Πρόλογος στην ελληνική έκδοση

Nathan Sidoli

Για τους περισσότερους ανθρώπους, αρχαία ελληνική γεωμετρία σημαίνει Ευκλείδεια Γεωμετρία. Δηλαδή, γεωμετρία περιορισμένη σε κατασκευές που πραγματοποιούνται αποκλειστικά με χρήση ευθειών και κύκλων στο επίπεδο, όπως αυτές που μάθαμε στο σχολείο, ή, ίσως, για όσους ενδιαφέρονται για την ιστορία των μαθηματικών, όπως παρουσιάζονται από τον Ευκλείδη στα πρώτα βιβλία των *Στοιχείων* του. Η κοινή αντίληψη για τα *Στοιχεία* και γενικότερα για την ελληνική γεωμετρία, η οποία είχε ήδη διαμορφωθεί από τους σχολιαστές της ύστερης αρχαιότητας, είναι ότι επηρεάστηκε σημαντικά από τη φιλοσοφική παράδοση του Πλάτωνα, ότι παρουσιάζει διάφορα θεωρήματα που αποδείχθηκαν ως αυτοσκοπός και ότι οι κατασκευές που βρίσκουμε στο κείμενο υπάρχουν μόνο ως βοηθητικές για τα θεωρήματα. Η μελέτη του Knorr για την ελληνική γεωμετρία επιδιώκει να ανατρέψει αυτή την αντίληψη: Υποστηρίζει ότι η γεωμετρική παράδοση εξελίχθηκε σύμφωνα με τη δική της εσωτερική δυναμική, η οποία οφείλει ελάχιστα στο ευρύτερο φιλοσοφικό πλαίσιο. Θεωρεί ότι η πιο σημαντική δραστηριότητα των αρχαίων γεωμετρών ήταν η παραγωγή λύσεων σε ενδιαφέροντα προβλήματα και ότι για αυτόν ακριβώς το σκοπό διατυπώθηκαν και αποδείχθηκαν τα θεωρήματα. Επίσης υποστηρίζει ότι τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και οι μέθοδοί τους δεν αποτελούσαν αυτοσκοπό αλλά σημεία εκκίνησης για το πολύ πιο ενδιαφέρον πρόγραμμα επίλυσης δύσκολων προβλημάτων με χρήση μιας μεγάλης ποικιλίας μέσων που δεν περιορίζονται στις ευθείες και στους κύκλους. Παρόλο που δεν συμφωνούν όλοι οι μελετητές της ελληνικής γεωμετρίας με το σύνολο των ισχυρισμών του Knorr, οι απόψεις του, καθώς και τα επιχειρήματα που διατυπώνει για να τις υποστηρίξει, επηρέασαν σημαντικά τους ιστορικούς των ελληνικών μαθηματικών.

Η *Αρχαία παράδοση* του Knorr δεν αποτελεί στην πραγματικότητα μια γενική ιστορία της ελληνικής γεωμετρίας· είναι περισσότερο μια ιστορία του κλάδου της αναλυτικής επίλυσης προβλημάτων κατά τη διάρκεια των ελληνιστικών χρόνων, των τριών αιώνων ακμής του ελληνικού πολιτισμού στην ανατολική Μεσόγειο, από την εποχή των κατακτήσεων του Αλεξάνδρου Γ′ της Μακεδονίας μέχρι την έλευση των ρωμαϊκών στρατευμάτων. Στην πραγματικότητα, ένα μεγάλο μέρος αυτής της δραστηριότητας επίλυσης προβλημάτων επικεντρώθηκε στην εύρεση λύσεων στα τρία προβλήματα που επικράτησε να θεωρούνται κλασικά: (1) τον διπλασιασμό του κύβου ή, εναλλακτικά, την εύρεση δύο μέσων αναλόγων μεταξύ δύο δεδομένων ευθυγράμμων τμημάτων, (2) την τριχοτόμηση μιας δεδομένης γωνίας και (3) την κατασκευή ενός τετραγώνου με εμβαδόν ίσο με αυτό ενός δεδομένου κύκλου. Μετά από τα δύο πρώτα κεφάλαια, στα οποία εξετάζονται οι απαρχές της γεωμετρικής επίλυσης προβλημάτων κατά τον 5ο π.Χ. αιώνα και οι εξελίξεις που απαντούν στα έργα μαθηματικών που συνδέονταν με τον Πλάτωνα κατά τον 4ο αιώνα, ο κύριος όγκος της *Αρχαίας παράδοσης* είναι αφιερωμένος στη μελέτη των γεωμετρών της Ελληνιστικής περιόδου: στον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη, τον Απολλώνιο και τους συγχρόνους τους. Τα έργα μεταγενέστερων μαθηματικών που έγραψαν στα Ελληνικά χρησιμοποιούνται αποκλειστικά ως ένα πρίσμα για τη μελέτη των συγγραφέων της Ελληνιστικής εποχής. Παρόλο που κατά την ύστερη αρχαιότητα και την αυτοκρατορική ρωμαϊκή περίοδο υπήρξε παραγωγή σημαντικού έργου στη γεωμετρία, ο Knorr αποδεικνύει πειστικά ότι η αποκορύφωση των αναλυτικών τεχνικών για την επίλυση προβλημάτων υπήρξε η Ελληνιστική περίοδος και ότι το έργο του Απολλωνίου υπήρξε το τελειότερο δείγμα αυτής της παράδοσης. Συνεπώς, μπορούμε να διαβάσουμε αυτό το βιβλίο ως μια ιστορία της χρήσης της ανάλυσης για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων από τους έλληνες συγγραφείς.

Μια γενική εικόνα της προσέγγισης του Knorr μπορεί να σχηματίσει κανείς από τον τρόπο με τον οποίο πραγματεύεται τη γεωμετρία του Ευκλείδη, στο Κεφάλαιο 4. Κατ' αρχάς, το κεφάλαιο τιτλοφορείται «Η Γενιά του Ευκλείδη», κάτι που απομακρύνει τον συγκεκριμένο μαθηματικό από το επίκεντρο και, μάλιστα, έρχεται σε αντίθεση με τους τίτλους των κεφαλαίων για τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο που αρχίζουν με το όνομά τους και ακολουθούνται από έναν υπότιτλο που περιγράφει τη συνεισφορά τους («Αρχιμήδης: Ο άριστος γεωμέτρης της ευδόξειας παράδοσης», και «Απολλώνιος: η κορύφωση της παράδοσης»). Αυτή η άποψη αναλύεται στο κεφάλαιο, όπου υποστηρίζεται ότι ο Ευκλείδης δεν ενεργεί μόνος αλλά βρίσκεται σε συνεχή διαλεκτική αλληλεπίδραση με τους προδρόμους και τους συγχρόνους του, οργανώνοντας και συνθέτοντας έργα άλλων, παράλληλα με την παραγωγή και ενσωμάτωση των δικών του αποτελεσμάτων. Είναι ενδεικτικό ότι το κεφάλαιο αρχίζει με τον ισχυρισμό ότι τα *Στοιχεία* δεν αποτελούν ένα καλό μέτρο της συνεισφοράς του Ευκλείδη στην επίλυση προβλημάτων, αφού γράφηκαν ως εισαγωγικό πόνημα και τόσο τα περιεχόμενα όσο και το ύφος τους δεν είναι καινοτομίες του Ευκλείδη. Επί της ουσίας, τα *Στοιχεία* δεν συζητώνται καθόλου στην *Αρχαία παράδοση*. Σύμφωνα με τον Knorr, αν θέλουμε να κατανοήσουμε την εμπλοκή του Ευκλείδη στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, θα πρέπει να μελετήσουμε τα *Δεδομένα* (1 βιβλίο, 94 θεωρήματα, σωζόμενο έργο), τα *Κωνικά* (3 βιβλία, χαμένο έργο), τα *Πορίσματα* (3 βιβλία, 117 θεωρήματα, χαμένο έργο) και, σε μικρότερο βαθμό, το Τόποι *πρὸς ἐπιφανείᾳ* (2 βιβλία, χαμένο έργο). Από αυτά, μόνο τα *Δεδομένα* σώζονται, παρόλο που υπάρχει η αντίληψη ότι τα *Κωνικά* του Ευκλείδη πρέπει να περιείχαν ανάλογα θέματα με αυτά που βρίσκουμε στα πρώτα βιβλία των *Κωνικών* του Απολλωνίου, και το περιεχόμενο των *Πορισμάτων* ανακατασκευάστηκε εν μέρει από λήμματα που παραθέτει ο Πάππος (ήκμ. περί το 320 μ.Χ.). Επιπλέον, ο Knorr υποστηρίζει ότι την οργάνωση των *Δεδομένων* εκπόνησε ο ίδιος ο Ευκλείδης, αφού δεν υπάρχουν ενδείξεις ότι κάποιος άλλος πριν από αυτόν είχε εργαστεί σε παρόμοιο κείμενο. Αυτό θα τοποθετούσε τον Ευκλείδη στην απαρχή μιας παράδοσης που στόχο είχε να οργανώσει τα μαθηματικά αποτελέσματα σύμφωνα με τη χρησιμότητά τους στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων μέσω της ανάλυσης. Ο κύριος όγκος του κεφαλαίου αποτελείται από *ανακατασκευές* πτυχών της πρώιμης θεωρίας των κωνικών του Αρισταίου και του Ευκλείδη, τον ρόλο των *Πορισμάτων* στην ανάλυση και συγκεκριμένες αναλύσεις προβλημάτων μέσω κωνικών και γεωμετρικών τόπων επιφανειών. Πράγματι, σύμφωνα με την άποψη του Knorr, η πιο σημαντική συνεισφορά του Ευκλείδη ως γεωμέτρη, που κατά το μεγαλύτερο μέρος της έχει χαθεί, ήταν η προσπάθειά του να θεμελιώσει ένα βασικό σώμα εργαλείων που να μπορούν να εφαρμοστούν στην επίλυση ενδιαφερόντων προβλημάτων. Συνεπώς, για να αξιολογήσει αυτήν την πιο προχωρημένη όψη του έργου του Ευκλείδη, ο Knorr προβαίνει σε πολλές ανακατασκευές.

Στην πραγματικότητα, οι μαθηματικές ανακατασκευές παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στη μεθοδολογία της *Αρχαίας παράδοσης*. Αναλύοντας ωστόσο τη μεθοδολογία αυτού του έργου, θα πρέπει να το εξετάσουμε στο πλαίσιο της συνολικής εργογραφίας του Knorr. Η *Αρχαία παράδοση* γράφεται μετά την *Εξέλιξη των Ευκλείδειων Στοιχείων* (*Evolution of the Euclidean Elements*, 1975) και αποτελεί μέρος του ίδιου ερευνητικού προγράμματος με τις *Κειμενικές μελέτες στην αρχαία και μεσαιωνική γεωμετρία* (*Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry,* 1989). Το τελευταίο αναφέρεται και στον πρόλογο της *Αρχαίας παράδοσης* και, περιστασιακά, στο κείμενο ως «ο δεύτερος τόμος». Παρόλο που στην *Εξέλιξη των Ευκλείδειων Στοιχείων* ο Knorr καταλήγει σε πολλά νέα συμπεράσματα, η μεθοδολογία αυτής της μονογραφίας ακολουθεί μια παλαιά παράδοση ανασυγκρότησης της ιστορίας των μαθηματικών που περιέχονται στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, με βάση εκτεταμένες μαθηματικές ανακατασκευές, οι οποίες συχνά στηρίζονται σε αρκετά ασαφείς πηγές και σε ανεπιβεβαίωτους ισχυρισμούς ότι τα ίδια τα *Στοιχεία* αποτελούν σχεδόν καθαρή αντιγραφή παλαιότερων έργων. Το κύριο μεθοδολογικό εργαλείο του σε αυτό το ερευνητικό πρόγραμμα είναι η μαθηματική και ορθολογική ανακατασκευή. Από την άλλη, στις *Κειμενικές μελέτες* ο Knorr προβαίνει σε προσεκτικές φιλολογικές αντιπαραβολές ανάμεσα σε διάφορες μεσαιωνικές πηγές που πραγματεύονται γεωμετρικά προβλήματα, καθώς και στο *Κύκλου μέτρησις* του Αρχιμήδη, σε μια προσπάθεια να ανιχνεύσει την ιστορία της επίλυσης προβλημάτων σε περιοχές που συνδέονται στις αρχαίες πηγές με τα τρία κλασικά προβλήματα. Όπως και στην προγενέστερη *Εξέλιξη των Ευκλείδειων Στοιχείων*, η *Αρχαία παράδοση*, περιλαμβάνει σημαντικό αριθμό ανακατασκευών. Το πόσο άνετα αισθάνεται ο Knorr χρησιμοποιώντας τη μαθηματική ανακατασκευή ως ερευνητική μέθοδο είναι εμφανές ακόμα και στη δομή του βιβλίου. Χρησιμοποιεί τα ίδια τυπογραφικά στοιχεία για τα μεταφρασμένα αποσπάσματα από αρχαίες πηγές, για τις περιλήψεις τέτοιων αποσπασμάτων και για τις δικές του ανακατασκευές, ως εάν αυτά τα τρία είδη εντάσσονται στην ίδια κατηγορία τεκμηρίων. Ωστόσο, οι ανακατασκευές στην *Αρχαία παράδοση* συνήθως υποστηρίζονται από περισσότερες μαθηματικές πηγές σε σχέση με αυτές στην *Εξέλιξη των Ευκλείδειων Στοιχείων*, ενώ οι πηγές μελετώνται λεπτομερώς στις *Κειμενικές μελέτες*. Συνεπώς, κατά μία έννοια, η μεθοδολογία της *Αρχαίας παράδοσης* κατέχει κεντρική θέση σε σχέση με τη μεθοδολογία των άλλων δύο μονογραφιών.

Οι μαθηματικές ανακατασκευές δεν χρησιμοποιούνται πια από τους ιστορικούς των ελληνικών μαθηματικών στο βαθμό που αυτό γινόταν παλαιότερα. Ωστόσο, σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να είναι χρήσιμες. Ειδικά στην περίπτωση πραγματειών που δεν διασώζονται, αποτελούν συχνά τη μόνη δυνατότητα διαμόρφωσης υποθέσεων που έχουμε. Παρόλο που σε μεγάλο βαθμό, μετά την *Αρχαία παράδοση*, ο ίδιος ο Knorr απομακρύνθηκε από αυτή τη μέθοδο, ο τρόπος που τη χρησιμοποιεί σε αυτό το βιβλίο αναδεικνύει τις ωφέλειες που μπορούν να προκύψουν από αυτήν την προσέγγιση. Η κύρια επιφύλαξη απέναντι στις ανακατασκευές είναι ότι κατά βάση είναι αβέβαιες. Έτσι, διαφορετικοί ερευνητές μπορούν, και όντως έτσι γίνεται, να οδηγηθούν σε ολότελα διαφορετικά συμπεράσματα. Παρόλα αυτά, αφού έχουμε τόσο λίγα παραδείγματα μαθηματικών αποτελεσμάτων από ελληνικές πηγές, αυτές οι ανακατασκευές μπορούν να μας επιτρέψουν να διευρύνουμε το πεδίο των δραστηριοτήτων μας και να μας βοηθήσουν να αναπτύξουμε ένα ευρύτερο πλαίσιο κατανόησης των αποσπασματικών τεκμηρίων που σώζονται. Για πολλά από τα χαμένα έργα του σώματος κειμένων της αρχαίας ανάλυσης, όπως τα *Πορίσματα* του Ευκλείδη, το *Περί των κανονικών στερεών σωμάτων* του Αρισταίου ή το *Περί χωρίου αποτομής* του Απολλωνίου, η μόνη αίσθηση που μπορούμε να έχουμε σχετικά με το περιεχόμενό τους προκύπτει από μαθηματική ανακατασκευή. Στην *Αρχαία παράδοση*, η σημαντικότερη όψη αυτής της προσέγγισης που αναπτύσσει ο Knorr συνίσταται στην ανακατασκευή μιας υποθετικής ανάλυσης για πολλά προβλήματα που σώζονται στα αρχαία κείμενα μόνο σε συνθετική μορφή. Παρόλο που δεν έχουμε την παραμικρή ιδέα για το αν οι αναλύσεις που δημιουργούνται μέσω αυτής της διαδικασίας υπήρξαν αντικείμενο θεώρησης των αρχαίων μαθηματικών, αυτή η προσέγγιση μπορεί να μας δώσει μια ενδιαφέρουσα αίσθηση σχετικά με το μαθηματικό πλαίσιο των προβλημάτων που σώζονται και μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα και σε κείμενα που ο Knorr ο ίδιος δεν ανέλυσε.

Μια άλλη σημαντική μεθοδολογική προσέγγιση στην *Αρχαία παράδοση*, την οποία μάλιστα ο Knorr ανέπτυξε ακόμα περισσότερο στις μεταγενέστερες μελέτες του, εμπλέκει την εκτεταμένη χρήση των έμμεσων μεσαιωνικών τεκμηρίων για τα ελληνικά μαθηματικά — δηλαδή, μεταφράσεις των ελληνικών έργων στα Λατινικά, Εβραϊκά και κυρίως Αραβικά, καθώς και μελέτες μαθηματικών θεμάτων κατά τον ελληνικό τρόπο που διεξήγαγαν μαθηματικοί ερευνητές που εργάστηκαν κατά τη μεσαιωνική περίοδο. Η φιλολογική προσέγγιση αναπτύχθηκε πλήρως στη μονογραφία που ακολούθησε, τις *Κειμενικές μελέτες*· όμως καρποί αυτής της μεθόδου εφαρμόζονται συχνά και στην *Αρχαία παράδοση*. Για παράδειγμα, συχνά ο Knorr αναζητά σε μεσαιωνικές πηγές απεικονίσεις των μεθόδων των αρχαίων και ισχυρίζεται ότι εντόπισε ίχνη αρχαίων μεθόδων σε έργα μεσαιωνικών συγγραφέων. Παρόλο που ενδέχεται να μην συμφωνούμε με όλα τα συμπεράσματα του Knorr, η προσέγγισή του, σε γενικές γραμμές μπορεί να μας οδηγήσει σε σημαντικές αποκαλύψεις. Αφού οι μαθηματικοί του Μεσαίωνα συχνά μάθαιναν τα μαθηματικά τους μελετώντας με προσοχή τα αρχαία κείμενα και αφού έχουμε πολύ περισσότερα τεκμήρια από τη μεσαιωνική περίοδο —μεταξύ άλλων αυθεντικά χειρόγραφα μαθηματικών και των μαθητών τους, μεθοδολογικές περιγραφές και πολλά άλλα— μπορούμε πολλές φορές να αποκτήσουμε μια εικόνα των λεπτομερειών των αρχαίων και μεσαιωνικών μαθηματικών πρακτικών μελετώντας προσεκτικά τα μεσαιωνικά τεκμήρια. Πράγματι, διαβάζοντας μια αρχαία πηγή σε συνδυασμό με μια μεσαιωνική της μετάφραση ή ένα σχόλιο που έχει γίνει από κάποιον μαθηματικά επαρκή λόγιο, συμβαίνει καμιά φορά να δούμε πράγματα που θα μας είχαν διαφύγει αν απλώς διαβάζαμε τα κείμενα μόνο με το μάτι της δικής μας μαθηματικής εκπαίδευσης.

Σε ολόκληρη την *Αρχαία παράδοση*, ο Knorr υποστηρίζει ότι η γεωμετρική ανάλυση αποτελεί μια ευρετική προσέγγιση στην επίλυση προβλημάτων. Στο τελευταίο κεφάλαιο, «Η γεωμετρική ανάλυση των αρχαίων: μια αποτίμηση» συνοψίζει αυτή την άποψη, υπογραμμίζοντας τις πολυάριθμες περιπτώσεις όπου η ευρετική ισχύς της γεωμετρικής ανάλυσης εφαρμόστηκε στις ανακατασκευές που παρατίθενται. Επειδή, όμως, δεν συμφωνούν όλοι οι μελετητές της ιστορίας των ελληνικών μαθηματικών με αυτή την άποψη, θα πρέπει να αποσαφηνίσουμε κάποιους όρους. Όταν μιλάμε για «ανάλυση», ενδέχεται να αναφερόμαστε σε μια καταγεγραμμένη ανάλυση που περιέχεται σε κάποιο ελληνικό σύγγραμμα, ακολουθούμενη, συνήθως αλλά όχι πάντοτε, από μια σύνθεση. Ενδέχεται όμως και να εννοούμε ένα συνολικό σώμα προσεγγίσεων της μαθηματικής έρευνας. Συνήθως ο Knorr χρησιμοποιεί τον όρο με τη δεύτερη έννοια. Συγκεκριμένα, παρόλο που κάθε μία καταγεγραμμένη ανάλυση μπορεί να περιλαμβάνεται σε ένα αρχαίο σύγγραμμα για ρητορικούς ή αποδεικτικούς σκοπούς και να περιλαμβάνει ένα παραγωγικό τμήμα (που συνήθως αποκαλείται «ανάλυση/resolution»), αυτό δεν σημαίνει ότι αντικατοπτρίζει μια πραγματική ευρετική διαδικασία που ακολούθησε κάποιος μαθηματικός. Επίσης, δεν αποτελεί ένδειξη για το αν η ανάλυση ως σύνολο τεχνικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ευρετικό τρόπο. Στην πραγματικότητα, αρχαίοι και μεσαιωνικοί μαθηματικοί μελετητές που αντιμετώπισαν ευθέως αυτό το θέμα υποστήριξαν ομόφωνα ότι η ανάλυση είναι, όντως, μια ευρετική τεχνική. Μάλιστα, ένα από τα κύρια επιτεύγματα της *Αρχαίας παράδοσης* είναι η δημιουργία μιας λεπτομερούς αναφοράς του πώς η ανάλυση θα μπορούσε να είχε λειτουργήσει ως ευρετική τεχνική. Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να κατανοήσουμε τι θα σήμαινε η εύρεση κατασκευών για γεωμετρικά προβλήματα με χρήση της γεωμετρικής ανάλυσης — κάτι που ονομάστηκε «προβληματική ανάλυση». Ωστόσο, στο τελευταίο κεφάλαιο, ο Knorr υποστηρίζει ότι η έννοια της «θεωρη(μα)τικής ανάλυσης», σε αντίθεση με την «προβληματική ανάλυση», είναι ένα δημιούργημα της ύστερης αρχαιότητας και δεν αντιστοιχεί σε κάποια πραγματική Ελληνιστική κατηγορία. Για αυτόν τον λόγο, θεωρεί ότι η ενδεδειγμένη μορφή ανάλυσης υπήρξε πάντοτε μια ευρετική μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων. Παρόλα αυτά, πρέπει να επισημάνουμε ότι υπάρχουν καταγεγραμμένες θεωρη(μα)τικές αναλύσεις στο *Λόγου αποτομή* του Απολλωνίου, κάτι που θέτει υπό αμφισβήτηση τον ισχυρισμό του Knorr ότι αυτή η μορφή μαθηματικού κειμένου δεν χρησιμοποιούνταν από τους συγγραφείς της Ελληνιστικής περιόδου.

Επιπλέον, επειδή ο Knorr περιορίζει την αναφορά του στους γεωμέτρες της Ελληνιστικής εποχής, δεν αναφέρει μια επέκταση της έννοιας της ανάλυσης που απαντά σε μαθηματικούς που εργάστηκαν κατά την Αυτοκρατορική περίοδο, όπως ο Ήρων και ο Πτολεμαίος, και που ενδέχεται να βρίσκονται πίσω από ορισμένες χρήσεις της ορολογίας που σχετίζεται με την ανάλυση στα γραπτά του Γαληνού. Ειδικότερα, ο Ήρων και ο Πτολεμαίος χρησιμοποιούν επιχειρήματα βασισμένα σε παραγωγικούς ισχυρισμούς σχετικά με το τι είναι «δεδομένο» έτσι ώστε να οδηγηθούν σε συμπεράσματα σχετικά με τον υπολογισμό αριθμητικών τιμών, με βάση την υπόθεση ότι ορισμένες συνιστώσες του γεωμετρικού σχήματος έχουν γνωστή τιμή. Αυτός ο τύπος συλλογισμού αποκαλείται «ανάλυση», τόσο από τον Ήρωνα όσο και από τον Πάππο, και μελετήθηκε κατά την μεσαιωνική περίοδο από μαθηματικούς όπως ο Thābit ibn Qurra και ο Jordanus Nemorarius. Συνεπώς, παρόλο που ο Knorr έχει δίκιο να αφήνει αυτή τη μορφή ανάλυσης έξω από το πεδίο της ελληνιστικής γεωμετρικής ανάλυσης, για να κατανοήσουμε πλήρως τη γεωμετρική ανάλυση που αναπτύχθηκε από τους μεσαιωνικούς και τους μεταγενέστερους συγγραφείς θα πρέπει να την συμπεριλάβουμε στη συνολική αποτίμηση των ελληνικών μαθηματικών.

Ένα από τα πιο σημαντικά συμπεράσματα της *Αρχαίας παράδοσης* είναι μια εμπεριστατωμένη απόδειξη ότι οι έλληνες γεωμέτρες δεν περιορίζονταν σε κατασκευές με ευθείες και κύκλους, και ότι, σε μερικές περιπτώσεις, δεν είναι καν σαφές ότι αυτού του είδους οι κατασκευές έχαιραν κάποιας προτίμησης. Για παράδειγμα, στο πέμπτο κεφάλαιο, «Αρχιμήδης: Ο άριστος γεωμέτρης της ευδόξειας παράδοσης», ο Knorr υποστηρίζει πειστικά ότι ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί «νεύσεις» ως πρωτογενείς κατασκευές, χωρίς να προσπαθεί ή να έχει το παραμικρό ενδιαφέρον να τις αναγάγει σε κατασκευές με ευθείες και κύκλους. Μια κατασκευή μέσω νεύσεως συνίσταται στο να κατασκευάσουμε μια ευθεία που διέρχεται από ένα δεδομένο σημείο έτσι ώστε ένα τμήμα της δεδομένου μήκους να παραμένει μεταξύ δύο δεδομένων γεωμετρικών αντικειμένων — μιας ευθείας και ενός κύκλου για παράδειγμα. Ας σημειωθεί ότι δεν είναι δυνατή η αναγωγή όλων των νεύσεων σε κατασκευές με ευθείες και κύκλους. Μάλιστα, στα πιο προχωρημένα συγγράμματα θα βρούμε έναν πλούτο από διαφορετικές κατασκευές που περιλαμβάνουν κωνικές τομές, ειδικές καμπύλες, ολισθαίνουσες και στρεφόμενες ευθείες, στερεά, μηχανικά όργανα και άλλες τέτοιου είδους θεωρήσεις. Στην πραγματικότητα δεν είναι καν σαφές αν όλοι οι έλληνες γεωμέτρες συμφωνούσαν σχετικά με το ποιες κατασκευές ήταν προτιμητέες και επιδιωκόμενες. Φαίνεται ότι η ταξινόμηση των λύσεων με βάση τα αντικείμενα που μπορούσαν να τις παραγάγουν και η ανάδειξη των κατασκευών με ευθείες και κύκλους ως προτιμητέων αποτέλεσε μέρος ενός ερευνητικού προγράμματος που προώθησαν ο Ευκλείδης και ο Απολλώνιος και δεν έγινε γενικός κανόνας παρά μόνο αργότερα.

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό της επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων που παρουσιάζει ο Knorr στην *Αρχαία παράδοση* περιλαμβάνει μια δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ των διαφορετικών μεθόδων λύσης. Οι συγγραφείς της ύστερης αρχαιότητας, όπως ο Πάππος και ο Ευτόκιος, παρουσιάζουν τις λύσεις στα γεωμετρικά προβλήματα κατανεμημένες σε τρεις κατηγορίες, αυξανόμενης πολυπλοκότητας, (1) ευθείες και κύκλοι, (2) κωνικές τομές και (3) ειδικές καμπύλες, με τον ισχυρισμό ότι είναι πάντοτε προτιμότερο να χρησιμοποιείται η απλούστερη κατηγορία, όποτε αυτό είναι εφικτό. Ο Knorr όμως διατείνεται ότι αυτή η ταξινόμηση αποτελεί υπεραπλούστευση των μεθόδων που περιλαμβάνονται στις διάφορες πηγές. Αντί για αυτήν την κανονιστική κατηγοριοποίηση, ο ίδιος υποστηρίζει ότι οι αρχαίοι γεωμέτρες είχαν εμπλακεί ουσιαστικά σε έναν διάλογο, στο πλαίσιο του οποίου οι λύσεις μπορούσαν να προταθούν με οποιοδήποτε μέσο και αν ήταν εφικτές. Τα αντικείμενα θα ορίζονταν με χαρακτηρισμούς γεωμετρικού τόπου και, στη συνέχεια, αυτές οι λύσεις ή οι αντίστοιχοι γεωμετρικοί τόποι, θα υπόκειντο σε περαιτέρω διερεύνηση που θα στόχευε στην κατανόησή τους από πολλές διαφορετικές προοπτικές. Το αν συμφωνούμε ή όχι με όλους τους επιμέρους ισχυρισμούς που περιέχει αυτό το επιχείρημα, έχει μικρότερη σημασία από το να εκτιμήσουμε τη σφαιρική εικόνα του συνόλου των μαθηματικών να αναπτύσσουν τις ιδέες τους μέσω μιας δυναμικής διαδικασίας προτάσεων για εν δυνάμει λύσεις σε προβλήματα και, στη συνέχεια, τοποθέτησης αυτών των λύσεων ως αντικειμένων για περαιτέρω διερεύνηση. Η κεντρική ιδέα είναι ότι, για άλλη μια φορά, η δραστηριότητα επίλυσης προβλημάτων λειτουργεί ως κινητήριος μηχανισμός ανάπτυξης, ενώ η εργασία τυπικής διατύπωσης και κατηγοριοποίησης έρχεται αργότερα. Αυτό αποτελεί ένα παράδειγμα του τρόπου αλλαγής προοπτικής που μπορεί να προκύψει αν θεωρήσει κανείς ότι οι μαθηματικοί δραστηριοποιούνται με βάση μαθηματικά και όχι φιλοσοφικά κίνητρα.

Εν κατακλείδι, παρόλο που δεν θα συμφωνήσουν όλοι με το σύνολο των ευρημάτων και των πτυχών της μεθοδολογίας του Knorr, η *Αρχαία παράδοση* είναι η πιο σημαντική μονογραφία που έχει γραφεί σχετικά με την ελληνική γεωμετρική ανάλυση και παρουσιάζει μια ζωντανή εικόνα της ελληνικής γεωμετρίας γενικότερα. Δεν πρόκειται για μια επισκόπηση μαθηματικών που διερευνούν έναν αναλλοίωτο χώρο ιδεών σύμφωνα με κατοχυρωμένες μεθόδους και πλαίσια. Πρόκειται αντίθετα για έναν δυναμικό ανταγωνισμό εν μέσω διαφωνιών, στο πλαίσιο του οποίου οι μαθηματικοί διαλέγονται μεταξύ τους σχετικά με τη μέθοδο εργασίας παρουσιάζοντας διαφορετικές, συχνά αντικρουόμενες προσεγγίσεις στα προβλήματα που τους απασχολούν. Αν επιθυμούμε να γνωρίσουμε τις μαθηματικές πρακτικές που υπεισέρχονταν στην προσέγγιση και επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων στους αρχαίους ελληνόφωνους πολιτισμούς, το βιβλίο του Knorr, *Η Αρχαία παράδοση των γεωμετρικών προβλημάτων*, αποτελεί ένα καθοριστικό σημείο εκκίνησης.

Nathan Sidoli

Πανεπιστήμιο Waseda, Ιαπωνία
Διευθυντής των επιστημονικών περιοδικών
SCIAMVS και *Historia Mathematica*

Πρόλογος

Στην αρχαία γεωμετρία, σε ένα γεωμετρικό «πρόβλημα» ζητείται η κατασκευή ενός σχήματος με βάση μια συγκεκριμένη περιγραφή. Για την ολοκλήρωση της επίλυσης οποιουδήποτε προβλήματος απαιτείται η επίκληση των κατασκευών άλλων ήδη λυμένων προβλημάτων, ενώ η λύση αυτή, με τη σειρά της, θα χρησιμοποιηθεί στη λύση νέων προβλημάτων. Συνεπώς, το σώμα των λυμένων προβλημάτων αποτελεί μια διατεταγμένη ακολουθία, μέσα στην οποία το κάθε πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε αυτά που προηγούνται. Οι συνέπειες αυτής της απλής σύλληψης υπέπεσαν στην αντίληψή μου την εποχή που ολοκλήρωνα τη συγγραφή ενός άρθρου σχετικά με την κατασκευή της υπερβολής από τον Απολλώνιο (1980)[1], και με βοήθησαν να ενοποιήσω μια ευρεία γκάμα γεωμετρικού υλικού το οποίο συνέλεγα επί πέντε, περίπου, χρόνια.

Το γεγονός ότι η αρχαία διαδικασία επίλυσης προβλημάτων απέκτησε αυτή τη δομή είναι μάλλον αναμενόμενο, με δεδομένο τον προεξάρχοντα ρόλο της «ανάλυσης» στην ανακάλυψη και απόδειξη των λύσεων· και αυτό διότι η συγκεκριμένη μέθοδος απαιτεί για κάθε περίπτωση την αναγωγή του διατυπωμένου προβλήματος σε άλλα που έχουν ήδη λυθεί. Έχουμε στη διάθεσή μας ένα αρχαίο σύγγραμμα, τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη, όπου τα θέματα της στοιχειώδους γεωμετρίας παρουσιάζονται κατ' αυτόν τον τρόπο. Ωστόσο, δεν έχει διασωθεί κανένα σύγγραμμα που να επιχειρεί να κάνει το ίδιο σε πιο προχωρημένα πεδία. Τα *Κωνικά* του Απολλωνίου, για παράδειγμα, είναι αφ' εαυτών βοηθητικά σε

1 Ο συγγραφέας αναφέρεται στη μελέτη «The Hyperbola-Construction in the *Conics*, Book II: Ancient Variations on a Theorem of Apollonius», η οποία δημοσιεύθηκε στο περιοδικό *Centaurus* 25 (1982), 253–291. (Σ.τ.Ε.)

αυτού του είδους την προσπάθεια, καθώς προσφέρουν μια βασική εισαγωγή στη θεωρία των κωνικών τομών, μέσω της οποίας θα μπορούσαν να λυθούν τα λεγόμενα «στερεά» προβλήματα· στην πραγματικότητα, όμως, ελάχιστα πραγματεύονται την επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Επομένως, αυτή η εμφανής παράλειψη στα σωζόμενα κείμενα καθορίζει και τον στόχο του παρόντος πονήματος, ο οποίος είναι να αξιοποιηθεί το διαθέσιμο υλικό που περιέχεται στα έργα του Αρχιμήδη, του Απολλωνίου, του Πάππου και άλλων προκειμένου να ανασυνθέσουμε μια εικόνα της φύσης και της εξέλιξης της αρχαίας παράδοσης της γεωμετρικής ανάλυσης.

Η παρούσα προσπάθεια μπορεί να θεωρηθεί μια διερευνητική απόπειρα που έχει σκοπό να αποκαλύψει τις δυνατότητες που μας παρέχουν τα διαθέσιμα τεκμήρια προκειμένου να προτείνουμε μια ερμηνεία του αρχαίου πεδίου των γεωμετρικών κατασκευών. Ωστόσο, μια πλήρης και οριστική καταγραφή υπερβαίνει τους στόχους αυτού του πονήματος και ενδέχεται τελικά να είναι αδύνατη, λόγω των κενών στις διαθέσιμες πηγές. Παρομοίως, μια εξαντλητική μελέτη της τεράστιας δευτερογενούς βιβλιογραφίας σχετικά με την ιστορία των γεωμετρικών κατασκευών δεν θα ήταν εφικτή. Και μόνον ο τεράστιος όγκος αυτής της βιβλιογραφίας καθιστά τις παραλείψεις αναπόφευκτες. Ωστόσο, έχω συμπεριλάβει παραπομπές σε εκείνες τις εργασίες που μου φάνηκαν, από ιστορική και τεχνική άποψη, ενδιαφέρουσες και άμεσα συνδεδεμένες με τους κύριους στόχους μου. Απολογούμαι αν έχω παραβλέψει αξιόλογες αναλύσεις, και θα δεχθώ ευχαρίστως πληροφορίες που θα αποτρέψουν παρόμοιες παραλείψεις στο μέλλον.

Με δεδομένο ότι η αρχαία γεωμετρία, και ιδιαίτερα το έργο του Αρχιμήδη, υπήρξε επί σειρά ετών το πεδίο του ειδικού μου ενδιαφέροντος, η παρούσα μελέτη πραγματεύεται περιστασιακά και προβλήματα που έχουν αναλυθεί σε παλαιότερες δημοσιεύσεις μου. Έτσι, σε ορισμένες περιπτώσεις επέλεξα να παραθέσω με περιληπτικό τρόπο επιχειρήματα που έχω αναπτύξει λεπτομερώς αλλού ή να αναφερθώ επιγραμματικά σε σχετικές συζητήσεις. Σε αυτές τις περιπτώσεις προσπάθησα να αποφύγω την απλή επανάληψη προηγούμενων δημοσιεύσεων. Έτσι, το παρόν πόνημα, με εξαίρεση αυτές τις περιστασιακές επικαλύψεις, αποτελεί πρωτότυπη εργασία.

Στην προσπάθειά μου να ερμηνεύσω τα αρχαία κείμενα θα εστιάσω στις μαθηματικές και ιστορικές τους όψεις, ενώ το τελευταίο κεφάλαιο περιλαμβάνει και θέματα φιλοσοφικού ενδιαφέροντος. Επίσης, πρέπει να επισημάνω ότι η αντιμετώπιση των κειμενικών προβλημάτων στις πηγές, παρόλο που συχνά παραβλέπεται σε μελέτες αυτού του τύπου, είναι πολλές φορές απαραίτητη για την κατανόηση των αρχαίων συγγραμμάτων. Για αυτόν τον λόγο, έχω συμπεριλάβει και τέτοιου είδους σχόλια, όποτε αυτά συνδέονται με θέματα που μας απασχολούν εδώ. Δεν θα επιχειρήσω πάντως μια ευρύτερη διερεύνηση καταγραφής των αρχαίων συγγραμμάτων και των συνθηκών δημιουργίας και μετάδοσής τους, κάτι το οποίο αποτελεί αντικείμενο ενός άλλου τόμου που βρίσκεται αυτή τη στιγμή υπό διαμόρφωση.[2] Σε αυτό το δεύτερο έργο προτίθεμαι να μελετήσω μια ομάδα ελληνικών και αραβικών κειμένων σχετικών με τα γεωμετρικά προβλήματα, με στόχο να αναδείξω τα γενικά χαρακτηριστικά της επιστημονικής δραστηριότητας που διατήρησε ζωντανή την παράδοση της αρχαίας γεωμετρίας.

Επιχορηγήσεις από το Αμερικανικό Συμβούλιο Λογίων Εταιρειών (American Council of Learned Societies) και το Ινστιτούτο Προκεχωρημένων Ερευνών (Institute of Advanced Study) μου έδωσαν τη δυνατότητα να διεξάγω αυτές τις έρευνες στο Ινστιτούτο κατά τα έτη 1978–1979, ενώ μια επιχορήγηση από το Εθνικό Ίδρυμα Επιστημών (National Science Foundation), που παρασχέθηκε από την Αμερικανική Ακαδημία Επιστημών και Τεχνών, μου έδωσε τη δυνατότητα να συνεχίσω την έρευνα το 1979–1980.

Οι κριτικές και υποδείξεις των φοιτητών του Τμήματος Φιλοσοφίας του Πανεπιστημίου του Στάνφορντ, και ιδιαίτερα των Susan Hollander, Henry Mendell και David O'Connor, υπήρξαν πολύ χρήσιμες. Θέλω επίσης να ευχαριστήσω τους συναδέλφους μου των Τμημάτων Φιλοσοφίας, Κλασικών Σπουδών και Μαθηματικών για τα σχόλιά τους, και ιδιαίτερα τους Sol Feferman (1928–2016), Halsey Royden (1928–1993), Hans Samelson (1916–2005) και Patrick Suppes (1922–2014), οι οποίοι διάβασαν τα κεφάλαια

2 Ο συγγραφέας αναφέρεται στο βιβλίο *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, Boston: Birkhäuser, 1989. Στη συνέχεια του παρόντος συγγράμματος, θα αναφερόμαστε συχνά σε αυτό το βιβλίο ως «ο δεύτερος τόμος». (Σ.τ.Μ.)

στην πρώτη τους μορφή, και την Jody Maxmin, για τις συμβουλές της σχετικά με την παρουσίαση των εικόνων. Ο Ian Mueller (Πανεπιστήμιο του Σικάγο, 1938–2010) έκανε εκτενή και πολύτιμα σχόλια στα τελευταία στάδια του έργου. Εκτιμώ ιδιαίτερα τον σεβασμό και την ευγένεια με την οποία αντιμετώπισαν όλοι τις προσπάθειές μου, ακόμα και στην περίπτωση που οι απόψεις μου διέφεραν ριζικά από τις δικές τους.

Είμαι υπόχρεος σε αρκετά μουσεία και ερευνητικές βιβλιοθήκες για την άδεια που μου έδωσαν να αναπαράγω φωτογραφίες από αντικείμενα των συλλογών τους. Αυτά αναφέρονται στις λεζάντες των εικόνων. Μια χορηγία από το Πανεπιστήμιο του Στάνφορντ, μέσω του γραφείου του Κοσμήτορα Μεταπτυχιακών Σπουδών και Έρευνας, κάλυψε μέρος του κόστους της δημοσίευσης των φωτογραφιών.

Τέλος, επιθυμώ να ευχαριστήσω τον πρόεδρο και τους εκδότες του εκδοτικού οίκου Birkhäuser της Βοστώνης για την υποστήριξη, την υπομονή και τη συνέπειά τους.

W. R. K.
Στάνφορντ, Καλιφόρνια

1

Ξεχωρίζοντας την ιστορία από τον μύθο

Τα προβλήματα του διπλασιασμού του κύβου, της τριχοτόμησης της γωνίας και του τετραγωνισμού του κύκλου έχουν δικαίως προσελκύσει το ενδιαφέρον των μελετητών της αρχαίας ελληνικής γεωμετρίας. Η αρχαία γραμματεία σχετικά με αυτά τα προβλήματα αποτελεί έναν από τους πιο πλούσια τεκμηριωμένους τομείς των αρχαίων μαθηματικών: αριθμεί περισσότερες από δυο δωδεκάδες διαφορετικές λύσεις, συχνά με πολλαπλές εκδοχές, και εκτείνεται στο σύνολο της αρχαιότητας, από την Προευκλείδεια περίοδο, διά μέσου της Ελληνιστικής, της Ελληνορωμαϊκής και της Βυζαντινής περιόδου, φτάνοντας μέχρι και τους Μέσους Χρόνους στον Αραβικό Κόσμο. Σε ολόκληρη αυτή την περίοδο, τα συγκεκριμένα προβλήματα διασυνδέθηκαν με έρευνες στους πιο προχωρημένους τομείς της γεωμετρίας.

Θα μπορούσαμε, συνεπώς, να προσδοκούμε ότι μια ιστορική επισκόπηση αυτών των ερευνών θα μας έδινε μια αξιόλογη εικόνα της εξέλιξης των τεχνικών της γεωμετρίας κατά την αρχαιότητα: Από πού προήλθε το ενδιαφέρον για αυτά τα προβλήματα; Πώς συνδέεται η μελέτη τους με προηγούμενες προσπάθειες στα ίδια ή σε συναφή προβλήματα; Πώς συνέβαλαν τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών στην ανάπτυξη νέων γεωμετρικών τεχνικών για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων; Ποιες ήταν οι ακριβείς προδιαγραφές για την κατασκευή των λύσεων και πώς οι συνθήκες αυτές μεταβάλλονταν με την εισαγωγή νέων εννοιών και τεχνικών; Και, τελικά, θεωρούσαν οι αρχαίοι γεωμέτρες και φιλόσοφοι ότι η αναζήτηση λύσεων στέφθηκε με επιτυχία;

Δυστυχώς, προς το παρόν, μπορούμε να παρουσιάσουμε μόνο ένα μικρό μέρος αυτού του ερευνητικού προγράμματος με τη μορφή μιας γραμμικής αφήγησης του πώς έλαβαν χώρα τα πράγματα. Η υπάρχουσα τεχνική γραμματεία έχει τεράστια κενά και, συνεπώς, δεν είμαστε σε θέση να ισχυριστούμε ότι γνωρίζουμε όλες τις λύσεις που επεξεργάστηκαν οι αρχαίοι για αυτά τα προβλήματα. Μάλιστα, σε μερικές περιπτώσεις δεν γνωρίζουμε καν τους γεωμέτρες που παρήγαγαν τις λύσεις που έχουν διασωθεί. Ακόμα πιο δύσκολη είναι η αξιολόγηση των κινήτρων των συγγραφέων, αφού τα τεχνικά κείμενα που διαθέτουμε σπάνια μας παρέχουν μια άμεση δυνατότητα να κατανοήσουμε τις αιτίες που οδήγησαν τους γεωμέτρες να ενδιαφερθούν για τα συγκεκριμένα προβλήματα και να τα επεξεργαστούν με τις συγκεκριμένες μεθόδους. Για αυτόν τον λόγο, συχνά είμαστε αναγκασμένοι να καταφεύγουμε σε μαρτυρίες μη μαθηματικών συγγραμμάτων. Σε αυτήν όμως την περίπτωση ερχόμαστε αντιμέτωποι με νέες δυσκολίες, δεδομένου ότι οι συγγραφείς αυτών των έργων ενδέχεται να μην κατανοούσαν πλήρως τα τεχνικά θέματα, ενώ, σε κάθε περίπτωση, είχαν και τα δικά τους ιδιαίτερα φιλολογικά και φιλοσοφικά ενδιαφέροντα. Αυτό το τελευταίο τους αποθάρρυνε συστηματικά από του να παρουσιάζουν τα τεχνικά θέματα με τη σαφήνεια και τη λεπτομέρεια που θα επιθυμούσαμε.

Μία από τις πιο σημαντικές μαρτυρίες για την πρώιμη μελέτη του διπλασιασμού του κύβου μας διαφωτίζει σχετικά με τους κινδύνους της χρήσης μη μαθηματικών πηγών. Πρόκειται για ένα απόσπασμα από το *Περί του Σωκράτους δαιμονίου*, μια δραματοποίηση των πολιτικών συνωμοσιών που εκτυλίσσονταν στην πόλη-κράτος των Θηβών το 379 π.Χ., που προέρχεται από έναν συγγραφέα περισσότερο γνωστό για το φιλοσοφικό και βιογραφικό του έργο, τον Πλούταρχο από την Χαιρώνεια (1ος–2ος αιώνας μ.Χ.).[1] Εδώ ομιλητής είναι ο Σιμμίας, ένας από τους συνωμότες των Θηβών, ο οποίος αναφέρεται σε μια πρόσφατη επίσκεψη που έκανε, μαζί με τον Πλάτωνα, στην Αίγυπτο:

> Ενώ επιστρέφαμε από την Αίγυπτο, μερικοί Δήλιοι μας πλησίασαν κοντά στην Καρία και παρακάλεσαν τον Πλάτωνα, ως γεωμέτρη, να τους εξηγήσει έναν ασυνήθιστο χρησμό που τους είχε δώσει ο Θεός. Ο χρησμός έλεγε ότι οι Δήλιοι και οι άλλοι Έλληνες θα ανακουφιστούν από τα δεινά τους μόλις διπλασιάσουν τον βωμό στη Δήλο. Όμως, καθώς αυτοί δεν μπορούσαν να κατανοήσουν το νόημα του χρησμού

[1] Για μια σύντομη περιγραφή και βιβλιογραφία σχετικά με τη ζωή και το έργο του Πλουτάρχου μπορεί κανείς να συμβουλευθεί το *Oxford Classical Dictionary* (^{2}1970, Oxford).

> και, επιπλέον, γελοιοποιήθηκαν κατά την κατασκευή του βωμού — αφού, καθώς αγνοούσαν την αναλογία η οποία διπλασιάζει το μήκος, δεν πρόσεξαν ότι όταν διπλασιαζόταν η κάθε μία από τις τέσσερις [!] πλευρές τότε ο όγκος του στερεού οκταπλασιαζόταν— κάλεσαν τον Πλάτωνα να τους βοηθήσει να βγουν από το αδιέξοδο. Τότε ο Πλάτων, φέρνοντας στη μνήμη του τον Αιγύπτιο, είπε ότι ο Θεός περιπαίζει τους Έλληνες επειδή παραμελούν την παιδεία και με τον τρόπο του μας μέμφεται για την αμάθειά μας και μας διατάσσει να επιδοθούμε στη μελέτη της γεωμετρίας με σοβαρότητα και όχι περιστασιακά· διότι δεν πρέπει να νομίζει κανείς ότι η εύρεση των δύο μέσων αναλόγων μέσω των οποίων και μόνο μπορεί να διπλασιαστεί ο όγκος του κυβικού σχήματος αυξάνοντας ομοίως την κάθε του διάσταση, είναι έργο κατώτερης και μη οξυδερκούς διάνοιας. Αντίθετα, είναι έργο διάνοιας εξασκημένης στο έπακρο στα θέματα των γραμμών. Αυτό [είπε ο Πλάτων] θα μπορούσε να το επιτελέσει ο Εύδοξος ο Κνίδιος ή ο Ελίκων ο Κυζικινός. Δεν πρέπει όμως να νομίζουν ότι αυτό ήταν η επιθυμία του Θεού. Στην πραγματικότητα, διατάσσει όλους τους Έλληνες να εγκαταλείψουν τον πόλεμο και τα δεινά του, να καταγίνονται με τις Μούσες και, καταλαγιάζοντας τα πάθη με την έλλογη σκέψη και τα μαθηματικά, να ζήσουν αρμονικά και ωφέλιμα μαζί.[2]

Εδώ, το κύριο μέλημα του Πλουτάρχου είναι να τονίσει ότι οι θεωρητικοί κλάδοι, όπως είναι τα μαθηματικά και η φιλοσοφία, μπορούν να συμβάλουν αποτελεσματικά στην αποφυγή των συγκρούσεων, τόσο μέσω της επίδρασής τους στον μετριασμό της επιθετικότητας των ανθρώπων όσο και μέσω της ευεργετικής επίδρασης που έχει η χρήση του ορθού λόγου στο συμβιβασμό των διαφορών. Αυτό ακριβώς το σημείο είχε υπογραμμιστεί και προηγουμένως στο κείμενο, στο εδάφιο που εννοείται με τη φράση «φέρνοντας στη μνήμη του τον Αιγύπτιο», στο οποίο ένας αιγύπτιος ιερέας είχε πληροφορήσει ορισμένους Έλληνες ότι το έγγραφο που του είχαν φέρει προς αποκρυπτογράφηση περιείχε την παραίνεση να καλλιεργούνται οι Μούσες και όχι ο πόλεμος.

Τι προσπαθεί όμως να πει ο Πλούταρχος σχετικά με την προέλευση της ίδιας της μαθηματικής έρευνας; Με μια πρώτη ματιά θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι έχει απλώς κατά νουν ότι οι

---

2 *Ηθικά*, 579a–d· πρβλ. το κείμενο, τη μετάφραση και τα σχόλια σε αυτό και σε άλλα συναφή εδάφια στο P. H. de Lacy & B. Einarson, *Plutarch's Moralia* (Cambridge, Mass., London: Loeb Classical Library), VII, 1959, σ. 396–399.

γεωμέτρες του κύκλου του Πλάτωνα άρχισαν να μελετούν τον διπλασιασμό του κύβου για να δώσουν μια απάντηση στο πρόβλημα που έθεσε ο χρησμός. Ουσιαστικά, θα σήμαινε ότι ο Πλούταρχος υποστηρίζει μια μορφή «εξωτερικιστικής» οπτικής, σύμφωνα με την οποία τα κίνητρα των τεχνικών δραστηριοτήτων δεν βρίσκονται εντός του τεχνικού πεδίου, αλλά, για παράδειγμα, στην πολιτική, στα οικονομικά ή, όπως στην προκειμένη περίπτωση, στη φιλοσοφία και στη θρησκεία. Όντως, όσοι υποστηρίζουν ότι οι τελετουργικές πρακτικές αποτέλεσαν σημαντικό έναυσμα για τις πρώιμες μαθηματικές μελέτες ή ότι ο φιλοσοφικός λόγος αποτέλεσε το αρχικό πρότυπο της θεωρητικής σκέψης των ελλήνων γεωμετρών, επικαλούνται συχνά εδάφια σαν κι αυτό.[3] Ωστόσο, μια πιο προσεκτική ανάγνωση αποκαλύπτει ότι ο Πλούταρχος δεν ισχυρίζεται στην πράξη κάτι τέτοιο. Ο Πλάτων, όπως τον περιγράφει ο Πλούταρχος, γνωρίζει ήδη κάποια στοιχεία σχετικά με το πρόβλημα, συγκεκριμένα ότι είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα της εύρεσης δύο μέσων αναλόγων. Αν η πλευρά του δεδομένου κύβου είναι A και βρούμε δύο ευθύγραμμα τμήματα X και Y τέτοια ώστε $A : X = X : Y = Y : 2A$ τότε, συνδυάζοντας τους λόγους, θα έχουμε

3 Το τελετουργικό υπόβαθρο των μαθηματικών αποτελεί κύριο μέλημα σε αρκετά άρθρα του A. Seidenberg· πρβλ. τις μελέτες «The Ritual Origin of Geometry», *Archive for History of Exact Sciences* 1 (1961), σ. 488–527 και «The Origin of Mathematics», *Archive for History of Exact Sciences* 18 (1976), σ. 301–342. Μερικές από αυτές τις ιδέες έχουν υιοθετηθεί και εμπλουτιστεί από τον B. L. van der Waerden, «On Pre-Babylonian Mathematics», *Archive for History of Exact Sciences* 23 (1980), σ. 1–46. Η άποψη σχετικά με το φιλοσοφικό υπόβαθρο των Προευκλείδειων μαθηματικών, ειδικότερα με τη μορφή επιρροής των Ελεατών στους Πυθαγορείους, έχει υποστηριχθεί από τον Á. Szabó· πρβλ. *Anfänge der griechischen Mathematik*, Budapest, Munich/Vienna, 1969 (Σ.τ.Ε.: Το βιβλίο έχει μεταφραστεί στα Αγγλικά ως *The Beginnings of Greek Mathematics*, Dordrecht, 1978· κυκλοφορεί ελληνική μετάφραση από την Α. Τεγοπούλου υπό τον τίτλο *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*, Αθήνα: Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος, 1973.) Έχω παρουσιάσει μια λεπτομερή κριτική των απόψεων του Szabó στη μελέτη «On the Early History of Axiomatics: the Interaction of Mathematics and Philosophy in Greek Antiquity» (δημοσιεύθηκε στο *Proceedings of the 1978 Pisa Conference on the History and Philosophy of Science*, επιμ. J. Hintikka κ.ά., τ. I, Dordrecht, 1981, σ. 145–186).

$(A:X)^3 = (A:X)\,(X:Y)\,(Y:2A)$, άρα $A^3 : X^3 = A : 2A$ ή $X^3 = 2A^3$.[4] Από άλλες πηγές, συγκεκριμένα από τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο (3ος αιώνας π.Χ.), πληροφορούμαστε ότι η αναγωγή του διπλασιασμού του κύβου στην εύρεση δύο μέσων αναλόγων είναι έργο του Ιπποκράτη του Χίου, έλαβε χώρα δηλαδή στο γύρισμα του 4ου αιώνα π.Χ. και συνεπώς προηγήθηκε κατά αρκετές δεκαετίες των γεγονότων στα οποία βασίζεται η αφήγηση του Πλουτάρχου.[5] Ο ίδιος ο Πλούταρχος φαίνεται να βασίζεται στον Ερατοσθένη για την αναφορά του στο χρησμό της Δήλου, αφού ένα παράλληλο εδάφιο σχετικά με τον διπλασιασμό του κύβου στο *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν* του Θέωνα του Σμυρναίου (πρώιμος 2ος αι. μ.Χ.) παραπέμπει στον *Πλατωνικό* του Ερατοσθένη για το ίδιο περιστατικό του Πλάτωνα με τους Δηλίους, και με το ίδιο, κατά βάσιν, θέμα:

> Αλλά ο Πλάτων τους είπε ότι ο Θεός έδωσε στους Δηλίους αυτόν τον χρησμό όχι επειδή επιθυμούσε έναν διπλάσιο βωμό, αλλά για να κατακρίνει και να ψέξει τους Έλληνες επειδή αμελούν τα μαθηματικά και αδιαφορούν για τη γεωμετρία.[6]

Αφού, λοιπόν, γνωρίζουμε την πηγή του Πλουτάρχου, καλό είναι να είμαστε επιφυλακτικοί απέναντι στις λεπτομέρειες της αφήγησής του. Είναι σαφές, για παράδειγμα, ότι η χρονολογική συσχέτιση αυτής της ιστορίας με την εξέγερση των Θηβών απορρέει πλήρως από μια προσαρμογή που έκανε ο Πλούταρχος στην παλαιότερη εκδοχή.

Εξίσου επιφυλακτικοί πρέπει να είμαστε και όταν εξετάζουμε ένα άλλο εδάφιο του Πλουτάρχου, στο οποίο περιγράφει τη

---

4 Ο περιορισμός σε δύο τμήματα A και $2A$ είναι, φυσικά, περιττός. Μπορεί κανείς να θεωρήσει δύο οποιαδήποτε τμήματα A και B που να έχουν μεταξύ τους οποιονδήποτε λόγο και να καταλήξει στο $A^3 : X^3$ $A : B$, πράγμα που γνώριζαν και οι αρχαίοι γεωμέτρες.

5 Βλ. το κείμενο του Ερατοσθένη όπως παρατίθεται από τον Ευτόκιο στο *Archimedis Opera*, έκδ. J. L. Heiberg, III, σ. 88. Πρβλ., επίσης, τη συζήτηση του Πρόκλου στο *In primum Euclidis Elementorum librum Commentarii*, έκδ. G. Friedlein, Leipzig: Teubner, 1873, σ. 213. Το έργο του Ιπποκράτη αναλύεται στο Κεφ. 2. (Σ.τ.Ε.: Το έργο του Πρόκλου θα αναφέρεται εφεξής ως *Εις Ευκλ.*)

6 Θέων ο Σμυρναίος, *Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*, έκδ. E. Hiller, Leipzig: Teubner, 1878, σ. 2.

συνέχεια της ιστορίας του Δηλίου προβλήματος, καταγράφοντας τον τρόπο με τον οποίο ο Πλάτων αντιμετώπισε τις μεθόδους επίλυσης που επεξεργάστηκαν οι γεωμέτρες. Αυτό το απόσπασμα παρεμβάλλεται στην περιγραφή των μηχανικών επιτευγμάτων του Αρχιμήδη από τον Πλούταρχο, τα οποία υπήρξαν καθοριστικά για την άμυνα των Συρακουσών κατά την πολιορκία των Ρωμαίων το 215–212 π.Χ.

> Αυτή η αγαπητή και περιβόητη γεωμετρική τέχνη με όργανα, αρχικά ασκήθηκε από τον κύκλο του Ευδόξου και του Αρχύτα, οι οποίοι διάνθησαν τη γεωμετρία με ένα περίτεχνο τρόπο και αντιμετώπισαν με αισθητά και μηχανικά μέσα τα προβλήματα που δεν επιδέχονταν αυστηρή γεωμετρική απόδειξη. Για παράδειγμα, για το πρόβλημα της κατασκευής δύο μέσων αναλόγων —στοιχείο αναγκαίο για πολλές γεωμετρικές προτάσεις— και οι δύο επιστράτευσαν κατασκευές με όργανα, συνδέοντας τεχνικές κατασκευής μέσων αναλόγων από καμπύλες και ευθύγραμμα τμήματα. Αλλά ο Πλάτων αγανάκτησε μαζί τους και τους κατηγόρησε πως κατέστρεφαν και εξευτέλιζαν το αγαθό της γεωμετρίας, απομακρύνοντάς το από τα ασώματα και νοητά όντα, υποβιβάζοντάς το στα αισθητά. Επιπλέον, τους κατηγόρησε ότι χρησιμοποιούσαν σώματα που απαιτούσαν πολλή και κοπιαστική εργασία. Κατ' αυτόν τον τρόπο, η μηχανική εξέπεσε, διαχωρίστηκε από τη γεωμετρία και, περιφρονημένη για μεγάλο χρονικό διάστημα από τη φιλοσοφία, κατέληξε να γίνει μία από τις στρατιωτικές τέχνες.[7]

Ο Πλούταρχος, επομένως, διατείνεται ότι υπάρχει ένα χάσμα ανάμεσα στις μηχανικές τέχνες και στους θεωρητικούς κλάδους, το οποίο γεφυρώνει μόνον ο Αρχιμήδης, ενδεχομένως για να θέσει σε εφαρμογή τις εμπνεύσεις του σχετικά με τη θεωρητική γεωμετρία. Ευλόγως ο Πλούταρχος αποδίδει τις ρίζες αυτής της

7 Πλούταρχος, *Βίος Μαρκέλλου*, xiv. 5–6. Μια εναλλακτική εκδοχή αυτού του ανεκδότου, στην οποία αναφέρονται οι γεωμέτρες Αρχύτας, Εύδοξος και Μέναιχμος, εμφανίζεται στο «*Πῶς Πλάτων ἔλεγε τὸν θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν*» του Πλουτάρχου (*Ηθικά*, 718e–f) — μία από τις πολλές συζητήσεις των θεμάτων που σχετίζονται με τον *Τίμαιο* του Πλάτωνα. Ορισμένοι θεολογικοί υπαινιγμοί σε αυτή την εκδοχή της ιστορίας του Δηλίου προβλήματος πρέπει να οφείλονται στην επεξεργασία της αρχικής αφήγησης από τον Πλούταρχο, όπως επίσης δική του πρέπει να είναι η προσπάθεια διασύνδεσης της ιστορίας στο εδάφιο από τον *Μάρκελλο* με τις ιστορικές τάσεις στη γεωμετρία και τη μηχανική.

διάκρισης στις ιδεαλιστικές αρχές της Πλατωνικής φιλοσοφίας. Πράγματι, στην *Πολιτεία* του Πλάτωνα, ο Σωκράτης ασκεί κριτική στους γεωμέτρες για την έλλειψη ευαισθησίας που επιδεικνύουν προς την πραγματική φύση του αντικειμένου τους:

> Νά, εκφράζονται με τρόπο πολύ αστείο και λειψό. Μιλούν για τετραγωνισμό, για κατασκευές, για προσθέσεις, σαν να ασχολούνταν με κάτι πρακτικό και όλες οι αποδείξεις τους να αναφέρονταν στην πράξη. Ενώ στην πραγματικότητα η σπουδή αυτή στο σύνολό της έχει αποκλειστικό αντικείμενό της τη γνώση ... εκείνου που έχει παντοτινή υπόσταση κι όχι εκείνου που κάποια στιγμή αποτελεί μια επί μέρους περίπτωση γένεσης και φθοράς (527a–b) ... Χρησιμοποιούν τα ορατά σχήματα και ξεδιπλώνουν τους συλλογισμούς τους για αυτά, ενώ στην πραγματικότητα αντικείμενα του στοχασμού τους δεν είναι αυτά, τα ορατά, αλλά εκείνα των οποίων τούτα εδώ αποτελούν ομοιώματα, αφού οι συλλογισμοί τους αναφέρονται στο τετράγωνο αυτό καθαυτό και τη διαγώνιο αυτή καθαυτή και όχι σε τούτην εδώ την οποία σχεδιάζουν, και το ίδιο για τα άλλα. Αυτά τα σχήματα που τα πλάθουν και τα σχεδιάζουν —σχήματα που έχουν σκιές και απεικονίσεις— τα χρησιμοποιούν και αυτά, με τη σειρά τους, ως εικόνες, που με τη βοήθειά τους επιδιώκουν να δουν ακριβώς εκείνα, τα οποία δεν θα μπορούσε κανείς να δει με κανέναν άλλο τρόπο παρά μόνο με το λογισμό. (510d–e).[8]

Είναι αυτήν ακριβώς την πλατωνική αντίληψη, αυτή τη βεβαιότητα σχετικά με την καθαρότητα των αντικειμένων της αληθινής γεωμετρικής μελέτης, που αποτυπώνει ο Πλούταρχος στο ανέκδοτό του για τον διπλασιασμό του κύβου. Παρόλα αυτά, είναι αντιληπτό ότι και εδώ αντλεί από τον Ερατοσθένη, τον οποίο χρησιμοποιεί ως ενδιάμεση πηγή. Και αυτό διότι ο σχολιαστής του Αρχιμήδη Ευτόκιος ο Ασκαλωνίτης (6ος αιώνας μ.Χ.), αποδίδει στον Ερατοσθένη μια μακρά αναφορά στην ιστορία του προβλήματος, περιλαμβάνοντας το ακόλουθο εδάφιο, ως συνέχεια της συνάντησης του Πλάτωνα με τους Δηλίους:

8 Μπορεί κανείς να συγκρίνει το κείμενο, τη μετάφραση και τα σχόλια του P. Shorey στο Plato: *The Republic* (Cambridge, Mass., London: Loeb Classical Library), 1935, II, σ. 170 κ.ε., 112 κ.ε. (Σ.τ.Ε.: Η μετάφραση προέρχεται από το Πλάτων, *Πολιτεία*, Εισ. σημείωμα – Μετάφραση – Ερμ. σημειώματα Ν. Μ. Σκουτερόπουλος. Αθήνα: Πόλις, 2002.)

> Αυτοί [οι γεωμέτρες της Ακαδημίας] καταπιάστηκαν δραστήρια με αυτό [το πρόβλημα] και ζητούσαν να βρουν δύο μέσες [αναλόγους] σε δύο δοθείσες [ευθείες], λέγεται δε ότι ο Αρχύτας ο Ταραντίνος βρήκε [μια λύση] μέσω των ημικυλίνδρων και ο Εύδοξος μέσω των λεγομένων καμπύλων γραμμών. Αλλά συνέβη όλοι αυτοί να έχουν γράψει κατά τρόπο αποδεικτικό και δεν μπορούσαν να δώσουν μια πρακτική κατασκευή που να μπορεί να χρησιμοποιηθεί, εκτός από τον Μέναιχμο, ως έναν μικρό βαθμό, και αυτό με δυσκολία.[9]

Εδώ, όπως και στη εκδοχή του Πλουτάρχου, οι γεωμέτρες εργάζονται κάτω από την εποπτεία του Πλάτωνα· ο Αρχύτας βρίσκει μια λύση, ο Εύδοξος μια άλλη. Ωστόσο υπάρχει μία σημαντική διαφοροποίηση: ο Ερατοσθένης θεωρεί τις λύσεις τους υπερβολικά θεωρητικές και ανεφάρμοστες ενώ ο Πλούταρχος τις παρουσιάζει ως υπέρμετρα μηχανικές και ελάχιστα θεωρητικές. Αυτού του είδους τη διαφοροποίηση την επικαλούνται ορισμένοι μελετητές για να αμφισβητήσουν την άποψη του Ευτοκίου ότι το κείμενο ανήκει στον Ερατοσθένη.[10] Θα εξετάσουμε αυτό το επιχείρημα παρακάτω. Προς το παρόν, αρκεί να επισημάνουμε ότι μπορούμε να συμβιβάσουμε τα εδάφια με έναν απλό τρόπο. Εδώ υπάρχουν δύο διαφορετικά κείμενα του Ερατοσθένη: το κείμενο για τον διπλασιασμό του κύβου και ο *Πλατωνικός*. Ο Πλούταρχος χρησιμοποιεί ως πηγή του το δεύτερο. Ο *Πλατωνικός* ήταν, κατά πάσα πιθανότητα, ένα μυθοπλαστικό κείμενο, και συνεπώς η έντονα επικριτική στάση που διατηρεί απέναντι στη μηχανική ενδέχεται να προέκυψε από την προσαρμογή από τον ίδιο τον Ερατοσθένη της άλλης, σαφώς πιο ιστορικής περιγραφής, όπου οι παλαιότερες λύσεις δεν είχαν κανένα εκπεφρασμένο μηχανικό στοιχείο.

Σχετικά με τη συγκριτική αξία των μηχανικών και των θεωρητικών στοιχείων στη γεωμετρία, αυτό που θα θέλαμε περισσότερο να ξέρουμε είναι η στάση των ίδιων των γεωμετρών. Το πόσο δύσκολο είναι να το κατανοήσουμε αυτό βασιζόμενοι στα αποσπάσματα που μόλις αναφέραμε είναι εμφανές, αφού, πριν διακρίνουμε τις μαθηματικές θέσεις που υποκρύπτουν, οφείλουμε να διαχωρίσουμε τα σχόλια του Πλουτάρχου, του Ερατοσθένη και των Πλατωνιστών του 4ου αιώνα. Το γεγονός ότι ο Πλάτων απέδιδε προεξάρχοντα ρόλο στις μαθηματικές σπουδές

9 *Archimedis Opera*, έκδ. J. L. Heiberg, III, σ. 90.
10 Ιδιαίτερα ο von Wilamowitz· βλ. Κεφ. 2.

στο γενικό φιλοσοφικό πρόγραμμά του, δεν τον νομιμοποιεί, αυτόν ή τους μαθητές του, ώστε να μιλά εξ ονόματος των τεχνικών ερευνητών σχετικά με τα θέματα που τους αφορούσαν. Όντως, αποσπάσματα σαν αυτά που παραθέσαμε από την *Πολιτεία* αφήνουν να εννοηθεί ότι ο Πλάτων και άλλοι φιλόσοφοι ενδέχεται να αποστασιοποιούνταν, ως εάν ήσαν *κριτικοί* του τεχνικού τομέα. Αλλά αν επιχειρήσουμε να συμπεράνουμε από κριτικές σαν αυτές ότι οι γεωμέτρες έδιναν έμφαση σε έναν τέτοιο πρακτικό προσανατολισμό των ερευνών τους, θα έρθουμε σε αντίθεση με τη μαρτυρία του Ερατοσθένη (αναφορικά με τον διπλασιασμό του κύβου) ότι οι πρώτες μελέτες είχαν καθαρώς θεωρητικό προσανατολισμό. Τα μαθηματικά κείμενα που διέσωσε ο Ευτόκιος σχετικά με τις μεθόδους του Αρχύτα και του Μεναίχμου επιβεβαιώνουν σε αυτό το σημείο τον Ερατοσθένη.[11] Ωστόσο, η λύση του ίδιου του Ερατοσθένη συνοδεύεται από μια λεπτομερή περιγραφή ενός φυσικού αντικειμένου, μιας συσκευής που κατασκευάστηκε με βάση δικό του σχέδιο, και αυτό το εμφανώς μηχανικό στοιχείο εντοπίζεται στις μεθόδους του Νικομήδη, του Διοκλή και άλλων που εργάστηκαν την ίδια περίπου εποχή (τέλη του 3ου αιώνα π.Χ.).[12] Είναι προφανές ότι κατά τη διάρκεια της αρχαιότητας υπήρχαν ποικίλες απόψεις σχετικά με την αξία των μηχανικών λύσεων, και μάλιστα σε ορισμένες περιπτώσεις ενδέχεται να οφείλονται απλώς σε προσωπικές προτιμήσεις. Αυτή η έλλειψη ομοφωνίας σχετικά με τις μεθοδολογικές δεσμεύσεις εμφανίζει τα αρχαία μαθηματικά να συμβαδίζουν με πρότυπα οικεία σε πιο πρόσφατες περιόδους της ιστορίας των μαθηματικών.[13]

---

11 *Archimedis Opera*, έκδ. J. L. Heiberg, III, σ. 78–88. Αυτά τα θέματα θα συζητηθούν στο Κεφ. 3.

12 Βλ. Κεφ. 6.

13 Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο ακόλουθος τολμηρός ισχυρισμός σχετικά με τον «πρακτικό σκοπό της γεωμετρικής έρευνας»:

> Η γραφική επίλυση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών αποτελεί κύριο στόχο της γεωμετρίας. Ακόμα και όταν αυτός ο στόχος μοιάζει σε κάποιο βαθμό να έχει παραμεληθεί λόγω της προόδου στη θεωρητική έρευνα, η καθοριστική επιρροή του είναι εύκολα διακριτή.

Ο ισχυρισμός διατυπώθηκε από τον ιταλό γεωμέτρη F. Enriques στο τελευταίο μιας ανθολογίας κειμένων του ιδίου και συνεργατών του σχετικά με προχωρημένα ερωτήματα που σχετίζονται με την στοι-

Αυτές οι σκέψεις αναδεικνύουν συνεπώς τρεις μείζονος σημασίας υποδείξεις σχετικά με την παρούσα μελέτη των προσπαθειών επίλυσης προβλημάτων κατά την αρχαιότητα. Πρώτον, οφείλουμε να επιχειρήσουμε να εξακριβώσουμε την απλή χρονολογική σειρά των διαφόρων λύσεων. Μόνο έτσι θα μπορέσει κανείς να αντιληφθεί, για την κάθε περίοδο, την περιπλοκότητα των προβλημάτων, των μεθόδων και των στόχων που έθεταν κάθε φορά τις κατευθυντήριες γραμμές της γεωμετρικής έρευνας. Με βάση αυτό, προσδοκούμε ότι θα μπορέσουμε να διακρίνουμε την εξέλιξη του χαρακτήρα της έρευνας σχετικά με την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων σε βάθος χρόνου. Κατά κανόνα, η επεξεργασία αυτών των στοιχείων διεξάγεται κατηγοριοποιώντας είτε τα προβλήματα είτε τις μεθόδους επίλυσης. Ήδη από την αρχαιότητα μπορούν να εντοπιστούν τέτοιες προσεγγίσεις, π.χ. στην επιτομή των λύσεων του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου που παρουσιάζει ο Ευτόκιος στα σχόλιά του στο *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* του Αρχιμήδη, στις ενότητες για τον διπλασιασμό του κύβου και την τριχοτόμηση της γωνίας που περιέχονται στα Βιβλία III και IV της *Συναγωγής* του Πάππου (και ενδεχομένως στην περιγραφή του τετραγωνισμού του κύκλου στα *Κηρία* του Σπόρου) και στις περιγραφές των ειδικών καμπυλών στις εγκυκλοπαίδειες του Μενελάου και του Γεμίνου.[14] Από τη σύγχρονη βιβλιογραφία, πρέπει

χειώδη γεωμετρία: *Questioni riguardanti la geometria elementare*, 2η έκδ. 1907. Εδώ χρησιμοποιήθηκε η δεύτερη γερμανική έκδοση, 1923, II, σ. 27.

Αντιθέτως, να τι έχει να πει ένας άλλος μαθηματικός σχετικά με τις μελέτες των αρχαίων για τις κωνικές τομές:

> Πιστεύω ότι κανένας δεν υλοποίησε πρακτικά αυτή την κατασκευή [της κυβικής ρίζας] μέσω κωνικών τομών, αλλά ότι ήταν ένα θεωρητικό μέσον —όπως είναι και για εμάς— ένα μέσον για την επέκταση της κατανόησης (*Erkenntnis*).

(Από το H. G. Zeuthen, «Die geometrische Construction als 'Existenzbeweis' in der antiken Geometrie», *Mathematishe Annalen* 47 (1896), σ. 222 κ.ε.· αυτό το δοκίμιο θα συζητηθεί περαιτέρω στο Κεφ. 8). Μπορεί κανείς να αναμένει ότι η ίδια διάσταση απόψεων σχετικά με τον αντίστοιχο ρόλο των πρακτικών κατασκευών και των θεωρητικών ερευνών θα συνεχίσει να χαρακτηρίζει τις σύγχρονες συζητήσεις σχετικά με τη φύση των μαθηματικών.

14 Ευτόκιος, στο *Archimedis Opera*, III, σ. 54–106. Πάππος, *Συναγωγή*,

κανείς να συμβουλευθεί το εκτεταμένο κεφάλαιο για τα «Ειδικά Προβλήματα» στο *History of Greek Mathematics* του T. L. Heath, τα λεπτομερή άρθρα σχετικά με τον διπλασιασμό του κύβου, τη διαίρεση γωνιών και τις κατασκευές με την μέθοδο της *νεύσεως* του R. Böker στην *Pauly Wissowa Real-Encyclopädie*, το εκτεταμένο άρθρο για τις αρχαίες μελέτες των καμπυλών και επιφανειών του P. Tannery και το ογκώδες συμπίλημα σχετικά με την ιστορία και τις ιδιότητες των επίπεδων καμπυλών του G. Loria.[15] Χωρίς να αμφισβητώ την τεράστια αξία αυτών των εργασιών, καθώς και πολλών άλλων που λόγω μεγέθους αδυνατώ να παραθέσω εδώ, πιστεύω ότι η αρχή με την οποία είναι οργανωμένες εμμέσως τις εντάσσει στη γενική θέση ότι οι αρχαίοι θεωρούσαν τη μελέτη αυτών των συγκεκριμένων καμπυλών ή αυτών των συγκεκριμένων προβλημάτων ως διακριτές υποκατηγορίες του κλάδου. Αυτό ενδεχομένως ισχύει για έναν εγκυκλοπαιδιστή όπως ήταν ο Γεμίνος, ή ακόμα και για σχολιαστές όπως ο Πάππος ή ο Ευτόκιος, αλλά όχι, κατά τη γνώμη μου, για τους αρχικούς ερευνητές, όπως ήταν ο Αρχιμήδης, ο Απολλώνιος και οι σύγχρονοί τους. Αντίθετα, αν υιοθετήσουμε ένα χρονολογικό μοντέλο, μπορούμε να αφήσουμε για αργότερα τη δέσμευσή μας να τοποθετηθούμε στο ερώτημα ποια ήταν η γνώμη των αρχαίων για τη σημασία αυτών των προβλημάτων και των διαφόρων τεχνικών επίλυσης, έτσι ώστε η απάντηση να προκύψει καθώς θα εξελίσσεται η μελέτη μας.

Όπως θα δούμε, τα «απλά» χρονολογικά ερωτήματα είναι, στην πραγματικότητα, συχνά, αρκετά δύσκολο να απαντηθούν.

έκδ. Hultsch, I, σ. 54–68, 270–284. Σχετικά με τον Μενέλαο, τον Γεμίνο και τον Σπόρο, βλ. T. L. Heath, *History of Greek Mathematics*, I, σ. 226, 229 κ.ε.· II, σ. 222–226, 260 κ.ε. Στη συνέχεια θα προτείνω και άλλες παραπομπές.

15 Heath, *History of Greek Mathematics*, Oxford, 1921, I, Κεφ. 7. Böker, «Winkel und Kreisteilung», *Pauly-Wissowa*, Ser. II, 9_A, 1961, στ. 127–150· «Wurfelverdoppelung», *ό.π.*, στ. 1193–1223· «*Neusis*», *Pauly-Wissowa*, Suppl. IX, 1962, στ. 415–461. Οι νεύσεις είναι γνωστές ως κατασκευές με «ολισθαίνοντα διαβαθμισμένο κανόνα»· βλ. Κεφ. 2, 5 και 6. Tannery, «Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité», *Bulletin des Sciences mathématiques* 18 (1883), 278–291 και 19 (1884), 19–30, 101–112. Loria, *Ebene Kurven: Theorie und Geschichte*, 2η έκδ., Leipzig, Berlin, 1910 (1η ιταλική έκδ. 1902· 2η ιταλική έκδ. 1909).

Ο περιορισμός των τριών «κλασικών» προβλημάτων είναι από μόνος του τεχνητός και δεν θα τον ακολουθήσουμε αυστηρά. Το προφανές του πλεονέκτημα έγκειται στην ευρύτατη τεκμηρίωση αυτών των τριών προβλημάτων στις πηγές, η οποία εκτείνεται, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, σε όλες τις βασικές περιόδους της αρχαίας γεωμετρίας. Αυτό εγείρει το ερώτημα γιατί αυτά τα τρία προβλήματα συνέχισαν να ελκύουν την προσοχή, ακόμα και μετά την επεξεργασία αρκετών μεθόδων επίλυσης. Ένα σημαντικό κλειδί για να απαντήσουμε αυτό το ερώτημα βρίσκεται στις αλλαγές που επηρέασαν τον ευρύτερο τομέα της έρευνας από τη μία ιστορική περίοδο στην άλλη. Καθώς εισάγονταν νέες τεχνικές, ήταν φυσικό να ανακύψει το ερώτημα της δυνατότητας εφαρμογής τους σε παλαιότερα προβλήματα. Για παράδειγμα, μια ειδική καμπύλη που είχε δημιουργηθεί στο πλαίσιο μιας μεθόδου για την τριχοτόμηση της γωνίας, ενδέχεται να διαπιστωνόταν ότι διαθέτει ιδιότητες που σχετίζονται και με μια εναλλακτική λύση του διπλασιασμού του κύβου.[16] Είναι φανερό λοιπόν ότι δεν είναι δυνατόν να κατανοήσουμε ορθά τις προσεγγίσεις που υιοθετούνταν στις περιπτώσεις των συγκεκριμένων προβλημάτων χωρίς μια πλήρη επισκόπηση του γενικότερου πλαισίου έρευνας. Αυτό ωστόσο δεν αποτελεί πρόσθετη δυσκολία αλλά μάλλον μια καλή ευκαιρία, αφού η διαθέσιμη τεκμηρίωση σχετικά με τις πιο προχωρημένες έρευνες σε διάφορες περιόδους είναι συχνά εξαιρετικά ελλιπής. Μπορούμε συνεπώς να αντιμετωπίσουμε τα ειδικά προβλήματα ως ένα στιγμιότυπο που είναι σε θέση να βοηθήσει στη συμπλήρωση της ευρύτερης εικόνας. Αυτή η διερεύνηση θα καλύψει τα επόμενα έξι κεφάλαια της παρούσας μελέτης (Κεφάλαια 2–7) που θα μας μεταφέρουν από την Προευκλείδεια περίοδο, διά μέσου των γενεών του Ευκλείδη και του Αρχιμήδη, στην εποχή του Απολλωνίου.

Μια δεύτερη υπόδειξη είναι να ασχοληθούμε ιδιαίτερα με ορισμένα σημαντικά μεταμαθηματικά ζητήματα: Πώς κατηγοριοποιούσαν οι αρχαίοι τον κλάδο της γεωμετρίας ανάλογα με τους τύπους των προβλημάτων και τις μεθόδους επίλυσης; Ποιος θεωρούσαν ότι ήταν ο ειδικός ρόλος των προβλημάτων, ειδικά σε σχέση με αυτόν των θεωρημάτων, και πώς τα συνέδεαν με τις σημαντικές μεθόδους της ανάλυσης και της σύνθεσης; Τι

---

16 Πρβλ. την ανάλυση της κογχοειδούς του Νικομήδη, Κεφ. 6.

προϋποθέσεις έθεταν ώστε να είναι αποδεκτές οι τεχνικές επίλυσης προβλημάτων και, σε σχέση με αυτό, θεωρούσαν ότι οι λύσεις που είχαν βρεθεί για τα τρία ειδικά προβλήματα ήταν ικανοποιητικές; Όλες σχεδόν οι ιστορικές αναφορές για αυτά τα θέματα υποθέτουν ότι οι αρχαίοι είχαν από πολύ νωρίς διακρίνει τις κατασκευές με κανόνα και διαβήτη από όλες τις άλλες, και ότι διαρκώς επέμεναν στην δονκιχωτική αναζήτηση λύσεων αυτού του τύπου για τα τρία ειδικά προβλήματα.[17] Όπως γνωρίζουμε σήμερα, μέσω αποτελεσμάτων που προέκυψαν από εργασίες του 19ου αιώνα, οι αρχαίοι δεν ήταν σε θέση ούτε να πραγματοποιήσουν τέτοιου είδους λύσεις, αλλά ούτε καν να αποδείξουν, παρά μόνο μέσω επαναλαμβανόμενων αποτυχιών, ότι τέτοιες λύσεις δεν είναι εφικτές. Και αυτό διότι το παραπάνω είναι κατ' ουσίαν ένα καθαρά αλγεβρικό θέμα, που δεν είναι δυνατόν να αντιμετωπιστεί με τις γεωμετρικές μεθόδους των αρχαίων.[18] Πιστεύω, ωστόσο, ότι δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι αρχαίες θεωρήσεις σχετικά με αυτά τα μεταμαθηματικά προβλήματα ταυτίζονται με αυτές των σύγχρονων μαθηματικών. Ούτε μπορούμε ακόμα να υποθέσουμε ότι, έστω και αν κάποιοι γεωμέτρες, κάποια στιγμή, διατύπωσαν απόψεις παρόμοιες με τις δικές μας,

17 Πρβλ. τη συζήτηση του Heath στο *History*, I, σ. 218–220. Μια σημαντική εξαίρεση σε αυτήν την τάση είναι η εκτενής μελέτη του A. D. Steele, «Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik», *Quellen und Studien* 3 (1936), σ. 287–369. Ο Steele συνδυάζει μια προσεκτική εξέταση των αρχαίων πηγών με μια σωστή σύλληψη της σύγχρονης αλγεβρικής θεώρησης αυτών των προβλημάτων για να υποστηρίξει πειστικά ότι ο περιορισμός στον κανόνα και τον διαβήτη σπάνια ήταν μια ευθέως διατυπωμένη συνθήκη κατά τη μελέτη των γεωμετρικών προβλημάτων από τους αρχαίους (πρβλ. Κεφ. 8).

18 Για μια ανάλυση της δυνατότητας αναγωγής των προβλημάτων τρίτου βαθμού, μαζί με μια λεπτομερή επισκόπηση των μεθόδων διπλασιασμού του κύβου μπορούμε να ανατρέξουμε στο άρθρο του A. Conti στο βιβλίο F. Enriques, *Fragen der Elementargeometrie*, II (που αναφέρθηκε στην υποσ. 15 πιο πάνω). Για μια ανάλυση της υπερβατικότητας του π, μαζί με το ιστορικό πλαίσιο, μπορούμε να συμβουλευτούμε, στο ίδιο βιβλίο, τη μελέτη του B. Calo. Στην ανθολογία *Monographs on Topics of Modern Mathematics*, επιμ. J. W. A. Young, 1911 (Dover, ανατύπ., 1955) υπάρχει ένα άρθρο με τίτλο «Constructions with ruler and compass» του L. E. Dickson, και ένα άλλο με τίτλο «History and transcendence of π» του D. E. Smith.

και όλοι οι υπόλοιποι γεωμέτρες, σε όλες τις εποχές, τις υιοθέτησαν κατ' ανάγκην. Αναμφίβολα, στόχος μας είναι να ανακαλύψουμε ποιες ήταν οι αρχαίες απόψεις, μέσω μιας θεώρησης των αντίστοιχων ιστορικών τεκμηρίων. Αυτό το πραγματεύεται το Κεφάλαιο 8. Ωστόσο, όπως αφήνει να εννοηθεί η εξέταση των αποσπασμάτων του Πλουτάρχου σχετικά με τον διπλασιασμό του κύβου, η αναζήτηση απαντήσεων δεν μπορεί να είναι ξεκάθαρη. Τα περισσότερα εδάφια που μπορούμε να συμβουλευθούμε προέρχονται από μεταγενέστερους συγγραφείς, των οποίων το κύριο ενδιαφέρον έγκειται στην ερμηνεία των μεθοδολογικών παρατηρήσεων που διατύπωσαν φιλόσοφοι και ιδιαίτερα ο Πλάτων και ο Αριστοτέλης. Για παράδειγμα, το νεοπλατωνικό στοιχείο είναι κυρίαρχο στον σημαντικό σχολιασμό του Πρόκλου στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη (5ος αιώνας μ.Χ.), ενώ ένα μεγάλο μέρος των τεκμηρίων μας προέρχεται από ερμηνείες συγκεκριμένων εδαφίων του Αριστοτέλη από τον Αλέξανδρο τον Αφροδισιέα, τον Θεμίστιο, τον Φιλόπονο, τον Σιμπλίκιο και άλλους. Υπενθυμίζουμε ότι τα αποσπάσματα του Πλουτάρχου πηγάζουν από τις αναλύσεις του για τον Πλάτωνα, και το ίδιο ισχύει για την κύρια πηγή του, τον Ερατοσθένη. Ακόμα και με συγγραφείς που θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι είναι πλησιέστεροι στην τρέχουσα μαθηματική παράδοση, όπως είναι ο Πάππος, μπορεί κανείς εύκολα να ανιχνεύσει την επίδραση συγκεκριμένων φιλοσοφικών επιλογών στις μαθηματικές τους θεωρήσεις.

Αυτή η διάσταση του έργου των σχολιαστών μας βοηθά να κατανοήσουμε την έμφαση που δίνεται συχνά, αλλά κατά τη γνώμη μου λανθασμένα, στις αναλύσεις σχετικά με την αρχαία γεωμετρία. Είναι συνηθισμένο να προϋποθέτει κανείς ότι μια αποτελεσματική κινητήρια δύναμη πίσω από τις προσπάθειες των γεωμετρών ήταν οι μεταμαθηματικοί προβληματισμοί. Για παράδειγμα, ότι το κύριο χαρακτηριστικό της παράδοσης ήταν η οργάνωση των γεωμετρικών ευρημάτων σε συνεκτικές δομές παραγωγικού συλλογισμού, ως εάν η κύρια φιλοδοξία των γεωμετρών να ήταν η παραγωγή πραγματειών σαν τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη ή τα *Κωνικά* του Απολλωνίου. Ωστόσο αυτό αποκλείεται να είναι ορθό. Η συγγραφή εγχειριδίων είναι το *τέλος* της μαθηματικής έρευνας μόνο με την έννοια που ο θάνατος είναι το τέλος της ζωής: είναι ο τελευταίος όρος μιας ακολουθίας, αλλά όχι το στοιχείο εκείνο που εξηγεί ποιο είναι το κίνητρο ένεκα του οποίου κάποιος εμπλέκεται σε μια δραστηριότητα που τον οδηγεί να πραγματοποιεί, ένα προς ένα, τα βήματα αυτής της ακολουθίας.[19] Όσον αφορά στους αρχαίους γεωμέτρες, οι στόχοι που κινητοποιούν τη δραστηριότητά τους είναι στις περισσότερες περιπτώσεις αντικείμενο εικασίας. Εν γένει, θεωρώ πολύ πιο πειστική την «εσωτερικιστική» θέση ότι η τεχνική έρευνα στοχεύει στη λύση προβλημάτων που έχουν ανακύψει από προηγούμενες ή εν εξελίξει ερευνητικές προσπάθειες. Στην ουσία, η διατύπωση προβλημάτων διατηρεί ένα πεδίο ζωντανό, καθοδηγώντας τη συνέχεια της έρευνας. Αναμφίβολα, ο στόχος της διαμόρφωσης πιο αυστηρών αποδείξεων για ήδη γνωστά αποτελέσματα μπορεί να προκαλέσει μια μορφή έρευνας — το χαρακτηριστικότερο σχετικό αρχαίο παράδειγμα είναι η μαθηματική έμπνευση του Ευδόξου επί της οποίας θεμελιώθηκαν οι τυπικές θεωρίες της αναλογίας και των ορίων.[20] Ωστόσο, με εξαίρεση την περίπτωση του Ευδόξου, το πλαίσιο των μαθηματικών εμπνεύσεων των αρχαίων γεωμετρών που παρουσιάζουν ενδιαφέρον δεν έγκειται σε τέτοιου είδους τυπικά θέματα, αλλά στη μελέτη προβλημάτων. Από αυτή την άποψη, πιστεύω ότι μια διαίσθηση βασισμένη στην πιο πρόσφατη περίοδο της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να είναι παραπλανητική, αφού οι μεταμαθηματικές έρευνες έχουν αποκρυσταλλωθεί σε έναν ξεχωριστό κλάδο, τη μελέτη των θεμελίων, που απαιτεί μια ιδιαίτερη μαθηματική εξειδίκευση. Αυτό όμως δεν έλαβε χώρα κατά την αρχαιότητα. Αν, για παράδειγμα, το παραγωγικό πρόγραμμα που υλοποιείται στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη προϋποθέτει εκλεπτυσμένα θέματα αξιωματοποίησης, οι αρχαίοι φαίνεται ότι ήταν απόλυτα ικανοποιημένοι με τη διατύπωση του Ευκλείδη και με την αριστοτελική θεωρία με την οποία μερικώς συνδέεται, αφού και τα δύο αποτέλεσαν αντικείμενο μεταγενέστερων συζητήσεων σχετικά με τα προβλήματα θεμελίωσης.[21]

---

19 Το λογοπαίγνιο είναι εφικτό στα Ελληνικά, όπου η λέξη «τέλος» και τα παράγωγά της μπορούν να ερμηνευθούν ως «τέλος», «τελικό αποτέλεσμα» και ως «σκοπός»· πρβλ. Αριστοτέλης, *Φυσικά*, ΙΙ, 2, 194a30.

20 Για τον Εύδοξο, βλ. Κεφ. 3.

21 Το αρχαίο πεδίο της φιλοσοφίας των μαθηματικών είναι πολύ πιο πλούσιο από ό,τι αφήνει να εννοηθεί η δήλωσή μου. Ωστόσο η μελέτη του φαίνεται να απασχόλησε πρωτίστως τους φιλοσόφους, οι οποίοι ενδιαφέρονταν να εντάξουν μαθηματικά ερωτήματα στο πλαίσιο

Η τρίτη υπόδειξη είναι να αντιμετωπίσουμε τα κειμενικά προβλήματα που προκύπτουν από τη χρήση των γραπτών των συγγραφέων της Ύστερης Αρχαιότητας. Οι εκδοτικές τους προσπάθειες διέσωσαν τα περισσότερα από όσα διαθέτουμε σήμερα σχετικά με την αρχαία γεωμετρική παράδοση. Σε ορισμένες περιπτώσεις, δημιούργησαν τις εκδόσεις των πραγματειών των μεγάλων γεωμετρών, όπως είναι ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης και ο Απολλώνιος, που έχουμε σήμερα. Σε κάποιες άλλες, συγκέντρωσαν επιλεγμένα γεωμετρικά αποτελέσματα από έργα που πλέον έχουν χαθεί. Είναι, συνεπώς, εξαιρετικά σημαντικό για μας να αποκτήσουμε μια αίσθηση του πώς διαχειρίστηκαν τα κείμενα αυτοί οι συγγραφείς. Πού βρήκαν τα κείμενα τα οποία αναπαρήγαγαν; Τι αλλαγές επέφεραν; Ποιος ήταν ο στόχος τους όταν επέλεγαν και παρουσίαζαν αυτά τα κείμενα; Από αυτήν την άποψη, τα κείμενα που σχετίζονται με τα τρία συγκεκριμένα προβλήματα, και ειδικότερα με αυτό του διπλασιασμού του κύβου, μας παρέχουν ένα ιδανικό εργαλείο, αφού σώζονται σε πολλαπλές εκδοχές και από περισσότερους του ενός συγγραφείς. Είναι εντυπωσιακό το πόσο λίγα έχουν επιχειρηθεί μέχρι σήμερα σε αυτή την κατεύθυνση. Ακόμα και διαπρεπείς μελετητές, όπως ο J. L. Heiberg και ο P. Tannery, οι οποίοι ασχολήθηκαν ιδιαίτερα με τα φιλολογικά προβλήματα, δεν διερεύνησαν ερωτήματα που η σύγκριση όλων αυτών των κειμένων θα μπορούσε να διαλευκάνει. Φαίνεται ότι οι ύστεροι συγγραφείς δεν παρουσίαζαν, κατ' αυτούς, κανένα εγγενές ενδιαφέρον και, έτσι, μόλις κάποιο από τα διάφορα σχετικά κείμενα γινόταν δεκτό ως «το καλύτερο», τα υπόλοιπα μπορούσαν να αγνοηθούν.[22] Σε μια συνέχεια του παρόντος τόμου θα γίνει προ-

των δικών τους φιλοσοφικών απόψεων, όπως είναι ο Πλατωνισμός, ο Επικουρισμός και ο Σκεπτικισμός. Η συμμετοχή των μαθηματικών σε αυτό το πεδίο φαίνεται ότι υπήρξε μικρή και, αντιστρόφως, η επιρροή του στις δικές τους έρευνες ακόμα μικρότερη. Αυτό το αρχαίο φιλοσοφικό πεδίο υπήρξε αντικείμενο πρόσφατων δημοσιεύσεων καθώς και μιας μονογραφίας που βρίσκεται σε εξέλιξη, του I. Mueller. (Σ.τ.Ε.: ο συγγραφέας αναφέρεται στο βιβλίο *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Cambridge, Mass., London: The MIT Press, 1981.)

22 Έχουμε ήδη αναφερθεί σε μια περίπτωση όπου τηρήθηκε αυτή η στάση στην επεξεργασία των δύο εκδοχών της ιστορίας του Δηλίου προβλήματος που σώζονται από τον Ερατοσθένη.

σπάθεια να αναδειχθούν οι συσχετίσεις μεταξύ των διασωθέντων κειμένων που παραδίδουν αυτές τις λύσεις. Μπορεί κάποιος να εικάσει με ασφάλεια ότι αυτοί οι συγγραφείς δεν είχαν ιδιαίτερα πρωτότυπες μαθηματικές συνεισφορές. Όμως ο βαθμός κατά τον οποίο εξαρτώνται από τις πηγές, όχι μόνο όσον αφορά στις μαθηματικές τεχνικές και τα αποτελέσματα αλλά ακόμα και στη φραστική διατύπωση των κειμένων που παρουσιάζουν, πιστεύω ότι θα προκαλέσει έκπληξη ακόμα και σε αυτούς που έχουν μελετήσει την αρχαία γεωμετρία. Αυτή η εξάρτηση ισχύει τόσο για τον Πάππο —παρά την ποικιλομορφία και το υψηλό επίπεδο των περιεχομένων της *Συναγωγής* του— όσο και για τους άλλους σχολιαστές. Επιπλέον θα δούμε ότι το υπόδειγμα των κειμενικών μεθόδων μεταβιβάζεται και στους άραβες συγγραφείς του 9ου και 10ου αιώνα μ.Χ. Η ανάλυση αρκετών κειμένων αράβων συγγραφέων σχετικά με την τριχοτόμηση της γωνίας και τον διπλασιασμό του κύβου, σε σύγκριση με επιλεγμένα κείμενα από την παλαιότερη ελληνική παράδοση, θα αποτελέσει μέρος του επομένου τόμου και των παραρτημάτων του. Εκεί, θα επιχειρήσω να δείξω ότι πολλά από αυτά τα αραβικά κείμενα προέκυψαν ως μεταφράσεις ή, τουλάχιστον, ως πιστές παραφράσεις, αντίστοιχων ελληνικών, ακόμα και στην περίπτωση που θα μπορούσε κανείς να υποθέσει ότι πρόκειται για πρωτότυπα αραβικά κείμενα ή για αναθεωρημένες εκδοχές αραβικών πρωτοτύπων. Κατά συνέπεια, ο δευτερογενής χαρακτήρας τόσο αυτού του τμήματος της αραβικής μαθηματικής παράδοσης, όσο και της ελληνικής παράδοσης της έκδοσης κειμένων που αναπτύχθηκε κατά την Ελληνορωμαϊκή και τη Βυζαντινή περίοδο, όχι μόνο γίνεται σαφής, αλλά υποβάλλει την ιδέα ότι ενδεχομένως υπάρχει κάποια δυνατότητα αξιοποίησής του με νέους τρόπους, προκειμένου να μπορέσουμε να διεισδύσουμε βαθύτερα στις πρότερες, δημιουργικές φάσεις της ελληνικής γεωμετρίας. Αυτός ο τελευταίος στόχος, φυσικά, υπερβαίνει τους σκοπούς του παρόντος πονήματος.

Σε αυτή την επισκόπηση των αρχαίων προσπαθειών επίλυσης προβλημάτων τα θέματα κειμενικής τεκμηρίωσης θα μας απασχολήσουν κυρίως στο Κεφάλαιο 8 καθώς και στον τόμο που θα αποτελέσει συνέχεια του παρόντος. Στα υπόλοιπα κεφάλαια του παρόντος έργου το κύριο εργαλείο για την αποκάλυψη ιστορικών συσχετίσεων θα μας το παράσχουν τα ουσιώδη μαθηματικά χαρακτηριστικά των διαφόρων τεχνικών μεθόδων. Μια δυσκολία που εμφανίζεται σε αυτό το σημείο έγκειται στο ότι οι αρχαίοι συγγραφείς —ειδικότερα αυτοί που ανήκουν στην ύστερη παράδοση της έκδοσης των κειμένων— προτιμούσαν, τον συνθετικό τρόπο παρουσίασης στις τυπικές γεωμετρικές πραγματείες. Αυτό σημαίνει ότι κάποιος καταλήγει σε έναν ισχυρισμό (π.χ. ένα θεώρημα ή μια κατασκευή) ως αποτέλεσμα μιας παραγωγικής αλυσίδας συλλογισμών που εκκινεί από τις δεδομένες προϋποθέσεις του θεωρήματος και δεν χρησιμοποιεί παρά μόνο αξιώματα και πρώτες αρχές ή άλλα θεωρήματα και κατασκευές που έχουν ήδη αποδειχθεί. Πράγματι, οι μαθηματικοί του 17ου αιώνα (αλλά ακόμα και μερικοί από τους αρχαίους) πίστευαν ακράδαντα ότι αυτή η μορφή συγκάλυπτε τη θεμελιώδη γραμμή σκέψης, ειδικότερα στις περιπτώσεις των πιο περίπλοκων συμπερασμάτων.[23] Όμως, όποτε το ζητούμενο ήταν η ανακάλυψη λύσεων σε γεωμετρικά προβλήματα, οι αρχαίοι χρησιμοποιούσαν μια εναλλακτική μέθοδο: την «ανάλυση». Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός προβλήματος κατασκευής υποθέτουμε ότι το ζητούμενο σχήμα έχει ήδη κατασκευαστεί και, στη συνέχεια, συνάγουμε τις ιδιότητες του σχήματος μέχρι να προκύψει κάποιο στοιχείο που, από προηγούμενα συμπεράσματα, είναι γνωστό ότι είναι κατασκευάσιμο. Στη συνέχεια, η τυπική «σύνθεση» εκκινεί από αυτά τα κατασκευάσιμα αντικείμενα και, ακολουθώντας μια σειρά από παραγωγικά βήματα που είναι περίπου τα αντίστροφα της ανάλυσης, φτάνει στην ολοκλήρωση της ζητούμενης κατασκευής. Η αναλυτική μέθοδος μπορεί να αποδώσει καρπούς ακόμη και στις περιπτώσεις όπου η λύση του προβλήματος δεν είναι ακόμα γνωστή. Έτσι, αυτή η μέθοδος είναι απολύτως ενδεδειγμένη για τις ανάγκες της γεωμετρικής έρευνας. Αν οι αρχαίοι ακολούθησαν σε κάποιες περιπτώσεις αυτήν την αναλυτική μέθοδο ακόμα και σε παρουσιάσεις γνωστών λύσεων, αυτό οφείλεται αναμφίβολα

23 Βλ. για παράδειγμα τα σχόλια του Κάρπου σχετικά με τη φύση των γεωμετρικών προβλημάτων, που παρατίθενται στο Κεφ. 8. Η δυσαρέσκεια για το αρχαίο τυπικό στιλ παρουσίασης οδήγησε αρκετούς γεωμέτρες του 17ου αιώνα να επανεξετάσουν τα θέματα της μεθόδου και του συμβολισμού· βλ., ειδικότερα, τη *Géométrie* (*La Geometrie*) του Descartes. Έτσι, η μέθοδος της ανάλυσης χρησίμευσε ώστε να δοθεί το ερέθισμα για την ανάπτυξη νέων, αλγεβρικών προσεγγίσεων στη γεωμετρία· πρβλ. τη μελέτη του M. S. Mahoney, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat*, Princeton, NJ, 1973, Κεφ. II.1, III, V.

στην επιθυμία να εξοικειωθούν οι μαθητευόμενοι στη χρήση της μεθόδου, εν όψει μεταγενέστερων δικών τους ερευνών. Επιπλέον, βοηθάει και στην εξήγηση του προβλήματος, αφού η ανάλυση εκθέτει με φυσικό και επαρκώς δικαιολογημένο τρόπο τη σκέψη που βρίσκεται πίσω από κάθε κατασκευαστικό βήμα. Αντίθετα, όταν παρατίθεται μόνο η σύνθεση, τα διάφορα βήματα φαντάζουν συχνά αυθαίρετα και το κίνητρό τους αποκαλύπτεται πολύ αργότερα, στη διαδικασία της απόδειξης. Ως εκ τούτου, στις περιγραφές μου θα προτιμήσω τις αναλυτικές παρουσιάσεις αντί για τις συνθετικές. Στις περιπτώσεις όπου διασώζεται μόνο η σύνθεση, θα επιχειρήσω να ανασυνθέσω την αντίστοιχη ανάλυση. Με δεδομένο τον στενό παραλληλισμό αυτών των δύο μερών της πραγμάτευσης των προβλημάτων, μπορεί κανείς να ανασυνθέσει αυτές τις αναλύσεις σχεδόν με απόλυτη ακρίβεια. Περαιτέρω, με αυτόν τον τρόπο είναι συχνά κανείς σε θέση να διακρίνει τον λόγο ύπαρξης ορισμένων κατά τα άλλα αινιγματικών στοιχείων στις σωζόμενες συνθέσεις. Παρόλα αυτά, ο αναγνώστης θα πρέπει να γνωρίζει ότι στην παρουσίαση που ακολουθεί όλο αυτό αποτελεί ερμηνεία. Πρόθεσή μου δεν είναι να παραφράσω ή να αναπαράγω με οποιονδήποτε άλλο τρόπο κάτι που ήδη υπάρχει στην πρωτογενή βιβλιογραφία, αλλά να φέρω στο προσκήνιο την κεντρική, συνήθως απλή, γεωμετρική ιδέα που βρίσκεται πίσω από κάθε αποτέλεσμα και, έτσι, να παράσχω την κατάλληλη εισαγωγή για την περαιτέρω διερεύνηση αυτής της βιβλιογραφίας.

Ορισμένοι όροι που επιδέχονται πολλαπλών ερμηνειών στην καθημερινή τους χρήση είναι τόσο σημαντικοί στη μελέτη της αρχαίας γεωμετρίας που δεν θα τολμούσα να τους χρησιμοποιήσω με άλλη έννοια πέρα από την αυστηρά μαθηματική. Αυτό, για παράδειγμα, ισχύει για τους όρους «ανάλυση» και «σύνθεση», οι οποίοι εδώ θα σημαίνουν μόνο τις ειδικές γεωμετρικές μεθόδους που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Ομοίως, ο όρος «πρόβλημα» θα αναφέρεται αποκλειστικά στη γεωμετρική μορφή ενός προβλήματος, δηλαδή σε έναν τύπο προτάσεως που ζητεί την κατασκευή ενός σχήματος που ικανοποιεί ορισμένες συγκεκριμένες συνθήκες ή τον προσδιορισμό ορισμένων ιδιοτήτων ενός καθορισμένου σχήματος. Σε καμία περίπτωση δεν θα χρησιμοποιηθεί ως συνώνυμος της λέξης «δυσκολία», αφού, στην πραγματικότητα, ένα γεωμετρικό πρόβλημα δεν είναι απαραίτητα δύσκολο. Η ουσία της λέξης «πρόβλημα» έγκειται στο ότι πρόκειται για κάτι προτεινόμενο (από το «προβάλλω» = *βάλλω τι ἐνώπιον τινός*). Πρόκειται, δηλαδή, για την απαίτηση να γίνει κάτι που δεν έχει γίνει ακόμα ή να ανακαλυφθεί κάτι το οποίο δεν είναι γνωστό. Ένας άλλος τέτοιος όρος είναι το ρήμα «αποδεικνύω» (prove/demonstrate), μαζί με το ομόρριζο ουσιαστικό «απόδειξη» (proof/demonstration).

Στην παρούσα μελέτη, αυτές οι λέξεις θα αναφέρονται αποκλειστικά στις παραγωγικές μορφές συλλογισμού που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά και στη λογική. Θα αποφύγω τη χρήση τους σε μεταμαθηματικό ή ιστορικό πλαίσιο, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν πιο ευπροσάρμοστοι όροι όπως «δείχνω», «φανερώνω», «καθιστώ προφανές», κ.λπ. Ο σοβαρός μελετητής των αρχαίων μαθηματικών γνωρίζει καλά ότι οι εικασίες και οι υποθέσεις αποτελούν κατ' ανάγκη σημαντική συνιστώσα. Σχεδόν όλα τα ενδιαφέροντα ερωτήματα που θα θέλαμε να διερευνήσουμε δεν επιδέχονται οριστικές απαντήσεις και το ίδιο ισχύει ακόμα και στην περίπτωση πολλών εντελώς τετριμμένων θεμάτων. Για παράδειγμα, είναι βέβαιο ότι ο Απολλώνιος έγραψε τα *Κωνικά*. Το ερώτημα, όμως, πόσο μέρος του σωζόμενου κειμένου οφείλεται στον ίδιο τον Απολλώνιο και όχι στον εκδότη του, τον Ευτόκιο, δεν έχει ακόμα τύχει της δέουσας προσοχής. Με αυτό κατά νουν, οι ισχυρισμοί σχετικά με αυτά τα θέματα οφείλουν να γίνονται πάντοτε δεκτοί ως μέρος ενός πλέγματος δυνατοτήτων και πιθανοτήτων. Φράσεις όπως «βλέπει λοιπόν κανείς ...» σηματοδοτούν έναν ισχυρισμό με υψηλό βαθμό πιθανότητας, ενώ το «ενδέχεται να ...» υποκρύπτει έναν ισχυρισμό που έχει χαμηλή πιθανότητα να ισχύει. Μια παραξενιά της γλώσσας μας είναι ότι λέξεις που υποδεικνύουν ενίσχυση της βεβαιότητας, όπως το «ασφαλώς», «βεβαίως», «αναμφίβολα» στην ουσία υπαινίσσονται το αντίθετο της βεβαιότητας, σηματοδοτώντας μια κατάσταση στην οποία *μπορούν* να εγείρονται αμφιβολίες. Αν και έχουν μεγάλη πειστική ισχύ, τουλάχιστον θα πληροφορούν τον αναγνώστη για τη φύση των δικών μου πνευματικών δεσμεύσεων απέναντι στους ισχυρισμούς μου. Αν σε κάποιες περιπτώσεις υποπέσω στην απρόσεκτη χρήση της οριστικής εγκλίσεως, ο αναγνώστης πρέπει να είναι προσεκτικός να εισφέρει ο ίδιος τις αναγκαίες επιφυλάξεις.

Σχετικά με την ερμηνευτική μου μέθοδο, υιοθετώ, έστω και ατελώς, τρεις απλές ιδέες: (α) να λαμβάνω υπόψη μου όλα τα διαθέσιμα στοιχεία σχετικά με ένα δεδομένο ερώτημα· (β) να αποδέχομαι, μεταξύ όλων των δυνατών εναλλακτικών εκδοχών, εκείνη την άποψη που εναρμονίζεται κατά τον καλύτερο τρόπο με τον γενικό χαρακτήρα της αρχαίας γεωμετρικής παράδοσης και με την πλέον απλή και σαφή αντίληψη του εν προκειμένω μαθηματικού κλάδου συγκριτικά με άλλους κλάδους· και (γ) να προτιμώ, μεταξύ όλων των δυνατών εναλλακτικών θεωρήσεων, εκείνη που προσδίδει μεγαλύτερη αξία στα διαθέσιμα τεκμήρια. Η εφαρμογή αυτών των αρχών, μπορεί συχνά να είναι ιδιαίτερα λεπτό θέμα. Στην περίπτωση της πρώτης αρχής, εάν έχουμε στη διάθεσή μας ένα και μόνο κείμενο δεν είμαστε υποχρεωμένοι να πιστέψουμε αυτά που λέει. Αν συμβαίνει δύο σχολιαστές να διαφωνούν πάνω σε ένα σημείο, οφείλουμε φυσικά να προσπαθήσουμε να διαπιστώσουμε ποιος από τους δύο έχει δίκιο (αν όντως κάποιος έχει δίκιο) και να εξηγήσουμε για ποιο λόγο υπάρχει η διάσταση απόψεων. Με την ίδια λογική, αν είναι διαθέσιμη η γνώμη μόνο ενός σχολιαστή, δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι είναι ορθή. Εδώ, η δεύτερη αρχή μας βοηθά να εξακριβώσουμε αν μια μαρτυρία είναι αμφιλεγόμενη. Αν, για παράδειγμα, ο Πάππος ισχυρίζεται κάτι για τη γεωμετρία που είναι σε ευθεία αντίθεση με όσα βρίσκουμε στην ίδια την τεχνική γραμματεία, φυσικά και δεν θα υποθέσουμε την ύπαρξη κάποιου χαμένου σώματος κειμένων τα οποία θα καθιστούσαν την άποψή του ορθή. Αντίθετα, θα αναγνωρίζαμε το σφάλμα του και θα επιχειρούσαμε να κατανοήσουμε γιατί το διέπραξε.[24] Μπορεί κανείς να ελπίζει ότι θα αποκτήσει σταδιακά μια αίσθηση της έμφυτης αξιοπιστίας των διαφόρων αυθεντιών στα ποικίλα τους συμφραζόμενα. Γρήγορα μαθαίνει κανείς, για παράδειγμα, ότι ο Αρχιμήδης δεν διαπράττει τεχνικά σφάλματα και ότι οποιαδήποτε παραδοχή εκ μέρους μας περί του αντιθέτου θα ήταν απλώς υπερβολική.

Η δεύτερη αρχή χρησιμεύει για να εισαγάγει μια παραδοχή οικονομίας στις ερμηνείες. Είναι φυσικά δυνατό η αρχαία μαθηματική σκέψη να διαφέρει θεμελιωδώς και κατά εντυπωσιακό τρόπο από αυτήν άλλων περιόδων. Πιστεύω ωστόσο ότι πρέπει να οδηγούμαστε σε τέτοιου είδους συμπεράσματα μόνο αν είμαστε υποχρεωμένοι να το πράξουμε, και να μην τα υιοθετούμε επιπόλαια ή ακόμα και από συνήθεια. Θεωρώ, για παράδειγμα, ότι η τεχνική δραστηριότητα της επίλυσης προβλημάτων στα

24 Αυτό το παράδειγμα δεν είναι υποθετικό· πρβλ. Κεφ. 8.

μαθηματικά, αλλά και σε άλλους κλάδους, δεν είναι ποτέ ιδιαίτερα ευαίσθητη σε εξωτερικούς παράγοντες — όπως είναι η άποψη της μιας ή της άλλης φιλοσοφικής σχολής. Βεβαίως, η διαχωριστική γραμμή είναι συχνά δύσκολο να χαραχθεί με ακρίβεια και κάτι που αρχικά αποτελεί εξωτερική θεώρηση μπορεί σε ορισμένες περιπτώσεις να εξελιχθεί, μέσω περίπλοκων διαδικασιών, σε μέρος των εσωτερικών συνθηκών της ερευνητικής δραστηριότητας. Δεν μπορώ όμως να φανταστώ τους αρχαίους γεωμέτρες να κοιτάζουν μόνιμα πίσω από την πλάτη τους. Είναι αναμφίβολα παράλογο να θεωρούμε ότι η πλατωνική αντίληψη περί της τελειότητας των κύκλων ήταν αυτή που ανάγκασε τους μαθηματικούς να περιορίσουν τις τεχνικές επίλυσης στη χρήση του διαβήτη ή, ακόμη, ότι τα παράδοξα του Ζήνωνα σχετικά με την κίνηση ενστάλαξαν στον Εύδοξο τον φόβο του απείρου. Η αντίληψη ότι τα αρχαία μαθηματικά αποτελούσαν κατά κάποιον τρόπο μια ευρεία άσκηση διαλεκτικής φιλοσοφίας παρακάμπτει ένα σημαντικό σημείο: ότι η γεωμετρία έχει τις ρίζες της σε μια ουσιαστικά πρακτική διαδικασία επίλυσης προβλημάτων.[25]

Σχετικά με την τρίτη αρχή, πιστεύω ότι είναι ευθύνη των μελετητών να διατηρήσουν ζωντανό το ενδιαφέρον για τα κείμενα που εξετάζουν. Μου φαίνεται ολότελα λανθασμένο να *προϋποθέτουμε* ότι μία συγκεκριμένη πηγή είναι πλαστή, εκτός αν έχουμε πολύ σοβαρούς λόγους, δεδομένου ότι αν το πράξουμε, αυτό θα αποτελέσει εγγύηση ότι κανένας στη συνέχεια δεν θα το λάβει σοβαρά υπόψη του.[26] Επίσης, μου φαίνεται λανθασμένο να *προϋποθέσουμε* ότι ένας συγκεκριμένος συγγραφέας μαθηματικών είναι ανεπαρκής, εκτός αν οδηγηθούμε σε αυτό το συμπέρασμα με βάση σαφείς ενδείξεις. Από την άλλη, είναι εξίσου σημαντικό να αποφεύγουμε ρομαντικές αντιλήψεις σχετικά με την εγκυρότητα των αυθεντιών, όταν έχουμε ενώπιόν μας σαφείς ενδείξεις περί του αντιθέτου. Για παράδειγμα, το κύρος του Πάππου ως εξέχουσας

25 Βλ. την άποψη που διατύπωσε ο Enriques που αναφέρεται στην υποσ. 13.

26 Είναι σαφές ότι αυτή ήταν η συνέπεια της απόρριψης από τον von Wilamowitz του κειμένου του Ερατοσθένη, η οποία αποθάρρυνε τους ερευνητές από το να χρησιμοποιήσουν μια εν δυνάμει σημαντική μαρτυρία για την πρώιμη ιστορία του διπλασιασμού του κύβου· πρβλ. υποσ. 10 πιο πάνω και όσα αναφέρονται στο Κεφ. 2.

μαθηματικής διάνοιας, αποτέλεσε αποτρεπτικό παράγοντα του να χρησιμοποιηθούν με έξυπνο τρόπο τα γραπτά του ως πηγή για την προγενέστερη μαθηματική παράδοση.[27] Αν πάλι αρχίσει κανείς να αμφισβητεί πως ο ίδιος ο Αριστοτέλης παρήγαγε τους εξαιρετικούς μαθηματικούς συλλογισμούς που περιλαμβάνονται στα *Μετεωρολογικά*, αυτό το έργο θα μπορούσε ενδεχομένως να ενταχθεί ξανά στο κεντρικό ρεύμα σκέψης σχετικά με την αρχαία μαθηματική επιστήμη.[28]

Είναι, ενδεχομένως, προς το συμφέρον της επιστημονικής ακρίβειας να προσεγγίζονται με σκεπτικισμό οι γενικές τοποθετήσεις σχετικά με τη φύση ενός επιστημονικού κλάδου. Ωστόσο, οι περισσότερες σημαντικές μελέτες για την αρχαία γεωμετρία, όπως αυτή του Heath, έχουν υπερβάλει στην εφαρμογή αυτής της σοφής πρόνοιας. Μας παρουσιάζουν κάτι που ισχυρίζονται ότι είναι μια τεκμηριωμένη αφήγηση αυτού του αρχαίου επιστημονικού πεδίου, ενώ δεν είναι παρά ένα *μείγμα* λεπτομερειών, χωρίς ισχυρές ενδείξεις συνοχής ή έστω εσωτερικής συνέπειας. Η πιο συναρπαστική πτυχή αυτού του υλικού είναι, κατά τη γνώμη μου, το γεγονός ότι μια πιο προσεκτική εξέταση αποκαλύπτει τις γενικές γραμμές μιας συνεπούς ανάπτυξης, και ότι τα σωζόμενα τεκμήρια, παρόλο που είναι ελλιπή, έχουν μια εσωτερική συνοχή ως κατάλοιπα ενός εξαιρετικού πνευματικού κινήματος του οποίου οι βασικές γραμμές είναι σαφώς διακριτές. Αν ο αναγνώστης δεν πειστεί από τα επιχειρήματα της μελέτης που ακολουθεί, αλλά παρόλα αυτά αναγνωρίσει ότι η τρέχουσα επιστημονική θεώρηση δεν είναι καθόλου ικανοποιητική, αφενός, και κατανοήσει ότι είναι δυνατόν να προταθεί μια συνεκτική θεώρηση αυτού του πνευματικού κινήματος, αφετέρου, τότε οι προσπάθειές μου θα έχουν επιτύχει τον κύριο στόχο τους.

---

27 Η φήμη του Πάππου τόσο ως μαθηματικού όσο και ως διερμηνευτή της κρατούσας άποψης για τη φύση των μαθηματικών είναι ένα θέμα που αναπτύσσεται στο Κεφ. 8 και θα μελετηθεί περαιτέρω στον τόμο που θα ακολουθήσει.

28 Βλ. Κεφ. 4.