ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΕΚΔΟΣΗ

Το βιβλίο αυτό είναι επηρεασμένο, σε όλες τις πλευρές του, από την επιθυμία να παρουσιάσει τον Λογισμό όχι απλώς ως εισαγωγή, αλλά ως μια ουσιαστική πρώτη συνάντηση με τα Μαθηματικά. Από την εποχή που τα θεμέλια της Ανάλυσης προσέφεραν το πεδίο στο οποίο αναπτύχθηκαν οι σύγχρονοι τρόποι της μαθηματικής σκέψης, ο Λογισμός πρέπει να είναι ο τόπος όπου χρειάζεται να επιδιώκουμε, παρά να αποφεύγουμε, να ενισχύεται η διαίσθηση με τη λογική. Εκτός από την ανάπτυξη της διαίσθησης των σπουδαστών σε σχέση με τις όμορφες έννοιες της Ανάλυσης, σίγουρα είναι εξίσου σημαντικό να τους πείσουμε ότι η ακρίβεια και η αυστηρότητα δεν αποτελούν ούτε εμπόδιο στη διαίσθηση ούτε αυτοσκοπό, αλλά το φυσικό μέσον με το οποίο διαμορφώνουμε και σκεπτόμαστε τις μαθηματικές ερωτήσεις.

Αυτός ο στόχος συνεπάγεται και μια αντίληψη για τα Μαθηματικά, την οποία, κατά κάποιον τρόπο, όλο το βιβλίο προσπαθεί να υπερασπίσει. Ανεξάρτητα του πόσο καλά έχουν αναπτυχθεί συγκεκριμένα θέματα, οι στόχοι μας θα έχουν υλοποιηθεί αν το βιβλίο πετύχει στο σύνολό του. Για αυτόν το λόγο, δεν θα είχε αξία να αναφέρουμε απλώς τα θέματα που καλύπτονται ή να αναφερθούμε σε παιδαγωγικές πρακτικές και άλλες καινοτομίες. Ακόμα και η γρήγορη ματιά, που συνήθως επιδαψιλεύεται στα νέα βιβλία Λογισμού, κατά πάσα πιθανότητα μπορεί να πει πολύ περισσότερα από μια εκτεταμένη διαφήμιση, και ο κάθε διδάσκων που έχει ισχυρές προτιμήσεις σε συγκεκριμένες όψεις του Λογισμού γνωρίζει πού να κοιτάξει για να δει αν το βιβλίο αυτό εκπληρώνει τις απαιτήσεις του.

Εν τούτοις, ορισμένα χαρακτηριστικά του βιβλίου απαιτούν έναν αναλυτικό σχολιασμό. Από τα 29 κεφάλαιά του, τα 2 (με αστερίσκο) είναι προαιρετικά, και τα 3 κεφάλαια που αποτελούν το 5ο Μέρος περιελήφθησαν μόνο χάριν εκείνων των σπουδαστών που θα ήθελαν να εξετάσουν από μόνοι τους μια κατασκευή των πραγματικών αριθμών. Επιπλέον, τα Παραρτήματα των Κεφαλαίων 3 και 11 επίσης περιέχουν προαιρετικό υλικό.

Η διάταξη των υπολοίπων κεφαλαίων είναι επί τούτου τελείως ανελαστική, αφού ο σκοπός του βιβλίου είναι να παρουσιάσει τον Λογισμό ως εξέλιξη μιας ιδέας και όχι ως μια συλλογή «θεμάτων». Μια και οι πλέον συναρπαστικές έννοιες του Λογισμού δεν εμφανίζονται έως το 3ο Μέρος, θα πρέπει να επισημάνω ότι το 1ο και το 2ο Μέρος πιθανόν να απαιτήσουν λιγότερο χρόνο από ό,τι δείχνει η έκτασή τους —αν και όλο το βιβλίο καλύπτει το διδακτικό πρόγραμμα ενός έτους, τα διάφορα κεφάλαια δεν στοχεύουν στο να καλυφθούν με ομοιόμορφο ρυθμό. Ένα μάλλον φυσικό σημείο διαχωρισμού εμφανίζεται μεταξύ του 2ου και του 3ου Μέρους, και έτσι είναι δυνατόν να φτάσουμε στην παραγώγιση και την ολοκλήρωση πιο γρήγορα αν αντιμετωπίσουμε το 2ο Μέρος συνοπτικά, και πιθανόν επιστρέψουμε αργότερα για μια πιο λεπτομερή θεώρηση. Αυτή η διάταξη της ύλης αντιστοιχεί στην παραδοσιακή παρουσίαση στα περισσότερα βιβλία Λογισμού, αλλά αισθάνομαι ότι θα ελαττώσει την αξία του βιβλίου για σπουδαστές που ξέρουν από πριν λίγο Λογισμό, καθώς και για τους ικανούς σπουδαστές με κάπως αξιόλογο υπόβαθρο.

Τα προβλήματα έχουν σχεδιαστεί λαμβάνοντας υπόψη αυτήν την πιο πάνω ειδική κατηγορία ακροατηρίου. Κυμαίνονται από εκείνα που λύνονται απευθείας χωρίς να είναι υπεραπλουστευμένα, δηλαδή ασκήσεις που αναπτύσσουν τις βασικές μεθόδους και ελέγχουν την κατανόηση των εννοιών, μέχρι προβλήματα ουσιαστικής δυσκολίας και, ελπίζω, σχετικού ενδιαφέροντος. Υπάρχουν συνολικά περίπου 625 προβλήματα. Εκείνα που δίνουν έμφαση στους μαθηματικούς χειρισμούς συνήθως περιέχουν πολλά παραδείγματα, αριθμημένα με μικρούς λατινικούς αριθμούς, ενώ τα μικρά ελληνικά γράμματα συνήθως χρησιμοποιούνται για να σηματοδοτήσουν αλληλοσχετιζόμενα μέρη σε άλλα προβλήματα. Μια ένδειξη της σχετικής δυσκολίας παρέχει το σύστημα του μονού και διπλού αστερίσκου, αλλά υπάρχουν τόσα πολλά κριτήρια για να θεωρηθεί κάτι δύσκολο, που αυτός ο οδηγός δεν είναι τελείως αξιόπιστος. Μερικά προβλήματα είναι τόσο δύσκολα, ειδικά αν δεν συμβουλευτούμε τις υποδείξεις, που και οι καλοί σπουδαστές θα πρέπει μάλλον να προσπαθήσουν μόνο εκείνα που τους ενδιαφέρουν πολύ. Από τα λιγότερο δύσκολα προβλήματα θα είναι μάλλον εύκολο να επιλεγεί ένα μέρος τους που θα δώσει ενασχόληση σε μια καλή τάξη χωρίς να την απογοητεύσει. Το Μέρος των Απαντήσεων περιέχει λύσεις περίπου των μισών ασκήσεων που προσφέρονται ως παραδείγματα, ώστε να γίνει μια καλή εξέταση της μεθοδολογικής ικανότητας των σπουδαστών. Υπάρχει και ξεχωριστό βιβλίο απαντήσεων που περιέχει τις λύσεις των υπολοίπων προβλημάτων. Τέλος, υπάρχει μια Προτεινόμενη Βιβλιογραφία στην οποία συχνά αναφέρονται τα προβλήματα, καθώς και Ευρετήριο Συμβόλων.

Είμαι ευγνώμων που μου δίνεται η ευκαιρία να αναφέρω τους πολλούς ανθρώπους στους οποίους οφείλω ευχαριστίες. Η Jane Bjorkgren έφερε εις πέρας το κολοσσιαίο έργο της στοιχειοθεσίας, αναπληρώνοντας την ακανόνιστη παραγωγή του χειρογράφου μου. Ο Richard Serkey βοήθησε να συγκεντρωθεί το υλικό με σημαντικές ιστορικές πληροφορίες που υπάρχει στα προβλήματα, και ο Richard Weiss μου έδωσε τις απαντήσεις που υπάρχουν στο τέλος του βιβλίου. Είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων στους φίλους μου Michael Freeman, Jay Goldman, Anthony Phillips και Robert Wells για τη φροντίδα με την οποία διάβασαν τις προκαταρκτικές μορφές του βιβλίου, και τον αλύπητο τρόπο με τον οποίο διατύπωσαν την κριτική τους. Δεν χρειάζεται να πω ότι δεν ευθύνονται για ελαττώματα που έχουν απομείνει, ειδικά αφού κάποιες φορές απέρριψα υποδείξεις τους που θα μπορούσαν να κάνουν το βιβλίο κατάλληλο για μια ευρύτερη ομάδα φοιτητών. Πρέπει να εκφράσω τον θαυμασμό μου προς τους εκδότες και το προσωπικό του W.A. Benjamin, Inc., που πάντοτε προσπαθούσαν να αυξήσουν τη θελκτικότητα του βιβλίου, αν και γνώριζαν το κοινό για το οποίο προοριζόταν.

Οι ατέλειες που πάντοτε περιέχουν οι πρώτες εκδόσεις έγιναν ανεκτές με λεβεντιά από μια σκληροτράχηλη ομάδα πρωτοετών στο Πανεπιστήμιο του Brandeis, κατά τη διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους 1965-1966, στις παραδόσεις για ένα τμήμα αριστούχων. Η μισή ύλη αφιερώθηκε στην Άλγεβρα και την Τοπολογία και η άλλη μισή στον Λογισμό, με κύριο σύγγραμμα το παρόν βιβλίο. Υποχρεώνομαι υπό τις παρούσες συνθήκες να αναφέρω ότι είχε επιτυχία που με αντάμειψε. Βεβαίως, όλα αυτά εκ του ασφαλούς —στο κάτωκάτω, είναι απίθανο μια τάξη να εγερθεί σύσσωμη και να διαμαρτυρηθεί δημοσίως— αλλά και οι ίδιοι οι σπουδαστές μού φάνηκε ότι αξίζουν συγχαρητηρίων, αφού απορρόφησαν με προσοχή μια εντυπωσιακά μεγάλη ύλη. Ευελπιστώ ότι και κάποιοι άλλοι σπουδαστές θα μπορέσουν να χρησιμοποιήσουν το βιβλίο με τον ίδιο καλό σκοπό και με τον ίδιο ενθουσιασμό.

Waltman, Massachusetts **MICHAEL SPIVAK**
Φεβρουάριος 1967

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΚΔΟΣΗ

Μου είπαν πολλές φορές ότι ο τίτλος του βιβλίου αυτού θα έπρεπε να ήταν κάτι σαν «Μια Εισαγωγή στην Ανάλυση», αφού χρησιμοποιείται συνήθως στις παραδόσεις όπου οι σπουδαστές έχουν ήδη μάθει τη μηχανική πλευρά του Λογισμού· τέτοια μαθήματα είναι καθιερωμένα πλέον στην Ευρώπη και συνηθίζονται τελευταία όλο και πιο πολύ στις ΗΠΑ. Μετά από 13 χρόνια μου φαίνεται πολύ αργά να αλλάξω τον τίτλο, αλλά χρειαζόταν άλλες αλλαγές πέρα από τις διορθώσεις της πληθώρας των τυπογραφικών και μη σφαλμάτων. Υπάρχουν τώρα στο βιβλίο ξεχωριστά Παραρτήματα για πολλά θέματα, που στην πρώτη έκδοση είχαν υποτιμηθεί: πολικές συντεταγμένες, ομοιόμορφη συνέχεια, παραμετρικοποίηση καμπυλών, αθροίσματα Riemann, και η χρήση των ολοκληρωμάτων για τον υπολογισμό μηκών, όγκων και εμβαδών. Μερικά θέματα, όπως ο χειρισμός των δυναμοσειρών, εξετάζονται πιο αναλυτικά στο παρόν σύγγραμμα και υπάρχουν επίσης πολλά νέα προβλήματα σε σχέση με αυτά τα θέματα, ενώ άλλα θέματα, όπως η μέθοδος Newton, ο Κανόνας του Τραπεζίου και του Simpson, αναπτύσσονται μέσω των προβλημάτων. Υπάρχουν συνολικά 160 περίπου νέα προβλήματα, πολλά από τα οποία είναι μέσης δυσκολίας, κάπου ανάμεσα στα λίγα προβλήματα ρουτίνας στην αρχή κάθε κεφαλαίου και σε εκείνα τα δυσκολότερα που εμφανίζονται αργότερα.

Πολλά από τα νέα προβλήματα τα εκπόνησε ο Ted Shifrin. Ο Frederick Gordon επισήμανε αρκετά σοβαρά λάθη στα προβλήματα της 1ης έκδοσης, και υπέδειξε ορισμένες μη τετριμμένες διορθώσεις, όπως εκείνη της κομψής απόδειξης του Θεωρήματος 12-2, η οποία κατελάμβανε δύο Λήμματα και δύο σελίδες στην πρώτη έκδοση. Ο Joseph Lipman μου μίλησε επίσης για αυτή την απόδειξη, και για ένα παρόμοιο τέχνασμα στην απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος στο παράρτημα του Κεφαλαίου 11, το οποίο είχε αφεθεί αναπόδεικτο στην πρώτη έκδοση. Ο Roy O. Davies μου πρότεινε το τέχνασμα για το Πρόβλημα 11-66 το οποίο προηγουμένως αποδεικνυόταν μόνο στο Πρόβλημα 20-8 [21-8 στην τρίτη έκδοση] και η Marina Ratner πρότεινε αρκετά ενδιαφέροντα προβλήματα, ειδικά κάποια για την ομοιόμορφη συνέχεια και τις σειρές. Σε όλους αυτούς τους ανθρώπους απευθύνω τις ευχαριστίες μου, και εύχομαι κατά τη δημιουργία της νέας έκδοσης η συνεισφορά τους να μην έχει ενσωματωθεί με αδέξιο τρόπο.

[1980] **MICHAEL SPIVAK**

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΤΗ ΕΚΔΟΣΗ

Η πιο σημαντική αλλαγή σε αυτήν την τρίτη έκδοση είναι η συμπερίληψη ενός νέου (με αστερίσκο) Κεφαλαίου 17 για τις κινήσεις των πλανητών, στο οποίο ο Απειροστικός Λογισμός εφαρμόζεται σε ένα πραγματικό πρόβλημα Φυσικής.

Σε προετοιμασία αυτού, το παλαιό Παράρτημα του Κεφαλαίου 4 αντικαταστάθηκε από τρία Παραρτήματα: τα δύο πρώτα καλύπτουν τα διανύσματα και τις κωνικές τομές, ενώ οι πολικές συντεταγμένες μετατέθηκαν στο τρίτο Παράρτημα, το οποίο περιλαμβάνει και τις εξισώσεις των κωνικών τομών σε πολικές συντεταγμένες. Επιπλέον, το Παράρτημα του Κεφαλαίου 12 επεκτάθηκε και πραγματεύεται διανυσματικές πράξεις σε διανυσματικές καμπύλες.

Μια ακόμη μεγάλη αλλαγή είναι απλώς η αναδιοργάνωση του παλαιού υλικού. «Το κοσμοπολίτικο ολοκλήρωμα», το οποίο προηγουμένως ήταν το δεύτερο Παράρτημα του Κεφαλαίου 13, είναι πια Παράρτημα του κεφαλαίου «Στοιχειώδεις μέθοδοι ολοκλήρωσης» (το πρώην Κεφάλαιο 18 και νυν Κεφάλαιο 19). Επιπλέον, τα προβλήματα του κεφαλαίου εκείνου που χρησιμοποιούσαν ύλη του Παραρτήματος εμφανίζονται τώρα στο ανατοποθετημένο Παράρτημα.

Ορισμένες άλλες αλλαγές και κάποιες μεταβολές στην αρίθμηση των Προβλημάτων προέκυψαν από διορθώσεις και την απάλειψη λανθασμένων προβλημάτων.

Ξαφνιάστηκα αλλά και απογοητεύτηκα όταν συνειδητοποίησα ότι αφού άφησα να περάσουν 13 χρόνια μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης έκδοσης του βιβλίου, άφησα να περάσουν άλλα 14 μέχρι την τρίτη αυτή έκδοση. Όλο αυτόν τον καιρό φαίνεται πως συγκέντρωσα έναν όχι και τόσο μικρό κατάλογο διορθώσεων. Στην Προτεινόμενη Βιβλιογραφία είχα χρόνο να κάνω μόνο λίγες αλλαγές, η οποία ύστερα από όλα αυτά τα χρόνια πιθανόν να χρειάζεται μια πλήρη αναθεώρηση· αυτό θα πρέπει να περιμένει μέχρι την επόμενη έκδοση, την οποία ελπίζω να κάνω πιο έγκαιρα.

[1994] **MICHAEL SPIVAK**

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗΝ ΤΕΤΑΡΤΗ ΕΚΔΟΣΗ

Όλο υποσχέσεις! Στον πρόλογο της τρίτης έκδοσης σημείωσα ότι μεσολάβησαν 13 χρόνια μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης έκδοσης, και στη συνέχεια άλλα 14 χρόνια μέχρι την τρίτη, εκφράζοντας την ελπίδα η επόμενη έκδοση να κυκλοφορήσει πιο σύντομα. Λοιπόν, να που πέρασαν άλλα 14 χρόνια μέχρι την τέταρτη, και μάλλον τελική, έκδοση.

Παρ' ότι έγιναν μικρές αλλαγές σε ορισμένα τμήματα της ύλης, ιδιαίτερα στα Κεφάλαια 5 και 20, η έκδοση αυτή διαφέρει κυρίως όσον αφορά στην εισαγωγή πρόσθετων προβλημάτων, την πλήρη ενημέρωση της Προτεινόμενης Βιβλιογραφίας, και τη διόρθωση πολυάριθμων λαθών.

Τα παραπάνω είχαν τεθεί υπόψιν μου εδώ και χρόνια, μεταξύ άλλων από τον Nils von Barth, τον Philip Loewen, τον Fernndo Mejias, τον Lance Miller που μου έδωσε έναν μακρύ κατάλογο από τέτοια, ειδικά για το βιβλίο των απαντήσεων, και τον Michael Maltenfort που μου έδωσε έναν απίστευτα εκτενή κατάλογο με τυπογραφικά σφάλματα, λάθη και κριτική.

Περισσότερο απ' όλα όμως είμαι υπόχρεος στον φίλο μου Ted Shifrin ο οποίος όλα αυτά τα χρόνια χρησιμοποιεί το βιβλίο μου για το ανανεωμένο μάθημά του στο University of Georgia, και ο οποίος με παρακίνησε και εντέλει με βοήθησε να πραγματοποιήσω αυτή την απαραίτητη αναθεώρηση. Πρέπει επίσης να ευχαριστήσω τους φοιτητές του μαθήματός του τα τελευταία ακαδημαϊκά χρόνια, που λειτούργησαν ως πειραματόζωα για τη νέα έκδοση, η οποία είχε ως αποτέλεσμα, συγκεκριμένα, την απόδειξη που υπάρχει στο Πρόβλημα 8-20 για το Λήμμα του Ανατέλλοντος Ηλίου, η οποία είναι κατά πολύ απλούστερη από την πρωτότυπη απόδειξη του Reisz, ή ακόμη και την απόδειξη του [38] της Προτεινόμενης Βιβλιογραφίας, που τώρα έχει ολοκληρωτικά αναθεωρηθεί και αυτή, και πάλι με μεγάλη βοήθεια από τον Ted.

[2008] **MICHAEL SPIVAK**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το να έχεις συνείδηση της άγνοιάς σου
είναι ένα μεγάλο βήμα προς τη γνώση.

BENJAMIN DISRAELI

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ο τίτλος του κεφαλαίου εκφράζει με λίγα λόγια τις μαθηματικές γνώσεις που απαιτούνται για να διαβάσει κάποιος αυτό το βιβλίο. Πραγματικά, σε αυτό το σύντομο κεφάλαιο απλώς εξηγούμε τι εννοούμε με τον όρο «βασικές ιδιότητες των αριθμών»· όλες τους —πρόσθεση και πολλαπλασιασμός, αφαίρεση και διαίρεση, λύσεις εξισώσεων και ανισοτήτων, παραγοντοποίηση και άλλοι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί— μας είναι ήδη γνωστές. Όμως, το κεφάλαιο αυτό δεν είναι μια ανασκόπηση. Παρ' όλο που το θέμα είναι οικείο, η παρουσίαση που πρόκειται να κάνουμε πιθανότατα θα φανεί αρκετά πρωτότυπη· δεν είναι σκοπός μας να δώσουμε μια εκτεταμένη ανασκόπηση παλιού υλικού, αλλά να συμπυκνώσουμε αυτές τις γνώσεις σε μερικές απλές και προφανείς ιδιότητες των αριθμών. Ορισμένες μπορεί να φανούν τελείως προφανείς, όμως ένας εντυπωσιακά μεγάλος αριθμός από ποικίλα και σημαντικά αποτελέσματα είναι συνέπεια των ιδιοτήτων που θα τονίσουμε.

Από τις δώδεκα ιδιότητες που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο, οι πρώτες εννιά σχετίζονται με τις βασικές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Προς το παρόν, θα ασχοληθούμε μόνο με την πρόσθεση: η πράξη αυτή εκτελείται πάνω σε ένα ζεύγος αριθμών —το άθροισμα $a + b$ υπάρχει οποτεδήποτε μας δοθούν δύο αριθμοί a και b (που βέβαια δεν αποκλείεται να είναι ο ίδιος αριθμός). Φαίνεται ίσως λογικό να θεωρήσει κανείς την πρόσθεση σαν μια πράξη που μπορεί να εκτελεστεί με τη μία για πολλούς αριθμούς, και να πάρει ως βασική έννοια το άθροισμα $a_1 + \cdots + a_n$ των n αριθμών $a_1, \ldots, a_n$. Είναι όμως πιο βολικό να εξετάσουμε την πρόσθεση μόνο για ζεύγη αριθμών, και να ορίσουμε τα άλλα αθροίσματα συναρτήσει των αθροισμάτων αυτού του τύπου. Για το άθροισμα τριών αριθμών a, b και c, μπορούμε να ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους. Μπορούμε να προσθέσουμε πρώτα τους b και c, παίρνοντας τον $b + c$ και έπειτα να προσθέσουμε τον a σε αυτόν τον αριθμό, παίρνοντας τον $a + (b + c)$· ή να προσθέσουμε πρώτα τους a και b, και έπειτα το άθροισμα $a + b$ στον c, παίρνοντας τον $(a + b) + c$. Τα δύο σύνθετα αθροίσματα που θα πάρουμε είναι βέβαια ίσα, και αυτή είναι η πρώτη ιδιότητα που θα καταγράψουμε:

(Ι1) Αν a, b και c είναι οποιοιδήποτε αριθμοί, τότε

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Είναι σαφές ότι η ιδιότητα αυτή μας απαλλάσσει από το να ορίσουμε ξεχωριστά την έννοια του αθροίσματος τριών αριθμών: απλώς συμφωνούμε ότι το $a + b + c$ συμβολίζει τον αριθμό $a + (b + c) = (a + b) + c$. Για την πρόσθεση τεσσάρων αριθμών απαιτούνται παρόμοιοι, αν και κάπως περισσότερο πολύπλοκοι, συλλογισμοί. Ο συμβολισμός $a + b + c + d$ ορίζεται να σημαίνει

$$\begin{array}{rll} & (1) & ((a + b) + c) + d, \\ \text{ή} & (2) & (a + (b + c)) + d, \\ \text{ή} & (3) & a + ((b + c) + d), \\ \text{ή} & (4) & a + (b + (c + d)), \\ \text{ή} & (5) & (a + b) + (c + d). \end{array}$$

Αυτός ο ορισμός είναι σαφής γιατί οι παραπάνω αριθμοί είναι όλοι ίσοι. Ευτυχώς, *αυτό* το γεγονός δεν χρειάζεται να καταγραφεί ως ξεχωριστή ιδιότητα, γιατί μπορεί να αποδειχθεί από την ιδιότητα Ι1 που έχουμε ήδη αναφέρει. Για παράδειγμα, ξέρουμε από την Ι1 ότι

$$(a+b)+c = a+(b+c),$$

από όπου έπεται αμέσως ότι οι (1) και (2) είναι ίσοι. Η ισότητα των (2) και (3) είναι άμεση συνέπεια της Ι1, αν και ίσως δεν φαίνεται με την πρώτη ματιά (πρέπει να αφήσουμε τον $b+c$ να παίξει τον ρόλο του b στην Ι1, και τον d τον ρόλο του c). Οι ισότητες $(3) = (4) = (5)$ αποδεικνύονται επίσης εύκολα.

Είναι ίσως προφανές ότι αρκεί να καταφύγουμε στην Ι1 για να αποδείξουμε την ισότητα των 14 διαφορετικών τρόπων με τους οποίους αθροίζονται πέντε αριθμοί, αλλά δεν είναι και τόσο φανερό πώς γίνεται να δοθεί μια λογική απόδειξη αυτού του πράγματος χωρίς να καταγράψουμε και τα 14 αυτά αθροίσματα. Μια τέτοια διαδικασία είναι εφικτή, αλλά θα γινόταν ιδιαίτερα επίπονη αν εξετάζαμε συλλογές από έξι, επτά, ή περισσότερους αριθμούς· θα ήταν τελείως ανεπαρκής για την απόδειξη της ισότητας όλων των δυνατών αθροισμάτων μιας τυχαίας πεπερασμένης συλλογής από αριθμούς $a_1, \ldots, a_n$. Αυτό μπορούμε να το θεωρήσουμε δεδομένο, αλλά για αυτούς που θα ήθελαν να καταπιαστούν με την απόδειξη (και αξίζει τον κόπο να το κάνει κανείς τουλάχιστον μία φορά), μια προσέγγιση περιγράφεται στο Πρόβλημα 24. Από δω και πέρα, θα υποθέτουμε πάντοτε, χωρίς να το αναφέρουμε, ότι είναι γνωστά τα αποτελέσματα αυτού του προβλήματος και θα γράφουμε αθροίσματα της μορφής $a_1 + \cdots + a_n$ αδιαφορώντας για τη διάταξη των παρενθέσεων.

Ο αριθμός 0 έχει μια ιδιότητα τόσο σημαντική που θα την καταγράψουμε ως δεύτερη:

(Ι2) Αν a είναι οποιοσδήποτε αριθμός, τότε

$$a+0 = 0+a = a.$$

Ο αριθμός 0 παίζει έναν επίσης σπουδαίο ρόλο στην τρίτη ιδιότητα του καταλόγου μας:

(Ι3) Για κάθε αριθμό a, υπάρχει ένας αριθμός, ο $-a$, τέτοιος ώστε

$$a+(-a) = (-a)+a = 0.$$

Η ιδιότητα Ι2 θα έπρεπε να μας δίνει ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα του αριθμού 0, και είμαστε στην ευχάριστη θέση να αποδείξουμε κάτι τέτοιο, και μάλιστα αμέσως: Πραγματικά, αν ένας αριθμός x ικανοποιεί την

$$a+x = a$$

για οποιονδήποτε αριθμό a, τότε $x = 0$ (και επομένως αυτή η ισότητα ισχύει για όλους τους αριθμούς a). Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού δεν απαιτεί τίποτα περισσότερο από το να αφαιρέσουμε το a και από τα δύο μέλη της ισότητας· με άλλα λόγια, να προσθέσουμε το $-a$ και στα δύο μέλη. Όπως δείχνει και η λεπτομερής απόδειξη που ακολουθεί, χρειάζονται και οι τρεις ιδιότητες Ι1–Ι3 για να δικαιολογηθεί αυτή η πράξη:

$$\begin{array}{ll}
\text{Αν} & a+x = a, \\
\text{τότε} & (-a)+(a+x) = (-a)+a = 0\cdot \\
\text{άρα} & ((-a)+a)+x = 0\cdot \\
\text{άρα} & 0+x = 0\cdot \\
\text{άρα} & x = 0.
\end{array}$$

Όπως διαφαίνεται, είναι βολικό να θεωρούμε την αφαίρεση ως μια πράξη παράγωγη της πρόσθεσης: θεωρούμε το $a-b$ ως μια σύντμηση για το $a+(-b)$. Μπορούμε τότε να βρούμε τη λύση μερικών απλών εξισώσεων κάνοντας μια σειρά από βήματα (καθένα αιτιολογημένο από τις Ι1, Ι2 ή Ι3), όμοια με αυτά που εμφανίστηκαν για την εξίσωση

$a+x=a$. Για παράδειγμα:

$$\begin{array}{ll} \text{Αν} & x+3=5, \\ \text{τότε} & (x+3)+(-3)=5+(-3)\cdot \\ \text{άρα} & x+(3+(-3))=5-3=2\cdot \\ \text{άρα} & x+0=2\cdot \\ \text{άρα} & x=2. \end{array}$$

Αυτές οι λεπτομερείς λύσεις έχουν βέβαια ενδιαφέρον μόνο μέχρι να πεισθείτε ότι είναι πάντοτε δυνατές. Στην πράξη, συνήθως είναι χάσιμο χρόνου να προσπαθεί κανείς να λύσει μια εξίσωση δείχνοντας με τόσο αναλυτικό τρόπο την εξάρτηση από τις ιδιότητες Ι1, Ι2 και Ι3 (ή και από τις επόμενες ιδιότητες που θα αναφέρουμε).

Μένει μια ακόμα ιδιότητα της πρόσθεσης που πρέπει να αναφερθεί. Όταν εξετάζαμε τα αθροίσματα τριών αριθμών a, b και c, μόνο δύο αθροίσματα καταγράφηκαν: το $(a+b)+c$ και το $a+(b+c)$. Ασφαλώς μπορούμε να πάρουμε και άλλες πολλές περιπτώσεις αν μεταβάλλουμε τη διάταξη των a, b και c. Το ότι όλα αυτά τα αθροίσματα είναι ίσα, βασίζεται στην

(Ι4) Αν a και b είναι δύο αριθμοί, τότε

$$a+b=b+a.$$

Η διατύπωση της Ι4 έχει σκοπό να τονίσει το γεγονός ότι, αν και η πράξη της πρόσθεσης ενός ζεύγους αριθμών θα μπορούσε, ενδεχομένως, να εξαρτάται από τη σειρά των δύο αριθμών, στην πραγματικότητα είναι ανεξάρτητη από αυτήν. Είναι χρήσιμο να θυμόμαστε ότι δεν συμπεριφέρονται όλες οι πράξεις το ίδιο καλά. Για παράδειγμα, η αφαίρεση δεν έχει αυτήν την ιδιότητα: συνήθως $a-b\neq b-a$. Παρεμπιπτόντως, θα μπορούσαμε να ρωτήσουμε πότε το $a-b$ είναι ίσο με το $b-a$, και είναι ενδιαφέρον το ότι θα ανακαλύψουμε πόσο αδύναμοι είμαστε αν βασιστούμε στις ιδιότητες Ι1–Ι4 για να δικαιολογήσουμε τα βήματά μας. Με τελείως στοιχειώδη άλγεβρα μπορούμε να δείξουμε ότι $a-b=b-a$ μόνο αν $a=b$. Και όμως, είναι αδύνατο να το αποδείξουμε μόνο από τις ιδιότητες Ι1–Ι4· είναι διδακτικό να εξετάσετε προσεκτικά τη στοιχειώδη αλγεβρική απόδειξη και να προσδιορίσετε το βήμα ή τα βήματα που δεν μπορούν να δικαιολογηθούν από τις Ι1–Ι4. Βέβαια, όταν θα έχουμε αναφέρει μερικές ακόμα ιδιότητες, θα είμαστε σε θέση να αιτιολογήσουμε όλα τα βήματα με λεπτομέρειες. Κατά έναν περίεργο όμως τρόπο, η επίμαχη ιδιότητα έχει να κάνει με τον πολλαπλασιασμό.

Οι βασικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού μοιάζουν ευτυχώς τόσο πολύ με αυτές της πρόσθεσης, που θα χρειαστούν πολύ λίγα σχόλια· τόσο η έννοια όσο και οι συνέπειές τους θα είναι προφανείς. (Όπως και στη στοιχειώδη άλγεβρα, το γινόμενο των a και b θα συμβολίζεται με $a\cdot b$, ή πιο απλά με ab.)

(Ι5) Αν a, b και c είναι οποιοιδήποτε αριθμοί, τότε

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$$

(Ι6) Αν a είναι οποιοσδήποτε αριθμός, τότε

$$a\cdot 1=1\cdot a=a.$$

Επίσης $1\neq 0$.

(Φαίνεται ίσως παράξενο το να καταγράφουμε τον ισχυρισμό $1\neq 0$, αλλά είμαστε υποχρεωμένοι να το κάνουμε, γιατί δεν υπάρχει τρόπος να τον αποδείξουμε με βάση τις υπόλοιπες ιδιότητες —αυτές οι ιδιότητες θα ίσχυαν όλες και αν υπήρχε ένας μόνο αριθμός, ο 0.)

(Ι7) Για κάθε αριθμό $a\neq 0$, υπάρχει ένας αριθμός a^{-1} τέτοιος ώστε

$$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1.$$

(Ι8) Αν a και b είναι τυχαίοι αριθμοί, τότε

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Μια λεπτομέρεια που αξίζει να υπογραμμίσουμε είναι η εμφάνιση της συνθήκης $a \neq 0$ στην Ι7. Αυτή η συνθήκη είναι εντελώς απαραίτητη: αφού $0 \cdot b = 0$ για όλους τους αριθμούς b, *δεν* υπάρχει αριθμός 0^{-1} που να ικανοποιεί την $0 \cdot 0^{-1} = 1$. Αυτός ο περιορισμός έχει μια σημαντική συνέπεια σε σχέση με τη διαίρεση. Ακριβώς όπως η αφαίρεση ορίστηκε μέσω της πρόσθεσης, έτσι και η διαίρεση ορίζεται με βάση τον πολλαπλασιασμό: ο συμβολισμός a/b σημαίνει $a \cdot b^{-1}$. Αφού το 0^{-1} δεν έχει έννοια, το $a/0$ επίσης δεν έχει έννοια —η διαίρεση με 0 είναι *πάντα* αόριστη.

Η ιδιότητα Ι7 έχει δύο σημαντικές συνέπειες. Αν $a \cdot b = a \cdot c$, δεν έπεται αναγκαστικά ότι $b = c$, γιατί αν $a = 0$, τότε και το $a \cdot b$ και το $a \cdot c$ είναι 0, ανεξάρτητα από το ποια είναι τα b και c. Όμως, αν $a \neq 0$, τότε $b = c$. Αυτό αποδεικνύεται από την Ι7 ως εξής:

$$\begin{array}{lr} \text{Αν} & a \cdot b = a \cdot c \text{ και } a \neq 0, \\ \text{τότε} & a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c)\cdot \\ \text{άρα} & (a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c\cdot \\ \text{άρα} & 1 \cdot b = 1 \cdot c\cdot \\ \text{άρα} & b = c. \end{array}$$

Συνέπεια της Ι7 είναι και το γεγονός ότι, αν $a \cdot b = 0$, τότε $a = 0$ ή $b = 0$. Πράγματι,

$$\begin{array}{lr} \text{αν} & a \cdot b = 0 \text{ και } a \neq 0, \\ \text{τότε} & a^{-1} \cdot (a \cdot b) = 0\cdot \\ \text{άρα} & (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0\cdot \\ \text{άρα} & 1 \cdot b = 0\cdot \\ \text{άρα} & b = 0. \end{array}$$

(Μπορεί να συμβεί να ισχύει και η $a = 0$ και η $b = 0$. Αυτό το ενδεχόμενο δεν αποκλείεται όταν λέμε «$a = 0$ ή $b = 0$»· στα μαθηματικά το «ή» χρησιμοποιείται πάντοτε με την έννοια του «το ένα ή το άλλο, ή και τα δύο»).

Η τελευταία αυτή συνέπεια της Ι7 χρησιμοποιείται συνεχώς για τη λύση εξισώσεων. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι για έναν αριθμό x είναι γνωστό πως επαληθεύει την

$$(x - 1)(x - 2) = 0.$$

Τότε θα είναι $x - 1 = 0$ ή $x - 2 = 0$. Άρα $x = 1$ ή $x = 2$.

Με βάση τις οκτώ ιδιότητες που έχουμε αναφέρει ώς τώρα, δεν είμαστε ακόμα σε θέση να αποδείξουμε και πολλά πράγματα. Η επόμενη ιδιότητα, που συνδυάζει τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, θα μεταβάλλει ουσιαστικά αυτήν την κατάσταση.

(Ι9) Αν a, b και c είναι οποιοιδήποτε αριθμοί, τότε

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

(Παρατηρήστε ότι από την Ι8 ισχύει και η ισότητα $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.)

Ως παράδειγμα της χρησιμότητας της Ι9, θα προσδιορίσουμε τώρα πότε ακριβώς $a - b = b - a$:

$$\begin{array}{lr} \text{Αν} & a - b = b - a, \\ \text{τότε} & (a - b) + b = (b - a) + b = b + (b - a)\cdot \\ \text{άρα} & a = b + b - a\cdot \\ \text{άρα} & a + a = (b + b - a) + a = b + b. \\ \text{Επομένως} & a \cdot (1 + 1) = b \cdot (1 + 1), \\ \text{και άρα} & a = b. \end{array}$$

Μια δεύτερη εφαρμογή της Ι9 συναντάμε στην αιτιολόγηση του ισχυρισμού $a \cdot 0 = 0$, που έχουμε ήδη διατυπώσει, και τον οποίο χρησιμοποιήσαμε κιόλας λίγο νωρίτερα σε μια απόδειξη στη σελίδα 6 (μπορείτε να εντοπίσετε πού;). Αυτό το γεγονός δεν αναφέρθηκε ως μια από τις βασικές ιδιότητες, αν και δεν το αποδείξαμε όταν το αναφέραμε για πρώτη φορά. Με τις Ι1–Ι8 μόνο δεν ήταν δυνατόν να δώσουμε μια απόδειξη, γιατί ο αριθμός 0 εμφανίζεται μόνο στις Ι2 και Ι3, που αφορούν την πρόσθεση, ενώ ο ισχυρισμός για τον οποίο μιλάμε έχει σχέση με τον πολλαπλασιασμό. Με την Ι9 η απόδειξη είναι απλή, αν και μπορεί να μην είναι τελείως προφανής. Έχουμε

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + a \cdot 0 &= a \cdot (0 + 0) \\ &= a \cdot 0. \end{aligned}$$

Όπως έχουμε ήδη σημειώσει, αυτό σημαίνει αυτομάτως (αν προσθέσουμε το $-(a \cdot 0)$ και στα δύο μέλη) ότι $a \cdot 0 = 0$.

Μια σειρά από άλλες συνέπειες της Ι9 ίσως μας βοηθήσουν να εξηγήσουμε τον κάπως περίεργο κανόνα που μας βεβαιώνει ότι το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών είναι θετικός αριθμός. Για να ξεκινήσουμε, θα αποδείξουμε τον πιο εύλογο ισχυρισμό ότι $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Για να τον αποδείξουμε, σημειώνουμε ότι

$$\begin{aligned} (-a) \cdot b + a \cdot b &= [(-a) + a] \cdot b \\ &= 0 \cdot b \\ &= 0. \end{aligned}$$

Έπεται αμέσως (προσθέτοντας το $-(a \cdot b)$ και στα δύο μέλη) ότι $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) + [-(a \cdot b)] &= (-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b \\ &= (-a) \cdot [(-b) + b] \\ &= (-a) \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως, αν προσθέσουμε το $(a \cdot b)$ και στα δύο μέλη, παίρνουμε

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Το γεγονός ότι το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών είναι θετικό, είναι επομένως συνέπεια των Ι1–Ι9. Με άλλα λόγια, *αν θέλουμε να ισχύουν οι Ι1 έως και Ι9, τότε ο κανόνας για το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών μάς επιβάλλεται.*

Οι διάφορες συνέπειες της Ι9 που εξετάσαμε ώς τώρα, αν και είναι ενδιαφέρουσες και σημαντικές, δεν δείχνουν την πραγματική της σημασία· στο κάτω-κάτω θα μπορούσαμε να έχουμε αναφέρει όλες αυτές τις ιδιότητες χωριστά. Στην πραγματικότητα, η Ι9 δικαιολογεί σχεδόν όλους τους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς. Για παράδειγμα, ενώ έχουμε δει πώς να λύνουμε την εξίσωση

$$(x - 1)(x - 2) = 0,$$

δεν μπορούμε να περιμένουμε ότι μας δίνονται οι εξισώσεις σε αυτή τη μορφή. Πιο πιθανό είναι να συναντήσουμε την ίδια εξίσωση στη μορφή

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Η «παραγοντοποίηση» $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ είναι ουσιαστικά μια τριπλή χρήση της Ι9:

$$\begin{aligned} (x - 1) \cdot (x - 2) &= x \cdot (x - 2) + (-1) \cdot (x - 2) \\ &= x \cdot x + x \cdot (-2) + (-1) \cdot x + (-1) \cdot (-2) \\ &= x^2 + x[(-2) + (-1)] + 2 \\ &= x^2 - 3x + 2. \end{aligned}$$

Ένα τελευταίο παράδειγμα για τη σημασία της Ι9 είναι το γεγονός ότι αυτή η ιδιότητα χρησιμοποιείται ουσιαστικά κάθε φορά που πολλαπλασιάζουμε αραβικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 24 \\ \hline 52 \\ 26 \\ \hline 312 \end{array}$$

είναι ένας συνοπτικός τρόπος γραφής των εξής ισοτήτων:

$$\begin{aligned} 13 \cdot 24 &= 13 \cdot (2 \cdot 10 + 4) \\ &= 13 \cdot 2 \cdot 10 + 13 \cdot 4 \\ &= 26 \cdot 10 + 52. \end{aligned}$$

(Σημειώστε πως, το ότι μετακινήσαμε το 26 μια θέση αριστερά στον παραπάνω υπολογισμό, είναι το ίδιο με το να γράφουμε $26 \cdot 10$). Ο πολλαπλασιασμός $13 \cdot 4 = 52$ χρησιμοποιεί και αυτός την Ι9:

$$\begin{aligned} 13 \cdot 4 &= (1 \cdot 10 + 3) \cdot 4 \\ &= 1 \cdot 10 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \\ &= 4 \cdot 10 + 12 \\ &= 4 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 2 \\ &= (4 + 1) \cdot 10 + 2 \\ &= 5 \cdot 10 + 2 \\ &= 52. \end{aligned}$$

Οι ιδιότητες Ι1–Ι9 έχουν συγκεκριμένα ονόματα που δεν είναι απαραίτητο να τα θυμόμαστε, αλλά συχνά είναι βολικά όταν αναφερόμαστε σε αυτές. Με αυτήν την ευκαιρία θα κάνουμε έναν κατάλογο των ιδιοτήτων Ι1–Ι9 αναφέροντας ταυτόχρονα και τα ονόματα που τους αποδίδονται συνήθως.

(Ι1)	(Προσεταιριστικός νόμος της πρόσθεσης)	$a + (b + c) = (a + b) + c.$
(Ι2)	(Ύπαρξη προσθετικού ταυτοτικού στοιχείου)	$a + 0 = 0 + a = a.$
(Ι3)	(Ύπαρξη προσθετικού αντίστροφου)	$a + (-a) = (-a) + a = 0.$
(Ι4)	(Αντιμεταθετικός νόμος της πρόσθεσης)	$a + b = b + a.$
(Ι5)	(Προσεταιριστικός νόμος του πολλαπλασιασμού)	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$
(Ι6)	(Ύπαρξη πολλαπλασιαστικού ταυτοτικού στοιχείου)	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \cdot \quad 1 \neq 0.$
(Ι7)	(Ύπαρξη πολλαπλασιαστικού αντίστροφου)	$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1,$ για $a \neq 0.$
(Ι8)	(Αντιμεταθετικός νόμος του πολλαπλασιασμού)	$a \cdot b = b \cdot a.$
(Ι9)	(Επιμεριστικός νόμος)	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Οι τρεις βασικές ιδιότητες των αριθμών που απομένουν αφορούν στις ανισότητες. Αν και οι ανισότητες σπάνια εμφανίζονται στα στοιχειώδη Μαθηματικά, παίζουν εξέχοντα ρόλο στο Λογισμό. Οι δύο μορφές ανισότητας, $a < b$ (ο a είναι μικρότερος από τον b) και $a > b$ (ο a είναι μεγαλύτερος από τον b), συνδέονται στενά: η $a < b$ σημαίνει το ίδιο ακριβώς πράγμα με την $b > a$ (έτσι, η $1 < 3$ και η $3 > 1$ είναι απλώς δύο τρόποι για να γράψουμε την ίδια πρόταση). Οι αριθμοί a για τους οποίους $a > 0$ λέγονται

θετικοί, ενώ εκείνοι οι αριθμοί a για τους οποίους $a < 0$ λέγονται **αρνητικοί**. Ενώ λοιπόν η θετικότητα γίνεται να οριστεί με βάση την $<$, είναι δυνατόν να αντιστρέψουμε τη διαδικασία: μπορούμε να ορίσουμε την $a < b$ έτσι ώστε να σημαίνει ότι ο $b - a$ είναι θετικός. Και μάλιστα, είναι πιο βολικό να πάρουμε ως βασική έννοια το σύνολο όλων των θετικών αριθμών, που συμβολίζεται με P, και να διατυπώσουμε όλες τις άλλες ιδιότητες με τη βοήθεια του P:

(I10) (Νόμος της Τριχοτόμησης) Για κάθε αριθμό a ισχύει μία και μόνο μία από τις:
(i) $a = 0$
(ii) ο a ανήκει στο σύνολο P,
(iii) ο $-a$ ανήκει στο σύνολο P.

(I11) (Κλειστότητα ως προς την πρόσθεση) Αν ο a και ο b είναι στο P, τότε και ο $a + b$ είναι στο P.

(I12) (Κλειστότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό) Αν ο a και ο b είναι στο P, τότε και ο $a \cdot b$ είναι στο P.

Αυτές οι τρεις ιδιότητες πρέπει να συμπληρωθούν με τους εξής ορισμούς:

$$\begin{aligned}
a > b \quad & \text{αν} \quad a - b \ \text{ ανήκει στο } \ P^{\cdot} \\
a < b \quad & \text{αν} \quad b > a^{\cdot} \\
a \geq b \quad & \text{αν} \quad a > b \ \text{ ή } \ a = b^{\cdot} \\
a \leq b \quad & \text{αν} \quad a < b \ \text{ ή } \ a = b.^{*}
\end{aligned}$$

Σημειώστε, ειδικότερα, ότι $a > 0$ αν και μόνο αν ο a ανήκει στο P.

Όλες οι γνωστές ιδιότητες των ανισοτήτων, όσο στοιχειώδεις και αν φαίνονται, είναι συνέπειες των I10–I12. Για παράδειγμα, αν a και b είναι οποιοιδήποτε αριθμοί, τότε ισχύει ακριβώς μία από τις:

i. $a - b = 0$,
ii. ο $a - b$ ανήκει στο σύνολο P,
iii. ο $-(a - b) = b - a$ ανήκει στο σύνολο P.

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς που μόλις δώσαμε, παίρνουμε ότι ισχύει ακριβώς μία από τις:

i. $a = b$,
ii. $a > b$,
iii. $b > a$.

Ένα κάπως πιο ενδιαφέρον στοιχείο προκύπτει από τις εξής πράξεις: αν $a < b$, οπότε ο $b - a$ είναι στο P, τότε σίγουρα ο $(b + c) - (a + c)$ είναι στο P, άρα αν $a < b$, τότε $a + c < b + c$. Ομοίως, έστω ότι $a < b$ και $b < c$. Τότε

$$\begin{aligned}
& \text{ο } b - a \text{ είναι στο } P, \\
\text{και} \quad & \text{ο } c - b \text{ είναι στο } P, \\
\text{άρα} \quad & \text{ο } c - a = (c - b) + (b - a) \text{ είναι στο } P.
\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι, αν $a < b$ και $b < c$, τότε $a < c$. (Οι δύο ανισότητες $a < b$ και $b < c$ γράφονται συνήθως πιο σύντομα στη μορφή $a < b < c$, που ουσιαστικά περιέχει και την τρίτη ανισότητα $a < c$.)

---

*Υπάρχει ένα κάπως σκοτεινό σημείο σε σχέση με τα σύμβολα $\geq$ και $\leq$. Οι προτάσεις

$$1 + 1 \leq 3$$
$$1 + 1 \leq 2$$

είναι και οι δύο αληθείς, αν και ξέρουμε ότι το $\leq$ θα μπορούσε να αντικατασταθεί με $<$ στην πρώτη, και με $=$ στη δεύτερη. Τέτοιες καταστάσεις είναι αναπόφευκτες όταν το $\leq$ χρησιμοποιείται με συγκεκριμένους αριθμούς· η χρησιμότητα του συμβόλου αποκαλύπτεται από μια πρόταση σαν το Θεώρημα 1 —εδώ έχουμε ισότητα για κάποιες τιμές των a και b, και ανισότητα για κάποιες άλλες.

Ο επόμενος ισχυρισμός είναι λιγότερο προφανής. Αν $a < 0$ και $b < 0$, τότε $ab > 0$. Η μόνη δυσκολία που παρουσιάζει η απόδειξη είναι ότι απαιτεί μια ευχέρεια στη χρήση των ορισμών. Το σύμβολο $a < 0$ σημαίνει, εξ ορισμού, $0 > a$, το οποίο σημαίνει ότι ο $0 - a = -a$ ανήκει στο P. Ομοίως ο $-b$ είναι στο P, επομένως, από την Ι12, ο $(-a)(-b) = ab$ ανήκει στο P. Άρα $ab > 0$.

Το γεγονός ότι $ab > 0$ αν $a > 0$, $b > 0$ καθώς και αν $a < 0$, $b < 0$, έχει μια ξεχωριστή συνέπεια: $a^2 > 0$ αν $a \neq 0$. Έτσι, τα τετράγωνα μη μηδενικών αριθμών είναι πάντα θετικά, και ειδικότερα έχουμε αποδείξει ένα αποτέλεσμα που θα μπορούσε να είχε συμπεριληφθεί στον κατάλογο των ιδιοτήτων μας, ως αρκετά στοιχειώδες: $1 > 0$ (αφού $1 = 1^2$).

Το γεγονός ότι $-a > 0$ αν $a < 0$ είναι η βάση για μια έννοια που θα παίξει εξαιρετικά σπουδαίο ρόλο σε αυτό το βιβλίο. Για κάθε αριθμό a, ορίζουμε την **απόλυτη τιμή** $|a|$ του a ως εξής:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a \leq 0. \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι το $|a|$ είναι πάντα θετικό, εκτός αν $a = 0$. Για παράδειγμα, έχουμε $|-3| = 3$, $|7| = 7$, $|1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}| = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ και $|1 + \sqrt{2} - \sqrt{10}| = \sqrt{10} - \sqrt{2} - 1$. Γενικά, η πιο άμεση προσέγγιση σε οποιοδήποτε πρόβλημα που έχει να κάνει με απόλυτες τιμές απαιτεί να διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις χωριστά, γιατί οι απόλυτες τιμές ορίζονται και αυτές με περιπτώσεις. Χρησιμοποιούμε αυτήν την προσέγγιση για να αποδείξουμε μια πολύ σημαντική ιδιότητα των απολύτων τιμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Για τυχαίους αριθμούς a και b, έχουμε

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θα εξετάσουμε 4 περιπτώσεις:

$$\begin{array}{ll} (1) & a \geq 0, \quad b \geq 0\cdot \\ (2) & a \geq 0, \quad b \leq 0\cdot \\ (3) & a \leq 0, \quad b \geq 0\cdot \\ (4) & a \leq 0, \quad b \leq 0. \end{array}$$

Στην περίπτωση (1) είναι και $a + b \geq 0$, και το θεώρημα είναι προφανές. Μάλιστα έχουμε

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|,$$

δηλαδή σε αυτήν την περίπτωση ισχύει ισότητα.

Στην περίπτωση (4) έχουμε $a + b \leq 0$, και πάλι ισχύει ισότητα:

$$|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) = |a| + |b|.$$

Στην περίπτωση (2), όπου $a \geq 0$ και $b \leq 0$, πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$|a + b| \leq a - b.$$

Μπορούμε λοιπόν να χωρίσουμε αυτήν την περίπτωση σε δύο υποπεριπτώσεις. Αν $a + b \geq 0$, τότε πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned} & a + b \leq a - b, \\ \text{δηλαδή,} \qquad & b \leq -b, \end{aligned}$$

που προφανώς ισχύει, αφού $b \leq 0$ και επομένως $-b \geq 0$. Από την άλλη πλευρά, αν $a + b \leq 0$, πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned} & -a - b \leq a - b, \\ \text{δηλαδή,} \qquad & -a \leq a, \end{aligned}$$

η οποία προφανώς ισχύει, αφού $a \geq 0$ και επομένως $-a \leq 0$.

Σημειώστε, τέλος, ότι η απόδειξη της περίπτωσης (3) είναι άμεση, αν εναλλάξουμε τα a και b και εφαρμόσουμε την περίπτωση (2). ▮

Αν και η παραπάνω μέθοδος για να εργαζόμαστε με απόλυτες τιμές (να εξετάζουμε δηλαδή χωριστά διάφορες περιπτώσεις) είναι μερικές φορές η μόνη δυνατή, συχνά υπάρχουν απλούστερες μέθοδοι που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε. Μπορούμε, συγκεκριμένα, να δώσουμε μια πολύ πιο σύντομη απόδειξη του Θεωρήματος 1· αυτή η απόδειξη πηγάζει από την παρατήρηση ότι

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

(Εδώ, και στο υπόλοιπο βιβλίο, όταν γράφουμε $\sqrt{x}$ εννοούμε τη *θετική* τετραγωνική ρίζα του x. Αυτό το σύμβολο έχει έννοια μόνο όταν $x \geq 0$.) Μπορούμε τώρα να δούμε ότι

$$\begin{aligned}(|a+b|)^2 = (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|a| \cdot |b| + b^2 \\ &= |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2.\end{aligned}$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $|a+b| \leq |a| + |b|$ γιατί από την $x^2 < y^2$ έπεται η $x < y$, αρκεί τα x και y να είναι και τα δύο μη αρνητικά· η απόδειξη *αυτού* του γεγονότος αφήνεται στον αναγνώστη (Πρόβλημα 5).

Ας κάνουμε και μια τελευταία παρατήρηση για το θεώρημα που μόλις αποδείξαμε: αν εξετάσουμε προσεκτικά οποιαδήποτε από τις δύο αποδείξεις, βλέπουμε ότι

$$|a+b| = |a| + |b|$$

αν οι a και b έχουν το ίδιο πρόσημο (δηλαδή είναι και οι δύο θετικοί ή και οι δύο αρνητικοί), ή αν ο ένας από τους δύο είναι 0, ενώ

$$|a+b| < |a| + |b|$$

αν οι a και b έχουν αντίθετα πρόσημα.

Θα ολοκληρώσουμε αυτό το κεφάλαιο με ένα λεπτό σημείο που παραμελήσαμε ώς τώρα, και το οποίο πρέπει να περιλαμβάνεται σε μια σοβαρή παρουσίαση των ιδιοτήτων των αριθμών. Αφού διατυπώσαμε την ιδιότητα Ι9, αποδείξαμε ότι από την $a - b = b - a$ έπεται η $a = b$. Η απόδειξη άρχιζε με την επαλήθευση της

$$a \cdot (1+1) = b \cdot (1+1),$$

από όπου συμπεράναμε ότι $a = b$. Σε αυτό το συμπέρασμα καταλήγουμε από την ισότητα $a \cdot (1+1) = b \cdot (1+1)$ διαιρώντας και τα δύο μέλη με $1 + 1$. Όντας ευσυνείδητοι, θα πρέπει να αποφεύγουμε τη διαίρεση με 0. Πρέπει επομένως να παραδεχθούμε ότι, η ισχύς του συλλογισμού μας εξαρτάται από το αν ισχύει η $1 + 1 \neq 0$. Το Πρόβλημα 25 έχει σχεδιαστεί για να σας πείσει ότι κάτι τέτοιο δεν μπορεί να αποδειχθεί από τις ιδιότητες Ι1–Ι9 μόνο! Αφού όμως έχουμε στη διάθεσή μας τις Ι10, Ι11, και Ι12, η απόδειξη είναι πολύ απλή: Έχουμε ήδη δει ότι $1 > 0$· έπεται ότι $1 + 1 > 0$, ειδικότερα ότι $1 + 1 \neq 0$.

Αυτή η τελευταία απόδειξη ίσως ενισχύει την άποψη ότι είναι παράλογο να προσπαθούμε να αποδείξουμε τόσο προφανή πράγματα· μια πιο προσεκτική όμως εκτίμηση της τωρινής μας κατάστασης θα δικαιολογήσει το γιατί ασχολούμαστε τόσο σοβαρά με τέτοιες λεπτομέρειες. Σε αυτό το κεφάλαιο έχουμε υποθέσει ότι οι αριθμοί είναι γνώριμα αντικείμενα, και ότι οι Ι1–Ι12 δεν είναι τίποτα παραπάνω από σαφώς διατυπωμένες προφανείς, πολύ γνωστές ιδιότητες των αριθμών. Θα ήταν όμως δύσκολο να δικαιολογήσουμε αυτήν την υπόθεση. Αν και όλοι μαθαίνουμε πώς να «δουλεύουμε με» τους αριθμούς στο σχολείο, το τι *είναι* οι αριθμοί ακριβώς παραμένει μάλλον απροσδιόριστο. Ένα μεγάλο μέρος αυτού του βιβλίου αφιερώνεται στο ξεκαθάρισμα της έννοιας του αριθμού, και μέχρι το τέλος θα έχουμε εξοικειωθεί πολύ μαζί τους. Αλλά, εν τω μεταξύ, θα χρειαστεί να εργαστούμε με αριθμούς. Είναι λοιπόν λογικό να παραδεχθούμε με ειλικρίνεια ότι δεν καταλαβαίνουμε ακόμα πλήρως τους αριθμούς· μπορούμε, ωστόσο, να λέμε ότι, όπως και αν οριστούν τελικά οι αριθμοί, θα πρέπει σίγουρα να έχουν τις ιδιότητες Ι1–Ι12.

Το μεγαλύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου ήταν μια προσπάθεια να δοθούν πειστικά στοιχεία για το ότι οι Ι1–Ι12 είναι πράγματι βασικές ιδιότητες που θα πρέπει να τις υποθέσουμε για να πάρουμε τις άλλες γνωστές ιδιότητες των αριθμών. Μερικά από τα προβλήματα (που περιγράφουν πώς παίρνουμε άλλες ιδιότητες των αριθμών από τις Ι1–Ι12) προσφέρονται ως πρόσθετη μαρτυρία. Ένα κρίσιμο ερώτημα που παραμένει είναι αν οι Ι1–Ι12 ισοδυναμούν τελικά με *όλες* τις ιδιότητες των αριθμών. Σύντομα θα δούμε ότι *δεν* είναι έτσι. Στο επόμενο κεφάλαιο οι αδυναμίες των ιδιοτήτων Ι1–Ι12 θα γίνουν τελείως φανερές, αλλά το κατάλληλο μέσο με το οποίο διορθώνονται αυτές οι αδυναμίες δεν ανακαλύπτεται και τόσο εύκολα. Η κρίσιμη πρόσθετη βασική ιδιότητα των αριθμών που ζητάμε είναι βαθιά και λεπτή, σε αντίθεση με τις Ι1–Ι12. Η ανακάλυψη αυτής της κρίσιμης ιδιότητας θα απαιτήσει όλη την εργασία που κάνουμε στο 2ο Μέρος αυτού του βιβλίου. Στο υπόλοιπο του 1ου Μέρους θα αρχίσουμε να βλέπουμε γιατί χρειάζεται κάποια πρόσθετη ιδιότητα. Για να μελετήσουμε κάτι τέτοιο, θα πρέπει να εξετάσουμε λίγο πιο προσεκτικά τι εννοούμε λέγοντας «αριθμοί».

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Αποδείξτε τα εξής:

(i) Αν $ax = a$ για κάποιον αριθμό $a \neq 0$, τότε $x = 1$.

(ii) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

(iii) Αν $x^2 = y^2$, τότε $x = y$ ή $x = -y$.

(iv) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

(v) $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$.

(vi) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. (Υπάρχει ένας πολύ εύκολος τρόπος για να το κάνετε αυτό, χρησιμοποιώντας το (iv), και θα σας δείξει πώς να παραγοντοποιήσετε το $x^n + y^n$ όταν ο n είναι περιττός.)

2. Πού είναι το λάθος στην «απόδειξη» που ακολουθεί; Έστω $x = y$. Τότε

$$\begin{aligned} x^2 &= xy, \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2, \\ (x + y)(x - y) &= y(x - y), \\ x + y &= y, \\ 2y &= y, \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

3. Αποδείξτε τα εξής:

(i) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$, αν $b, c \neq 0$.

(ii) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$, αν $b, d \neq 0$.

(iii) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, αν $a, b \neq 0$. (Για να το κάνετε αυτό, πρέπει να θυμηθείτε την ιδιότητα που ορίζει τον $(ab)^{-1}$.)

(iv) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{db}$, αν $b, d \neq 0$.

(v) $\dfrac{a}{b} \Big/ \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$, αν $b, c, d \neq 0$.

(vi) Αν $b, d \neq 0$, τότε $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ αν και μόνο αν $ad = bc$. Εξετάστε επίσης πότε $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a}$.

4. Βρείτε όλους τους αριθμούς x για τους οποίους

(i) $4 - x < 3 - 2x$.

(ii) $5 - x^2 < 8$.

(iii) $5 - x^2 < -2$.

(iv) $(x-1)(x-3) > 0$. (Πότε είναι θετικό το γινόμενο δύο αριθμών;)

(v) $x^2 - 2x + 2 > 0$.

(vi) $x^2 + x + 1 > 2$.

(vii) $x^2 - x + 10 > 16$.

(viii) $x^2 + x + 1 > 0$.

(ix) $(x - \pi)(x+5)(x-3) > 0$.

(x) $(x - \sqrt[3]{2})(x - \sqrt{2}) > 0$.

(xi) $2^x < 8$.

(xii) $x + 3^x < 4$.

(xiii) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$.

(xiv) $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$.

5. Αποδείξτε τα εξής:

(i) Αν $a < b$ και $c < d$, τότε $a + c < b + d$.

(ii) Αν $a < b$, τότε $-b < -a$.

(iii) Αν $a < b$ και $c > d$, τότε $a - c < b - d$.

(iv) Αν $a < b$ και $c > 0$, τότε $ac < bc$.

(v) Αν $a < b$ και $c < 0$, τότε $ac > bc$.

(vi) Αν $a > 1$, τότε $a^2 > a$.

(vii) Αν $0 < a < 1$, τότε $a^2 < a$.

(viii) Αν $0 \leq a < b$ και $0 \leq c < d$, τότε $ac < bd$.

(ix) Αν $0 \leq a < b$, τότε $a^2 < b^2$. (Χρησιμοποιήστε την (viii).)

(x) Αν $a, b \geq 0$ και $a^2 < b^2$, τότε $a < b$. (Χρησιμοποιήστε την (ix), αντιστρόφως.)

6. (α) Αποδείξτε ότι αν $0 \leq x < y$, τότε $x^n < y^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(β) Αποδείξτε ότι αν $x < y$ και ο n είναι περιττός, τότε $x^n < y^n$.

(γ) Αποδείξτε ότι αν $x^n = y^n$ και ο n είναι περιττός, τότε $x = y$.

(δ) Αποδείξετε ότι αν $x^n = y^n$ και ο n είναι άρτιος, τότε $x = y$ ή $x = -y$.

7. Αποδείξτε ότι, αν $0 < a < b$, τότε

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Παρατηρήστε ότι η ανισότητα $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ ισχύει για κάθε a, $b \geq 0$. Μια γενίκευση αυτού του γεγονότος εμφανίζεται στο Πρόβλημα 2-22.

∗8. Αν και οι βασικές ιδιότητες των ανισοτήτων διατυπώθηκαν με βάση το σύνολο P όλων των θετικών αριθμών, και η $<$ ορίστηκε με τη βοήθεια του P, μπορούμε να αντιστρέψουμε τη διαδικασία. Έστω ότι αντικαθιστούμε τις Ι10–Ι12 με τις

(Ι$'$10) Για οποιουσδήποτε αριθμούς a και b, ισχύει μία, και μόνο μία, από τις:
i. $a = b$,
ii. $a < b$,
iii. $b < a$.

(Ι$'$11) Για οποιουσδήποτε αριθμούς a, b και c, αν $a < b$ και $b < c$, τότε $a < c$.

(Ι$'$12) Για οποιουσδήποτε αριθμούς a, b και c, αν $a < b$, τότε $a + c < b + c$.

(Ι$'$13) Για οποιουσδήποτε αριθμούς a, b και c, αν $a < b$ και $0 < c$, τότε $ac < bc$.

Δείξτε ότι τότε οι Ι10–Ι12 αποδεικνύονται σαν θεωρήματα.

9. Εκφράστε καθένα από τα επόμενα, με τουλάχιστον ένα ζεύγος απόλυτης τιμής λιγότερο.

(i) $|\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7}|$.

(ii) $|(|a + b| - |a| - |b|)|$.

(iii) $|(|a + b| + |c| - |a + b + c|)|$.

(iv) $|x^2 - 2xy + y^2|$.

(v) $|(|\sqrt{2} + \sqrt{3}| - |\sqrt{5} - \sqrt{7}|)|$.

10. Εκφράστε καθένα από τα επόμενα χωρίς απόλυτες τιμές, διακρίνοντας περιπτώσεις όπου χρειάζεται.

(i) $|a + b| - |b|$.

(ii) $|(|x| - 1)|$.

(iii) $|x| - |x^2|$.

(iv) $a - |(a - |a|)|$.

11. Βρείτε όλους τους αριθμούς x για τους οποίους

(i) $|x - 3| = 8$.

(ii) $|x - 3| < 8$.

(iii) $|x + 4| < 2$.

(iv) $|x - 1| + |x - 2| > 1$.

(v) $|x - 1| + |x + 1| < 2$.

(vi) $|x - 1| + |x + 1| < 1$.

(vii) $|x - 1| \cdot |x + 1| = 0$.

(viii) $|x - 1| \cdot |x + 2| = 3$.

12. Αποδείξτε τα εξής:

(i) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

(ii) $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$, αν $x \neq 0$. (Ο καλύτερος τρόπος για να το κάνετε αυτό είναι να θυμηθείτε τι είναι το $|x|^{-1}$.)

(iii) $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$, αν $y \neq 0$.

(iv) $|x - y| \leq |x| + |y|$. (Δώστε μια πολύ σύντομη απόδειξη.)

(v) $|x| - |y| \leq |x - y|$. (Μπορείτε να κάνετε μια πολύ σύντομη απόδειξη, αν γράψετε τα πράγματα με τον σωστό τρόπο.)

(vi) $|(|x| - |y|)| \leq |x - y|$. (Γιατί αυτό είναι άμεση συνέπεια του (v);)

(vii) $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$. Υποδείξτε πότε ισχύει ισότητα, και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

13. Ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς x και y συμβολίζεται με $\max(x, y)$. Έτσι, $\max(-1, 3) = \max(3, 3) = 3$ και $\max(-1, -4) = \max(-4, -1) = -1$. Ο μικρότερος από τους x και y συμβολίζεται με $\min(x, y)$. Αποδείξτε ότι

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |y - x|}{2},$$
$$\min(x, y) = \frac{x + y - |y - x|}{2}.$$

Εξαγάγετε έναν τύπο για το $\max(x, y, z)$ και το $\min(x, y, z)$, χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, την

$$\max(x, y, z) = \max(x, \max(y, z)).$$

14. (α) Αποδείξτε ότι $|a| = |-a|$. (Το θέμα είναι να μην μπερδευτείτε με πάρα πολλές περιπτώσεις. Πρώτα αποδείξτε τον ισχυρισμό για $a \geq 0$. Γιατί τότε είναι προφανής για $a \leq 0$;)

(β) Αποδείξτε ότι $-b \leq a \leq b$ αν και μόνο αν $|a| \leq b$. Ειδικότερα, έπεται ότι $-|a| \leq a \leq |a|$.

(γ) Χρησιμοποιήστε αυτό το γεγονός για να δώσετε μια νέα απόδειξη της $|a + b| \leq |a| + |b|$.

***15.** Αποδείξτε ότι αν ο x και ο y δεν είναι και οι δύο 0, τότε

$$x^2 + xy + y^2 > 0,$$
$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 > 0.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 1.

***16.** (α) Δείξτε ότι

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 \quad \text{μόνο όταν } x = 0 \text{ ή } y = 0,$$
$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 \quad \text{μόνο όταν } x = 0 \text{ ή } y = 0 \text{ ή } x = -y.$$

(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \geq 0,$$

αποδείξτε ότι $4x^2 + 6xy + 4y^2 > 0$ εκτός και αν ο x και ο y είναι και οι δύο 0.

(γ) Χρησιμοποιήστε το μέρος (β) για να βρείτε πότε $(x + y)^4 = x^4 + y^4$.

(δ) Βρείτε πότε $(x + y)^5 = x^5 + y^5$. Υπόδειξη: Από την υπόθεση $(x + y)^5 = x^5 + y^5$ πρέπει να είστε σε θέση να αποδείξετε την ισότητα $x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 = 0$, αν $xy \neq 0$. Από αυτό έπεται ότι $(x + y)^3 = x^2y + xy^2 = xy(x + y)$.

Θα πρέπει τώρα να μπορείτε να κάνετε μια καλή πρόβλεψη για το πότε $(x + y)^n = x^n + y^n$· η απόδειξη περιέχεται στο Πρόβλημα 11-63.

17. (α) Βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του $2x^2-3x+4$. Υπόδειξη: «Συμπληρώστε το τετράγωνο», δηλαδή γράψτε $2x^2 - 3x + 4 = 2(x - 3/4)^2 +$;

(β) Βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του $x^2 - 3x + 2y^2 + 4y + 2$.

(γ) Βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του $x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 6y + 7$.

18. (α) Έστω ότι $b^2 - 4c \geq 0$. Αποδείξτε ότι οι αριθμοί

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \qquad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

ικανοποιούν και οι δύο την εξίσωση $x^2 + bx + c = 0$.

(β) Έστω ότι $b^2 - 4c < 0$. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν αριθμοί x που να ικανοποιούν την $x^2 + bx + c = 0$· και μάλιστα ισχύει $x^2 + bx + c > 0$ για κάθε x. Υπόδειξη: «Συμπληρώστε το τετράγωνο».

(γ) Χρησιμοποιήστε το παραπάνω για να δώσετε μια άλλη απόδειξη του ότι, αν ο x και ο y δεν είναι και οι δύο 0, τότε $x^2 + xy + y^2 > 0$.

(δ) Για ποιους αριθμούς a είναι αλήθεια ότι $x^2 + axy + y^2 > 0$ όταν ο x και ο y δεν είναι και οι δύο 0;

(ε) Βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του $x^2 + bx + c$ και του $ax^2 + bx + c$, για $a > 0$.

19. Το γεγονός ότι $a^2 \geq 0$ για κάθε αριθμό a, αν και μοιάζει στοιχειώδες, είναι ωστόσο η θεμελιώδης ιδέα που βρίσκεται τελικά πίσω από τις πιο σημαντικές ανισότητες. Ο πρόγονος όλων των ανισοτήτων είναι η *ανισότητα του Schwarz*:

$$x_1y_1 + x_2y_2 \leq \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2}\,\sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2}.$$

(Μια πιο γενική μορφή εμφανίζεται στο Πρόβλημα 2-21.) Οι τρεις αποδείξεις της ανισότητας Schwarz που σκιαγραφούνται παρακάτω έχουν ένα μόνο κοινό σημείο —το ότι βασίζονται στο γεγονός πως $a^2 \geq 0$ για κάθε a.

(α) Αποδείξτε ότι, αν $x_1 = \lambda y_1$ και $x_2 = \lambda y_2$ για κάποιον αριθμό $\lambda \geq 0$, τότε ισχύει ισότητα στην ανισότητα του Schwarz. Αποδείξτε το ίδιο πράγμα αν $y_1 = y_2 = 0$. Έστω τώρα ότι ο y_1 και ο y_2 δεν είναι και οι δύο 0, και ότι δεν υπάρχει αριθμός λ τέτοιος ώστε $x_1 = \lambda y_1$ και $x_2 = \lambda y_2$. Τότε

$$\begin{aligned} 0 &< (\lambda y_1 - x_1)^2 + (\lambda y_2 - x_2)^2 \\ &= \lambda^2(y_1{}^2 + y_2{}^2) - 2\lambda(x_1y_1 + x_2y_2) + (x_1{}^2 + x_2{}^2). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 18, ολοκληρώστε την απόδειξη της ανισότητας του Schwarz.

(β) Αποδείξτε την ανισότητα του Schwarz χρησιμοποιώντας την $2xy \leq x^2 + y^2$ (πώς βγαίνει αυτή;) με

$$x = \frac{x_i}{\sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2}}, \qquad y = \frac{y_i}{\sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2}},$$

πρώτα για $i = 1$ και μετά για $i = 2$.

(γ) Αποδείξτε την ανισότητα του Schwarz αποδεικνύοντας πρώτα ότι

$$(x_1{}^2 + x_2{}^2)(y_1{}^2 + y_2{}^2) = (x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

(δ) Συμπεράνετε, από καθεμιά από αυτές τις τρεις αποδείξεις, ότι η ισότητα ισχύει μόνο όταν $y_1 = y_2 = 0$ ή όταν υπάρχει ένας αριθμός $\lambda \geq 0$ τέτοιος ώστε $x_1 = \lambda y_1$ και $x_2 = \lambda y_2$.

Αργότερα, θα μας φανούν πολύ χρήσιμα τρία πράγματα που έχουν σχέση με τις ανισότητες. Αν και θα δώσουμε τις αποδείξεις μέσα στο κείμενο όταν έρθει η ώρα, η προσωπική τριβή με αυτά τα προβλήματα είναι απείρως πιο διαφωτιστική από την ανάγνωση μιας τέλεια επεξεργασμένης απόδειξης. Στη διατύπωση αυτών των προτάσεων αναμιγνύονται κάποιοι αλλόκοτοι αριθμοί, το βασικό τους όμως μήνυμα είναι πολύ απλό: αν το x είναι αρκετά κοντά στο x_0, και το y είναι αρκετά κοντά στο y_0, τότε το $x + y$ θα είναι κοντά στο $x_0 + y_0$, το xy κοντά στο $x_0 y_0$, και το $1/y$ κοντά στο $1/y_0$. Το σύμβολο «ε» που εμφανίζεται σε αυτές τις προτάσεις θα μπορούσε θαυμάσια να αντικατασταθεί με ένα οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Όμως, η παράδοση έχει καταστήσει τη χρήση του ε σχεδόν ιερή (ακόμη και στην ξένη βιβλιογραφία) στις περιπτώσεις που εφαρμόζονται αυτά τα θεωρήματα.

20. Αποδείξτε ότι, αν

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

τότε

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon,$$
$$|(x - y) - (x_0 - y_0)| < \varepsilon.$$

∗21. Αποδείξτε ότι, αν

$$|x - x_0| < \min\left(\frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}, 1\right) \quad \text{και} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)},$$

τότε $|xy - x_0 y_0| < \varepsilon$.

(Το σύμβολο «min» ορίστηκε στο Πρόβλημα 13, αλλά ο τύπος που δίνεται σε εκείνο το πρόβλημα δεν μας βοηθά στην προκειμένη περίπτωση. Η πρώτη ανισότητα στην υπόθεση σημαίνει απλούστατα ότι

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)} \quad \text{και} \quad |x - x_0| < 1.$$

Σε ένα σημείο της απόδειξης θα χρειαστείτε την πρώτη ανισότητα, και σε ένα άλλο σημείο θα χρειαστείτε τη δεύτερη. Μια τελευταία συμβουλή: αφού οι υποθέσεις δίνουν πληροφορίες μόνο για το $x - x_0$ και το $y - y_0$, είναι προφανές ότι για την απόδειξη θα χρειαστεί να γράψετε το $xy - x_0 y_0$ με τέτοιο τρόπο ώστε να εμφανιστούν τα $x - x_0$ και $y - y_0$.)

∗22. Αποδείξτε ότι, αν $y_0 \neq 0$ και

$$|y - y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon |y_0|^2}{2}\right),$$

τότε $y \neq 0$ και

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \varepsilon.$$

∗23. Αντικαταστήστε τα ερωτηματικά στην πρόταση που ακολουθεί με εκφράσεις που περιέχουν τα ε, x_0 και y_0 έτσι ώστε το συμπέρασμα να ισχύει:

Αν $y_0 \neq 0$ και

$$|y - y_0| < \,; \quad \text{και} \quad |x - x_0| < \,;$$

τότε $y \neq 0$ και

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0}\right| < \varepsilon.$$

Αυτό το πρόβλημα είναι τετριμμένο, με την έννοια ότι η λύση του έπεται από τα Προβλήματα 21 και 22 σχεδόν χωρίς κόπο (παρατηρήστε ότι $x/y = x \cdot 1/y$). Το κρίσιμο σημείο είναι να μην τα χάσετε· αποφασίστε ποιο από τα δύο προβλήματα πρέπει να χρησιμοποιήσετε πρώτο και μην πανικοβληθείτε αν η απάντησή σας δεν μοιάζει και πολύ πιθανή.

∗24. Αυτό το πρόβλημα δείχνει ότι το να τοποθετούμε παρενθέσεις σε ένα άθροισμα δεν έχει επιπτώσεις. Οι αποδείξεις χρησιμοποιούν «μαθηματική επαγωγή»· αν δεν είστε εξοικειωμένοι με τέτοιες αποδείξεις αλλά θέλετε να ασχοληθείτε με αυτό το πρόβλημα, αναβάλλετέ το για μετά το Κεφάλαιο 2, όπου θα εξηγηθούν οι αποδείξεις με επαγωγή.

Ας συμφωνήσουμε, για να είμαστε σαφείς, ότι με $a_1 + \cdots + a_n$ θα συμβολίζουμε το

$$a_1 + (a_2 + (a_3 + \cdots + (a_{n-2} + (a_{n-1} + a_n))) \cdots).$$

Έτσι, με $a_1 + a_2 + a_3$ συμβολίζουμε το $a_1 + (a_2 + a_3)$, με $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ το $a_1 + (a_2 + (a_3 + a_4))$, κτλ.

(α) Αποδείξτε ότι

$$(a_1 + \cdots + a_k) + a_{k+1} = a_1 + \cdots + a_{k+1}.$$

Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στο k.

(β) Αποδείξτε ότι, αν $n \geq k$, τότε

$$(a_1 + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + \cdots + a_n) = a_1 + \cdots + a_n.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το μέρος (α) για να δώσετε μια απόδειξη με επαγωγή στο k.

(γ) Έστω $s(a_1, \ldots, a_k)$ κάποιο άθροισμα που σχηματίζεται από τα $a_1, \ldots, a_k$. Δείξτε ότι

$$s(a_1, \ldots, a_k) = a_1 + \cdots + a_k.$$

Υπόδειξη: Πρέπει να υπάρχουν δύο αθροίσματα

$$s'(a_1, \ldots, a_l) \quad \text{και} \quad s''(a_{l+1}, \ldots, a_k)$$

τέτοια ώστε

$$s(a_1, \ldots, a_k) = s'(a_1, \ldots, a_l) + s''(a_{l+1}, \ldots, a_k).$$

25. Ας υποθέσουμε ότι με τη λέξη «αριθμός» εννοούμε το 0 ή το 1, και ότι ορίζουμε δύο πράξεις $+$ και $\cdot$ με τους εξής δύο πίνακες

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ελέγξτε ότι οι ιδιότητες Ι1–Ι9 ισχύουν όλες, αν και $1 + 1 = 0$.