάδιο αυτό, και $\overline{p_r p_i}$ και $\overline{p_r p_j}$ είναι ακμές του γραφήματος Delaunay $\mathcal{TD}(\Omega \cup P_r)$ –βλ. Λήμμα 9.10. Έπεται ότι όταν δημιουργείται το τρίγωνο $p_i p_r p_j$ η τριάδα (p_j, p_r, p_i) είναι γωνία Delaunay του $\mathcal{TD}(\Omega \cup P_r)$ και άρα ενεργή μορφή επί του συνόλου P_r . Το σύνολο $K(\Delta)$ που αντιστοιχεί σε αυτήν τη μορφή περιέχει όλα τα σημεία εντός του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $p_i p_r p_j$. Επομένως μπορούμε να θέσουμε ως φράγμα του αρχικού αθροίσματος την ποσότητα

$$\sum_{\Delta} \text{πληθ}(K(\Delta)),$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλες τις *γωνίες Delaunay* Δ που εμφανίζονται σε κάποιο ενδιάμεσο γράφημα Delaunay $\mathcal{TD}(\Omega \cup P_r)$.

Τώρα μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα 9.15. Πόσες γωνίες Delaunay υπάρχουν στο γράφημα Delaunay του $S \cup \Omega$; Η χειρότερη περίπτωση είναι όταν το γράφημα Delaunay είναι τριγωνισμός. Αν το S περιέχει r σημεία, τότε ο τριγωνισμός έχει $2(r+3) - 5$ τρίγωνα, και άρα $6(r+3) - 15 = 6r + 3$ γωνίες Delaunay. Από το Θεώρημα 9.15, έπεται ότι

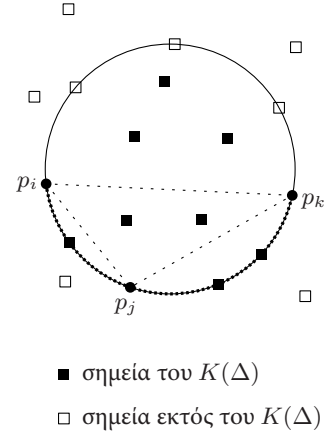
$$\sum_{\Delta} \text{πληθ}(K(\Delta)) \leq \sum_{r=1}^n 9 \binom{n-r}{r} \left(\frac{6r-3}{r} \right) \leq 54n \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \leq 54n(\ln n + 1).$$

Με αυτό το αποτέλεσμα ολοκληρώνεται τελικά και η απόδειξη του Θεωρήματος 9.12.

9.6 Σημειώσεις και σχόλια

Το πρόβλημα του τριγωνισμού ενός συνόλου σημείων είναι ένα ζήτημα της υπολογιστικής γεωμετρίας που είναι ευρέως γνωστό και εκτός του καθαυτό πεδίου. Οι τριγωνισμοί σημειοσυνόλων σε δύο και περισσότερες διαστάσεις έχουν τεράστια σημασία στην αριθμητική ανάλυση, π.χ. για τις μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων, αλλά και στην υπολογιστική γραφιστική. Στο κεφάλαιο αυτό εξετάσαμε την περίπτωση τριγωνισμών στους οποίους χρησιμοποιούνται ως κορυφές μόνο τα διδόμενα σημεία. Αν επιτρέπεται να χρησιμοποιηθούν και πρόσθετα σημεία –τα λεγόμενα σημεία Steiner– το πρόβλημα είναι γνωστό και ως *πλεγμάτωση* και εξετάζεται με περισσότερες λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 14.

Ο Lawson [244] απέδειξε ότι οποιοδήποτε δύο τριγωνισμοί ενός επίπεδου σημειοσυνόλου μπορούν να μετασχηματιστούν ο ένας στον άλλον μέσω μεταστροφών ακμών. Αργότερα, πρότεινε την εύρεση ενός καλού τριγωνισμού μέσω



επαναληπτικών μεταστροφών ακμών, όπου κάθε τέτοια μεταστροφή βελτιώνει κάποια συνάρτηση κόστους του τριγωνισμού [245].

Για αρκετό διάστημα ήταν γνωστό εμπειρικά ότι οι τριγωνισμοί που οδηγούν σε καλές παρεμβολές αποφεύγουν τα μακρόστενα τρίγωνα [38]. Το συμπέρασμα ότι –αν αγνοήσουμε τις εκφυλισμένες περιπτώσεις– υπάρχει μόνο ένας τοπικά βέλτιστος τριγωνισμός όσον αφορά το γωνιοδιάνυσμα, ο τριγωνισμός Delaunay, οφείλεται στον Sibson [360].

Λαμβάνοντας υπ' όψιν μόνο το γωνιοδιάνυσμα, αγνοούμε εντελώς το ύψος των δειγματικών σημείων, οπότε ακολουθούμε τη λεγόμενη προσέγγιση της ανεξαρτησίας από τα δεδομένα. Ένας καλός λόγος να ακολουθηθεί κανείς αυτήν την προσέγγιση έχει δοθεί από τον Rippe [328], ο οποίος απέδειξε ότι ο τριγωνισμός Delaunay είναι ο τριγωνισμός που ελαχιστοποιεί την *τραχύτητα* του προκύπτοντος αναγλύφου, ανεξάρτητα από τα δεδομένα του ύψους. Εδώ, η τραχύτητα ορίζεται ως το ολοκλήρωμα του τετραγώνου της L_2 -νόρμας της κλίσης του αναγλύφου. Σε πιο πρόσφατες εργασίες άλλοι ερευνητές έχουν προσπαθήσει να βρουν βελτιωμένους τριγωνισμούς λαμβάνοντας υπ' όψιν τις πληροφορίες για τα ύψη. Αυτή η προσέγγιση της *εξάρτησης από τα δεδομένα* προτάθηκε για πρώτη φορά από τους Dyn et al. [154], οι οποίοι προτείνουν διαφορετικά κριτήρια κόστους για τριγωνισμούς, που εξαρτώνται από τα ύψη των δειγματικών σημείων. Αξίζει να σημειωθεί ότι για τους βελτιωμένους τριγωνισμούς τους ξεκινούν με αφετηρία τον τριγωνισμό Delaunay και εκτελούν επαναληπτικά μεταστροφές ακμών. Η ίδια μέθοδος ακολουθείται από τους Quak και Schumaker [325], οι οποίοι μελετούν την τμηματικά κυβική παρεμβολή, και από τον Brown [76]. Οι Quak και Schumaker παρατηρούν ότι οι τριγωνισμοί τους αποτελούν μικρές βελτιώσεις συγκριτικά με τον τριγωνισμό Delaunay όταν προσπαθούν να προσεγγίσουν ομαλές επιφάνειες, αλλά ενδέχεται να είναι δραστικά διαφορετικοί για μη ομαλές επιφάνειες.

Περισσότερες παραπομπές σχετικά με τους τριγωνισμούς Delaunay ως το δυϊκό αντίστοιχο των διαγραμμάτων Voronoi παρατίθενται στο Κεφάλαιο 7.

Ο τυχαioκρατικός αυξητικός αλγόριθμος που παρουσιάσαμε εδώ αποδίδεται στους Guibas et al. [196], αλλά η ανάλυσή μας για το $\sum_{\Delta} \text{πληθ}(K(\Delta))$ προέρχεται από το βιβλίο του Mulmuley [290]. Το σκεπτικό της επέκτασης της ανάλυσης για την περίπτωση σημείων σε εκφυλισμένη θέση είναι πρωτότυπο. Εναλλακτικοί τυχαioκρατικοί αλγόριθμοι έχουν αναπτυχθεί από τους Boissonnat et al. [69, 71], και από τους Clarkson και Shor [133].

Όπως έχει διαπιστωθεί, διάφορα *γεωμετρικά γραφήματα* που ορίζονται για κάποιο σύνολο σημείων P αποτελούν υπογραφήματα του τριγωνισμού Delaunay του P . Το σημαντικότερο από αυτά είναι μάλλον το *ενκλείδριο ελαφρύτατο συνδεδετικό δέντρο* του συνόλου των σημείων [349]: άλλα τέτοια γραφήματα είναι το *γράφημα Gabriel* [186] και το *γράφημα σχετικής γειτονίας* [374]. Τα γεωμετρικά αυτά γραφήματα εξετάζονται στις ασκήσεις.

Ένας άλλος σημαντικός τριγωνισμός είναι ο *ελαχιστοβαρής τριγωνισμός*, δηλαδή ένας τριγωνισμός του οποίου το βάρος είναι ελαχισταίο (όπου ως βάρος ενός τριγωνισμού θεωρείται το άθροισμα των μηκών όλων των ακμών του) [12, 42, 146, 147]. Όπως αποδείχθηκε πρόσφατα [291], ο προσδιορισμός ενός ελαχιστοβαρούς τριγωνισμού μεταξύ όλων των τριγωνισμών ενός δεδομένου σημειοσυνόλου αποτελεί NP-πλήρες πρόβλημα.

9.7 Ασκήσεις

9.1 Στην άσκηση αυτή θα εξετάσουμε το πλήθος των διαφορετικών τριγωνισμών που επιδέχεται ένα σύνολο n σημείων στο επίπεδο.

α'. Αποδείξτε ότι κανένα σύνολο n σημείων δεν μπορεί να τριγωνιστεί με περισσότερους από $2^{\binom{n}{2}}$ τρόπους.

β'. Αποδείξτε ότι υπάρχουν σύνολα n σημείων που μπορούν να τριγωνιστούν με τουλάχιστον $2^{n-2\sqrt{n}}$ διαφορετικούς τρόπους.

- 9.2 Ο βαθμός ενός σημείου σε έναν τριγωνισμό είναι το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν σε αυτό. Αναφέρετε ένα παράδειγμα συνόλου n σημείων στο επίπεδο για το οποίο, όπως και αν τριγωνιστεί, υπάρχει πάντα σημείο βαθμού $n - 1$.
- 9.3 Αποδείξτε ότι οποιοδήποτε δύο τριγωνισμοί ενός επίπεδου σημειοσυνόλου μπορούν να μετασχηματιστούν ο ένας στον άλλον με μεταστροφές ακμών. *Υπόδειξη:* Δείξτε αρχικά ότι οποιοδήποτε δύο τριγωνισμοί ενός κυρτού πολυγώνου μπορούν να μετασχηματιστούν ο ένας στον άλλον με μεταστροφές ακμών.
- 9.4 Δείξτε ότι, σε οποιονδήποτε τριγωνισμό κυρτού πολυγώνου του οποίου οι κορυφές κείνται πάνω σε κύκλο, η ελάχιστη γωνία είναι η ίδια. Αυτό συνεπάγεται ότι οποιαδήποτε συμπλήρωση του τριγωνισμού Delaunay ενός συνόλου σημείων μεγιστοποιεί την ελάχιστη γωνία.
- 9.5 α'. Για τέσσερα δεδομένα σημεία p, q, r, s στο επίπεδο, αποδείξτε ότι το σημείο s κείται στο εσωτερικό του κύκλου που διέρχεται από τα p, q , και r αν και μόνο αν ισχύει η εξής συνθήκη. Υποθέτουμε ότι τα p, q, r αποτελούν τις κορυφές ενός τριγώνου κατά την ωρολόγια φορά.

$$\det \begin{pmatrix} p_x & p_y & p_x^2 + p_y^2 & 1 \\ q_x & q_y & q_x^2 + q_y^2 & 1 \\ r_x & r_y & r_x^2 + r_y^2 & 1 \\ s_x & s_y & s_x^2 + s_y^2 & 1 \end{pmatrix} > 0.$$

- β'. Ο έλεγχος της ορίζουσας από το σκέλος α' μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελεγχθεί αν μια ακμή σε κάποιον τριγωνισμό είναι επιτρεπτή. Μπορείτε να σκεφτείτε έναν εναλλακτικό τρόπο υλοποίησης αυτού του ελέγχου; Εξετάστε τα πλεονεκτήματα και/ή τα μειονεκτήματα της μεθόδου σας σε σύγκριση με τον έλεγχο της ορίζουσας.
- 9.6 Περιγράψαμε τον αλγόριθμο ΤΡΙΓΩΝΙΣΜΟΣ DELAUNAY μέσω της κλήσης μιας αναδρομικής διαδικασίας ονόματι ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΑΚΜΗΣ. Καταστρώστε μια επαναληπτική εκδοχή αυτής της διαδικασίας, και εξετάστε τα πλεονεκτήματα και/ή τα μειονεκτήματα της διαδικασίας σας σε σύγκριση με την αναδρομική εκδοχή.
- 9.7 Αποδείξτε ότι όλες οι ακμές του $\mathcal{FD}(P_r)$ που δεν ανήκουν στο $\mathcal{FD}(P_{r-1})$ προσπίπτουν στο p_r . Με άλλα λόγια, οι νέες ακμές του $\mathcal{FD}(P_r)$ σχηματίζουν έναν αστέρα όπως στο Σχήμα 9.8. Δώστε μια άμεση απόδειξη, χωρίς να αναφερθείτε στον αλγόριθμο ΤΡΙΓΩΝΙΣΜΟΣ DELAUNAY.
- 9.8 Έστω P ένα σύνολο n σημείων σε γενική θέση, και έστω $q \notin P$ ένα σημείο εντός του κυρτού περιβλήματος του P . Έστω p_i, p_j, p_k οι κορυφές ενός τριγώνου του τριγωνισμού Delaunay του P το οποίο περιέχει το q . (Καθώς το q μπορεί να κείται επάνω σε κάποια ακμή του τριγωνισμού Delaunay, ενδέχεται να υπάρχουν δύο τέτοια τρίγωνα.) Αποδείξτε ότι τα τμήματα $\overline{qp_i}$, $\overline{qp_j}$, και $\overline{qp_k}$ είναι ακμές του τριγωνισμού Delaunay του $P \cup \{q\}$.
- 9.9 Ο αλγόριθμος που παρουσιάστηκε σε αυτό το κεφάλαιο είναι τυχαιοκρατικός, και υπολογίζει τον τριγωνισμό Delaunay ενός συνόλου n σημείων σε αναμενόμενο χρόνο $O(n \log n)$. Δείξτε ότι ο χρόνος εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης του αλγορίθμου είναι $\Omega(n^2)$.

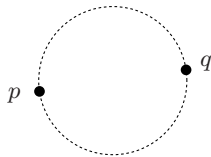
9.10 Ο αλγόριθμος που παρουσιάστηκε σε αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιεί δύο επιπλέον σημεία p_{-1} και p_{-2} για την έναρξη της κατασκευής του τριγωνισμού Delaunay. Τα σημεία αυτά δεν θα πρέπει να βρίσκονται επάνω σε κανέναν κύκλο ο οποίος ορίζεται από κάποια τριάδα σημείων εισόδου, ενώ θα πρέπει να απέχουν αρκετά ώστε να «βλέπουν» τα σημεία του P με τη λεξικογραφική τους διάταξη. Οι συνθήκες αυτές επιβλήθηκαν μέσω της ειδικής υλοποίησης των πράξεων που αφορούν αυτά τα σημεία –βλ. σελ. 202. Υπολογίστε συγκεκριμένες συντεταγμένες για τα πρόσθετα σημεία, τέτοιες ώστε να μην είναι απαραίτητη αυτή η ειδική υλοποίηση. Είναι καλύτερη αυτή η μέθοδος;

9.11 Ένα *ευκλείδειο ελαφρύτατο συνδετικό δέντρο* (ΕΕΣΔ) ενός συνόλου P από σημεία στο επίπεδο είναι ένα δέντρο ελάχιστου συνολικού μήκους (ή «βάρους») ακμών το οποίο συνδέει όλα τα σημεία. Τα ΕΕΣΔ παρουσιάζουν ενδιαφέρον για εφαρμογές όπου θέλουμε να συνδέσουμε εστίες σε ένα διδιάστατο περιβάλλον μέσω γραμμών επικοινωνίας (τοπικών δικτύων), δρόμων, σιδηροδρομικών γραμμών, κ.λπ.

α'. Αποδείξτε ότι το σύνολο των ακμών ενός τριγωνισμού Delaunay του P περιέχει ένα ΕΕΣΔ για το P .

β'. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, καταστρώστε έναν αλγόριθμο χρόνου $O(n \log n)$ για τον υπολογισμό ενός ΕΕΣΔ για το P .

9.12 Το πρόβλημα του *περιοδούντος πωλητή* συνίσταται στο να υπολογιστεί μια βραχύτατη περιοδεία που να διέρχεται από όλα τα σημεία ενός δεδομένου σημειοσυνόλου. Το πρόβλημα του περιοδούντος πωλητή είναι NP-δυσχερές. Δείξτε πώς μπορούμε να βρούμε μια περιοδεία με μήκος που να μην υπερβαίνει το διπλάσιο του βέλτιστου μήκους, χρησιμοποιώντας το ΕΕΣΔ που ορίστηκε στην προηγούμενη άσκηση.



9.13 Το *γράφημα Gabriel* ενός συνόλου P από σημεία στο επίπεδο ορίζεται ως εξής: Δύο σημεία p και q συνδέονται με ακμή του γραφήματος Gabriel αν και μόνο αν ο δίσκος με διάμετρο pq δεν περιέχει κανένα άλλο σημείο του P .

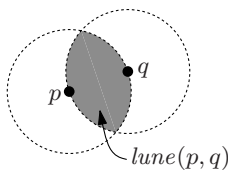
α'. Υποθέτουμε ότι για οποιαδήποτε δύο σημεία p και q , αν ο μικρότατος περικλειών δίσκος δεν περιέχει σημεία του P στο εσωτερικό του, τότε δεν περιέχει επίσης σημεία του P στο σύνορό του. Αποδείξτε ότι το $\mathcal{GD}(P)$ περιέχει το γράφημα Gabriel του P .

β'. Αποδείξτε ότι τα p και q είναι γειτονικά στο γράφημα Gabriel του P αν και μόνο αν η ακμή Delaunay μεταξύ των p και q τέμνει την δυϊκή της ακμή Voronoi.

γ'. Καταστρώστε έναν αλγόριθμο χρόνου $O(n \log n)$ για τον υπολογισμό του γραφήματος Gabriel ενός συνόλου n σημείων.

9.14 Το *γράφημα σχετικής γειτονίας* ενός συνόλου P από σημεία στο επίπεδο ορίζεται ως εξής: Δύο σημεία p και q συνδέονται με ακμή του γραφήματος σχετικής γειτονίας αν και μόνο αν

$$d(p, q) \leq \min_{r \in P, r \neq p, q} \max(d(p, r), d(q, r)).$$



α'. Για δύο δεδομένα σημεία p και q , έστω $\text{lune}(p, q)$ η περιοχή που σχηματίζει η τομή των δύο κύκλων με κέντρα τα p και q και ακτίνα $d(p, q)$. Αποδείξτε ότι τα p και q συνδέονται στο γράφημα σχετικής γειτονίας αν και μόνο αν η περιοχή $\text{lune}(p, q)$ δεν περιέχει στο εσωτερικό της κανένα σημείο του P .

β'. Αποδείξτε ότι το $\mathcal{GD}(P)$ περιέχει το γράφημα σχετικής γειτονίας του P .

γ'. Καταστρώστε έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό του γραφήματος σχετικής γειτονίας ενός δεδομένου σημειοσυνόλου.

- 9.15 Αποδείξτε την παρακάτω σχέση μεταξύ των συνόλων ακμών ενός ΕΕΣΔ, του γραφήματος σχετικής γειτονίας (ΓΣΓ), του γραφήματος Gabriel (ΓG), και του γραφήματος Delaunay (\mathcal{TD}) ενός συνόλου σημείων P .

Ενότητα 9.7
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$\text{ΕΕΣΔ} \subseteq \text{ΓΣΓ} \subseteq \text{ΓG} \subseteq \mathcal{TD}.$$

(Για τον ορισμό αυτών των γραφημάτων, βλ. προηγούμενες ασκήσεις.)

- 9.16 Μια k -συσταδοποίηση ενός συνόλου P από n σημεία στο επίπεδο είναι μια διαμέριση του P σε k μη κενά υποσύνολα P_1, \dots, P_k . Ορίζουμε ως απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο συστάδων P_i, P_j την ελάχιστη απόσταση μεταξύ ενός σημείου από το P_i και ενός σημείου από το P_j , δηλαδή

$$\text{απ}(P_i, P_j) := \min_{p \in P_i, q \in P_j} \text{απ}(p, q).$$

Θέλουμε να βρούμε μια k -συσταδοποίηση (για δεδομένα k και P) που να μεγιστοποιεί την ελάχιστη απόσταση μεταξύ συστάδων.

- α'. Υποθέστε ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ συστάδων επιτυγχάνεται από τα σημεία $p \in P_i$ και $q \in P_j$. Αποδείξτε ότι το ευθύγραμμο τμήμα \overline{pq} είναι ακμή του τριγωνισμού Delaunay του P .
- β'. Καταστρώστε έναν αλγόριθμο χρόνου $O(n \log n)$ για τον υπολογισμό μιας k -συσταδοποίησης που να μεγιστοποιεί την ελάχιστη απόσταση μεταξύ συστάδων. *Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε μια δομή δεδομένων Ένωσης-Εύρεσης.

- 9.17 Το *βάρος* ενός τριγωνισμού είναι το άθροισμα των μηκών (ή «βαρών») όλων των ακμών του τριγωνισμού. *Ελαχιστοβαρής τριγωνισμός* είναι ένας τριγωνισμός του οποίου το βάρος είναι ελαχιστιαίο. Διαψεύστε την εικασία ότι ο τριγωνισμός Delaunay είναι ελαχιστοβαρής.
- 9.18* Δώστε ένα παράδειγμα γεωμετρικού χώρου μορφών (X, Π, D, K) όπου το $\mathcal{T}(X_r) \setminus \mathcal{T}(X_{r+1})$ μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλο συγκριτικά με το $\mathcal{T}(X_{r+1}) \setminus \mathcal{T}(X_r)$.
- 9.19* Αναλύστε τον τυχαιοκρατικό αυξητικό αλγόριθμο του Κεφαλαίου 6 χρησιμοποιώντας χώρους μορφών.