ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο έβδομο βιβλίο της *Πολιτείας* του Πλάτωνα (423–347 π.Χ.)[1] ως *συνέριθοι καὶ συμπεριαγωγοί* (533d3)[2] περιγράφονται τα μαθηματικά σε σχέση με τη φιλοσοφία. Τα μαθηματικά είναι *συνέριθοι* της φιλοσοφίας, «συνεργάτες» της που τη συνδράμουν στην προσπάθειά της να επιτύχει τη στροφή, *περιαγωγήν*, του νου μας από τον κόσμο της αισθητηριακής αντίληψης σε έναν άλλο κόσμο, απρόσιτο στην ίδια αλλά προσιτό στον νου μας: με αυτή την έννοια τα μαθηματικά περιγράφονται και ως *συμπεριαγωγοί*, «οι άλλοι στροφείς» του νου μας που, μαζί με τη φιλοσοφία, επιχειρούν να τον στρέψουν από τον αισθητό κόσμο στον νοητό. Η συνεργασία των μαθηματικών και της φιλοσοφίας στο κοινό έργο τους νοείται στην *Πολιτεία* κατ' αρχάς προπαιδευτικά: η συστηματική και μακροχρόνια μελέτη των μαθηματικών είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την ενασχόληση με την πραγματική φιλοσοφία, όπως δείχνει το γνωστό αρχαίο ανέκδοτο για την απαγορευτική επιγραφή *ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω* στη σχολή του Πλάτωνα, την Ακαδημία.[3] Ο προπαιδευτικός ρόλος των μαθηματικών δεν τα υποβαθμίζει σε απλά εργαλεία της φιλοσοφίας, κάτι που φαίνεται καθαρά από τη συνεργασία τους με τη φιλοσοφία σε ένα συλλογικό έργο: τη διερεύνηση ενός μη εμπειρικού

[1] Για τις χρονολογίες και τη βιογραφία του Πλάτωνα βλ. Nails 2002, 243–250· για μια σύντομη εισαγωγή στους διαλόγους του, στη σκέψη του και στις προσεγγίσεις του έργου του βλ. Rowe 2003.

[2] Τα ουσιαστικά είναι γένους θηλυκού. Για τον τρόπο παραπομπής στα έργα του Πλάτωνα βλ. τελευταίο τμήμα της Εισ.

[3] Για τις φιλοσοφικές σχολές της αρχαιότητας βλ. Dorandi 1999*a*· για τη χρονολογία της Ακαδημίας βλ. Dorandi 1999*b*· για μια σύγχρονη συλλογή μελετών σχετικών με τη σχολή βλ. Kalligas κ.ά. 2020.

κόσμου, αντανάκλαση του οποίου είναι ο εμπειρικός — το φυσικό σύμπαν και η σφαίρα της ανθρώπινης γνώσης και δράσης. Τα μαθηματικά και η φιλοσοφία αποτελούν για τον Πλάτωνα ένα ενιαίο οικοδόμημα, και η φιλοσοφία εξαίρεται ως ο θριγκός του επειδή μελετά, μεταξύ άλλων, και τα ίδια τα μαθηματικά τα οποία έτσι υπό μία έννοια υπερκεράζει.[4]

Η αρχαία ελληνική φιλοσοφία ξεκίνησε τον 6ο αιώνα π.Χ. στην Ιωνία ως φυσική φιλοσοφία, μάλλον μαζί με τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά και την αστρονομία, κλάδο των μαθηματικών σε όλη την αρχαιότητα και πολύ μετά (μέχρι την εποχή της επιστημονικής επανάστασης) δίπλα στους κύριους κλάδους τους: τη *γεωμετρίαν*, για την οποία τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά είναι κυρίως γνωστά, και τη θεωρία αριθμών — *ἀριθμητικήν* στην αρχαία ελληνική.[5] Για τον Αριστοτέλη από τα Στάγειρα (384–322 π.Χ.), αναμφισβήτητα τον σημαντικότερο μαθητή του Πλάτωνα, η αστρονομία σχετίζεται περισσότερο από κάθε άλλο κλάδο των μαθηματικών με τη φυσική φιλοσοφία αλλά και την οντολογία.[6] Ο πρώτος γνωστός φιλόσοφος της Ιωνίας είναι ο Θαλής ο Μιλήσιος. Τον 4ο αιώνα π.Χ., ο μαθητής του Αριστοτέλη Εύδημος ο Ρόδιος έγραψε ιστορίες των μαθηματικών, της αστρονομίας και της φυσικής φιλοσοφίας μέχρι την εποχή του, και ανέφερε τον Θαλή ως τον πρώτο Έλληνα αστρονόμο.[7] Απέδωσε επίσης στον Θαλή τη διατύπωση γεωμετρικών προτάσεων, απλών θεωρημάτων, τονίζοντας την απουσία αυστηρής απόδειξης σε μία περίπτωση: η διάμετρος του κύκλου τον διχοτομεί· οι γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες· οι κατά κορυφήν γωνίες είναι ίσες· δύο τρίγωνα είναι ίσα αν δύο αντίστοιχες γωνίες και μία πλευρά τους είναι ίσες.[8] Σε έναν άλλο αστρονόμο και φυσικό φιλόσοφο

4 Για τη μεταφορά του οικοδομήματος βλ. *Πολιτεία* 7, 534e2–535a2.

5 Δύο παραδείγματα αριθμητικών θεωρημάτων από τα *Στοιχεῖα* του Ευκλείδη για τα οποία βλ. παρακάτω: κάθε σύνθετος αριθμός μετρείται από έναν πρώτο (7.31)· υπάρχουν περισσότεροι πρώτοι αριθμοί από κάθε δεδομένο πλήθος πρώτων αριθμών (9.20).

6 Βλ. *Μετὰ τὰ φυσικά* Λ 8, 1073b1–8, και πρβλ. *Φυσικά* Β 2, 194a7–8.

7 Βλ. Διογένη Λαέρτιο, 1.23 = Εύδημος, απ. 144 Wehrli. Για τον Εύδημο ως ιστορικό της επιστήμης βλ. Zhmud 2006, κεφ. 4–7.

8 Βλ. Πρόκλο, *Εἰς τὸ πρῶτον τῶν Εὐκλείδου Στοιχείων*, 157.10–11 (DK 11 A 20), 250.20–251.2 (DK 11 A 20), 299.1–5 (DK 11 A 20 = Εύδημος, απ. 135 Wehrli), 352.14–18 (DK 11 A 20 = Εύδημος, απ. 134 Wehrli)

του 5ου αιώνα π.Χ., τον Οινοπίδη τον Χίο, ο Εύδημος απέδωσε την πατρότητα δύο απλών παραδειγμάτων του άλλου χαρακτηριστικού τύπου προτάσεων στην αρχαία ελληνική γεωμετρία, των προβλημάτων, στις οποίες ζητείται κάτι: να αχθεί κάθετος σε μία δεδομένη ευθεία από ένα σημείο εκτός της ευθείας· να κατασκευαστεί γωνία ίση με μία δεδομένη γωνία σε μία δεδομένη ευθεία και με κορυφή δεδομένο σημείο της ευθείας.[9] Το δεύτερο μισό του 5ου αιώνα π.Χ. ο Δημόκριτος ο Αβδηρίτης, διάσημος κυρίως για την υπόθεση μικροσκοπικών ατόμων ως στοιχειωδών συστατικών των πάντων, οι αρχές της οποίας ανάγονται στον Λεύκιππο από τα Άβδηρα ή τη Μίλητο, διατύπωσε δύο στερεομετρικές προτάσεις: η πυραμίδα είναι το ένα τρίτο του πρίσματος που έχει την ίδια βάση και ίσο ύψος· ο κώνος είναι το ένα τρίτο του κυλίνδρου που έχει την ίδια βάση και ίσο ύψος.[10]

Όλες οι παραπάνω προτάσεις έχουν ενσωματωθεί στα *Στοιχεῖα*,[11] τη δικαίως περίφημη πραγματεία του Ευκλείδη που χρονολογείται συμβατικά γύρω στο 300 π.Χ., λίγο μετά τον θάνατο του Πλάτωνα· αυτό είναι το αρχαιότερο σωζόμενο μαθηματικό εγχειρίδιο, και η γεωμετρία, την οποία παρουσιάζει ο Ευκλείδης με τρόπο που δεν δυσκολεύει καθόλου έναν σύγχρονο μαθηματικό να αναγνωρίσει τον αρχαίο συνάδελφό του, ονομάστηκε ευκλείδεια γεωμετρία προς τιμήν του, μετά την ιστορικά πρόσφατη ανακάλυψη εναλλακτικών συστημάτων γεωμετρίας («μη ευκλείδειων» γεωμετριών) στον 19ο αιώνα. Όπως δηλώνει ο τίτλος τους, τα *Στοιχεῖα* δεν συνοψίζουν όλα τα ελληνικά μαθηματικά από τις αρχές μέχρι την εποχή της σύνθεσής τους. Δεν περιλαμβάνουν το αρχαιότερο ουσιαστικό κατάλοιπο μαθηματικών στον ελληνικό πολιτιστικό χώρο, τους τετραγωνισμούς των μηνίσκων

Friedlein. Για τον τρόπο παραπομπής σε έργα όπως του Πρόκλου, στις μαρτυρίες σχετικά με τους προσωκρατικούς φιλοσόφους όπως ο Θαλής (DK 11) και στα αποσπάσματα των έργων τους βλ. τελευταίο τμήμα της εισαγωγής.

9 Βλ. Πρόκλο, *Εἰς τὸ πρῶτον τῶν Εὐκλείδου Στοιχείων*, 283.7–8 (DK 41 A 13), 333.5–9 (DK 41 A 14 = Εύδημος, απ. 138 Wehrli) Friedlein. Για τον Οινοπίδη βλ. Bodnár 2007.

10 Βλ. Αρχιμήδη, *Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων*, II.430.1–9 Heiberg.

11 Με τη σειρά που προαναφέρθηκαν: *Στοιχεῖα* 1, Ορ. (= Ορισμός) 17· 1.5· 1.15· 1.26· 1.12· 1.23· 12.7 (πόρισμα)· 12.10. Για τη δομή των *Στοιχείων* βλ. κεφ. VI.

από έναν άλλο μαθηματικό και φυσικό φιλόσοφο της Χίου του 5ου αιώνα π.Χ., τον Ιπποκράτη·[12] το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου που διατυπώθηκε από τον Ιπποκράτη ως εύρεση δύο μέσων ανάλογων μηκών μεταξύ δύο δοθέντων μηκών, και οι κατασκευές των ζητούμενων μέσων αναλόγων από τον Αρχύτα τον Ταραντίνο, τον Εύδοξο τον Κνίδιο και τον αβέβαιης καταγωγής Μέναιχμο μετά τα τέλη του 5ου αιώνα π.Χ.·[13] την πρώιμη θεωρία των κωνικών τομών, με τη βοήθεια των οποίων ο Μέναιχμος κατασκεύασε τα ζητούμενα μέσα ανάλογα μήκη. Αν και συνήθως αναφέρονται όχι στην ιστορία της φιλοσοφίας αλλά των μαθηματικών, ο Αρχύτας και ο Εύδοξος, ο οποίος ήταν και ένας από τους σημαντικότερους αστρονόμους της αρχαιότητας, μπορούν κάλλιστα να θεωρηθούν έστω ελάσσονες φιλόσοφοι, όχι μόνο φυσικοί,[14] και η θεωρία των κωνικών τομών ίσως ξεκίνησε από την αστρονομία.[15]

Στην *Πολιτεία* του Πλάτωνα ο δραματικός χρόνος του διαλόγου, τα τέλη του 5ου αιώνα π.Χ., παρουσιάζονται ως εποχή άνθισης των μαθηματικών, όπως ήταν και το πρώτο μισό του επόμενου αιώνα σύμφωνα με τη μαρτυρία του Αριστοτέλη.[16] Κινητήρας της άνθισής τους θεωρήθηκε ο Πλάτων, ο αρχιτέκτονας των μαθηματικών που υποδείκνυε τα προβλήματα στα οποία οι μαθηματικοί στρέφονταν με ζήλο:[17] παραδοσιακά το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου είναι γνωστό ως Δήλιο πρόβλημα επειδή ο Πλάτων διείδε τη σημασία του όταν οι Δήλιοι έλαβαν από τον

[12] Για τον Ιπποκράτη και τους τετραγωνισμούς των μηνίσκων βλ. Netz 2004.

[13] Για τον διπλασιασμό του κύβου βλ. κεφ. VIII.

[14] Για τον Αρχύτα ως φιλόσοφο βλ. Huffman 2005, 44–90· για τα φιλοσοφικά ενδιαφέροντα του Ευδόξου βλ. Lasserre 1966, D 1–5.

[15] Βλ. κεφ. VIII.3.

[16] Βλ. *Πολιτεία* 7, 528b5–c7 (κείμ. 10), και Αριστοτέλη απ. 53 Rose.

[17] Για τον Πλάτωνα ως αρχιτέκτονα των μαθηματικών βλ. τον πάπυρο *PHerc* 1021 col. Y.2–18 από την απανθρακωμένη βιβλιοθήκη ρωμαϊκής έπαυλης στο Herculaneum, πόλη που καταστράφηκε μαζί με την Πομπηία από την έκρηξη του Βεζουβίου το 79 μ.Χ. Ο πάπυρος μάλλον περιέχει τμήμα του έργου *Σύνταξις τῶν φιλοσόφων* του επικούρειου Φιλοδήμου από τα Γάδαρα (1ος αιώνας π.Χ.) σε δέκα βιβλία (βλ. Διογένη Λαέρτιο 10.3). Για μετάφραση του χωρίου στην αγγλική βλ. Kalligas & Tsouna 2020, 282–285· για τις πιθανές πηγές του βλ. Zhmud 2006, 87–89.

θεό Απόλλωνα χρησμό που τους ζητούσε τον διπλασιασμό του (προφανώς κυβικού) βωμού του στο νησί και σε απόγνωση ζήτησαν τη βοήθεια του Πλάτωνα — αφού ο φιλόσοφος αναγνώρισε τη σπουδαιότητα του θεόσταλτου προβλήματος, ο Αρχύτας, ο Εύδοξος και ο Μέναιχμος, που παρουσιάζονται ως μέλη της σχολής του Πλάτωνα μαζί με άλλους μαθηματικούς, βρήκαν τρόπους λύσης του.[18] Μια άλλη πλευρά αυτής της παράδοσης που θέλει τον Πλάτωνα αρχιτέκτονα των μαθηματικών της εποχής του τον θεωρεί εμπνευστή της κύριας συμβολής του Ευδόξου στην αστρονομία, της θεωρίας των ομόκεντρων σφαιρών, μακρινός απόγονος της οποίας είναι η πτολεμαϊκή αστρονομία και κοσμολογία που κυριάρχησε μέχρι την επιστημονική επανάσταση.[19]

Ο κομβικός ρόλος του Πλάτωνα στην ιστορία των μαθηματικών, και γενικά της επιστήμης, μάλλον πρέπει να αντιμετωπιστεί ως απλό ανέκδοτο, απότοκο της διαδεδομένης τάσης των αρχαίων βιογράφων να επινοούν «επεισόδια» της ζωής της βιογραφούμενης προσωπικότητας από το έργο και τη σκέψη του.[20] Τίποτε δεν τεκμηριώνει την επίδραση ή τη συμβολή του Πλάτωνα στα μαθηματικά της εποχής του,[21] χωρίς όμως έτσι να μειώνεται το επίτευγμά του: η πρώτη προσέγγιση των μαθηματικών από

18 Βλ. Πλούταρχο, *Περὶ τοῦ Σωκράτους δαιμονίου*, 579B1–D3, και *Περὶ τοῦ εἶ τοῦ ἐν Δελφοῖς*, 386E3–10· Θέωνα Σμυρναίο, *Τὰ κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρήσιμα εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν*, 2.3–12 Hiller· τον σχολιασμό της πραγματείας *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* του Αρχιμήδη από τον Ευτόκιο τον Ασκαλωνίτη (5ος–6ος αιώνας μ.Χ.), III.88.13–90.11 Heiberg (βλ. σχετικά και κεφ. VIII σημ. 9). Για μαθηματικούς ως μέλη της πλατωνικής Ακαδημίας βλ. Πρόκλο, *Εἰς τὸ πρῶτον τῶν Εὐκλείδου Στοιχείων*, 64.16–68.6 Friedlein = Εύδημος, απ. 133 Wehrli, μια ιστορία της γεωμετρίας από τις αρχές μέχρι τον 4ο αιώνα π.Χ.· για τις πιθανές πηγές της βλ. Zhmud 2006, 179–190.

19 Βλ. Σιμπλίκιο, *Εἰς τὸ περὶ οὐρανοῦ*, 488.18–24 Heiberg = Εύδημος, απ. 148 Wehrli = Εύδοξος, απ. 121 Lasserre· για τις πηγές του Σιμπλικίου βλ. Zhmud 2006, 86–87. Για τη θεωρία των ομόκεντρων σφαιρών βλ. κεφ. VIII.3.

20 Βλ. Zhmud 1998 και 2006, κεφ. 3· Kouremenos 2011 και 2015 κεφ. 3.

21 Για τη λύση του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου την οποία ο Ευτόκιος, *Εἰς τὸ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου*, III. 56.14–58.14 Heiberg, αποδίδει στον Πλάτωνα βλ. Knorr 2022, 99–104 και Netz 2003· για την υποτιθέμενη συμμετοχή μαθηματικών στις δραστηριότητες της Ακαδημίας βλ. Zhmud 2006, 91–100.

φιλοσοφική σκοπιά. Έθεσε το οντολογικό ερώτημα της φύσης των αντικειμένων που μελετώνται στα μαθηματικά —και η απάντηση που έδωσε κάθε άλλο παρά αγνοήθηκε ακόμη και πολλούς αιώνες μετά την εποχή του—, αλλά και διέβλεψε τη σημασία του φιλοσοφικού προβληματισμού σχετικά με τα θεμέλια των μαθηματικών για τα ίδια τα μαθηματικά, χωρίς όμως να ασκήσει κάποια επίδραση στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά.[22]

Η μεταφορά της στροφής του νου από τον αισθητό κόσμο και τα επίσης αισθητά περιεχόμενά του στον νοητό κόσμο, περιεχόμενα του οποίου είναι οι λεγόμενες ιδέες ή τα είδη, παρουσιάζεται αλληγορικά στην περίφημη παραβολή του σπηλαίου, πάλι στο έβδομο βιβλίο της *Πολιτείας*, ως έξοδος από ένα σπήλαιο. Ό,τι βρίσκεται έξω από το σπήλαιο αντιστοιχεί αλληγορικά στον νοητό κόσμο. Φυλακισμένοι στο σπήλαιο του αισθητού κόσμου, αντιλαμβανόμαστε αμυδρά μόνο τις συνεχώς μεταβαλλόμενες σκιές τις οποίες ρίχνουν σε ένα τοίχωμα του σπηλαίου, εξαιτίας μίας τεχνητής πηγής φωτός, ομοιώματα των διαφόρων πραγμάτων που βρίσκονται έξω από το σπήλαιο: αν ελευθερωθούμε από το σπήλαιο, αρχικά το λαμπρό φυσικό φως της ημέρας μάς επιτρέπει να

[22] Αν και κατά πάσα πιθανότητα ό,τι ονομάστηκαν μαθηματικά και φιλοσοφία ξεκίνησαν στην Αρχαία Ελλάδα ως ενιαία δραστηριότητα, από τα μέσα του 5ου αιώνα και μετά τα μαθηματικά μάλλον αναπτύχθηκαν ανεξάρτητα από τη φιλοσοφία, παρά το μεγάλο ενδιαφέρον φιλοσόφων όπως ο Πλάτων και ο Αριστοτέλης για αυτά και παρά την αναμφισβήτητη σημασία των μαθηματικών για τη σκέψη τους· βλ. Knorr 1982 και 1993, 86–88. Στην παλαιότερη βιβλιογραφία ήταν πολύ διαδεδομένη η αντιμετώπιση του Πλάτωνα ως αρχιτέκτονα των μαθηματικών της εποχής του ο οποίος κατηύθυνε και επόπτευε μεθοδολογικά το έργο του πλήθους των μαθηματικών που ήταν μέλη της Ακαδημίας: ένας καρπός της δημιουργικής φιλοσοφικής εποπτείας του ήταν η αξιωματικοποίηση των μαθηματικών· βλ. τις σχετικές βιβλιογραφικές παραπομπές στον Zhmud 2006, 82–83 σημ. 3–6. Για μια σύγχρονη και εκτενή υποστήριξη αυτής της άποψης βλ. Karasmanis 2020 και πρβλ. Tait 2002· για τον Hösle 2012 ο ίδιος ο ευκλείδειος χαρακτήρας της αρχαίας ελληνικής γεωμετρίας και η αδιαφορία των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών για τη διερεύνηση μη ευκλείδειων γεωμετριών (βλ. Tóth 2010) οφείλονται στην πλατωνική σκέψη. Η νεοπλατωνική παράδοση θεώρησε τον Ευκλείδη εξοικειωμένο με τη φιλοσοφία του Πλάτωνα (βλ. Πρόκλο, *Εἰς τὸ πρῶτον τῶν Εὐκλείδου Στοιχείων*, 68.20–23 Friedlein), αλλά τα μαθηματικά του Ευκλείδη δεν προδίδουν πλατωνικές επιδράσεις· βλ. Sialaros 2020.

αντιληφθούμε μόνο έμμεσα όσα βρίσκονται γύρω μας, βλέποντας τα αντικαθρεφτίσματά τους στο νερό και τις σκιές τους, αλληγορία για τα μαθηματικά ως προπαιδεία της φιλοσοφίας· μόνο μετά θα μπορέσουμε να σηκώσουμε το βλέμμα μας και να το στρέψουμε σε αυτά τα πράγματα καθ' εαυτά, αλληγορία για τη φιλοσοφική αντίληψη της νοητής πραγματικότητας καθ' εαυτήν.

Τα μαθηματικά μάς προετοιμάζουν για τη φιλοσοφική προσέγγιση των περιεχομένων ενός ανοίκειου σε εμάς νοητού κόσμου, από τα περιεχόμενα του οποίου όμως εξαρτώνται τα περιεχόμενα του οικείου σε εμάς αισθητού, όπως τα ομοιώματα εξαρτώνται από τα πρωτότυπα — στην πραγματικότητα βέβαια ούτε ο αισθητός κόσμος μάς είναι οικείος γιατί οι αντιλήψεις μας για αυτόν σχετίζονται με τον ίδιο όπως οι μεταβαλλόμενες σκιές με τα ίδια τα πράγματα που τις ρίχνουν. Η στροφή του νου από τον αισθητό κόσμο στον νοητό, μέσω των μαθηματικών αρχικά και μετά της φιλοσοφίας, και η άνοδος στις ιδέες δεν συνεπάγονται την απάρνηση του αισθητού κόσμου και την εγκατάλειψή του, αν και πολύ συχνά ο γοητευτικός τρόπος με τον οποίο ο Πλάτων εξαίρει τον νοητό κόσμο εις βάρος του αισθητού μάς δίνει την αντίθετη αλλά λανθασμένη εντύπωση: προϋπόθεση τόσο για την κατανόηση του αισθητού κόσμου όσο και για την ευδαιμονία μας είναι η στροφή από αυτόν στον νοητό — ένας ελευθερωμένος δεσμώτης του σπηλαίου δεν παραμένει έξω από αυτό στον πλατωνικό παράδεισο, επιστρέφει στο σπήλαιο και, διαθέτοντας πλέον γνώση των πρωτοτύπων, τα ομοιώματα των οποίων ρίχνουν σκιές στο τοίχωμα του σπηλαίου, επιχειρεί να βοηθήσει τους συνανθρώπους του να καταλάβουν ποια πράγματα ρίχνουν ποιες σκιές. Την εξάρτηση της κατανόησης του αισθητού κόσμου από την πρόσβαση στον νοητό αντανακλά η οντολογική εξάρτηση των περιεχομένων του πρώτου, των απεικασμάτων, από αυτά του δεύτερου, τις ιδέες ή τα είδη που θεωρούνται τα πρωτότυπα.

Ο παραλληλισμός των ιδεών ή ειδών με τα πρωτότυπα που βρίσκονται έξω από το σπήλαιο, από τα οποία εξαρτώνται τα ομοιώματά τους στο σπήλαιο και εν τέλει οι σκιές των ομοιωμάτων, δείχνει καθαρά ότι εδώ η λέξη *ιδέα* δεν χρησιμοποιείται όπως συνήθως στη νέα ελληνική (η ετυμολογία των λέξεων *ιδέα* και *είδος* εξηγείται στην αρχή του πρώτου κεφαλαίου): η ύπαρξη των ιδεών δεν εξαρτάται από τον νου μας, όπως και η ύπαρξη των ομοιωμάτων τους, και των σκιών των ομοιωμάτων, στο σπήλαιο είναι ανεξάρτητη από τους δεσμώτες του. Στην πλατωνική φιλοσοφία οι λέξεις *ιδέα* και *είδος* χρειάζονται ένα συντακτικό συμπλήρωμα, τη γενική πτώση ενός ουσιαστικού (ή ουσιαστικοποιημένου επιθέτου), έστω *Ψ*, για να δηλωθεί εκείνο το περιεχόμενο ή εκείνη η πλευρά του αισθητού κόσμου που εξαρτάται από την ιδέα για την οποία γίνεται λόγος, όπως τα απεικάσματα από το υπόδειγμά τους. Η πρόσβαση στην ιδέα του/της *Ψ* μάς επιτρέπει να διακρίνουμε ποια από τα απεικάσματα γύρω μας αποτελούν απεικάσματά της, παρά τη σύγχυση που μας προκαλεί η ποικιλομορφία τους, ποια όχι και γιατί — τι είναι *Ψ* καθ' εαυτό, όπως και γιατί ο αισθητός κόσμος περιέχει ό,τι περιγράφουμε αντικειμενικά ως *Ψ*· μας επιτρέπει να διακρίνουμε τις απόψεις μας για τα απεικάσματα γύρω μας, τις μεταβαλλόμενες σκιές τους στο τοίχωμα του σπηλαίου, οι οποίες αντιστοιχούν περισσότερο ή λιγότερο σε αυτά, και εν τέλει στα ίδια τα πρωτότυπα των απεικασμάτων. Χωρίς τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία που επιτρέπουν την πρόσβαση στον νοητό κόσμο, ο κόσμος της εμπειρίας στερείται υπόστασης παρά την απατηλή ενάργειά του, δεν είναι τίποτε άλλο από θέατρο μεταβαλλόμενων σκιών στη χειρότερη περίπτωση ή οι ίδιες οι μορφές που ρίχνουν τις σκιές στην καλύτερη.

Η θέση του Πλάτωνα ότι ο εμπειρικός κόσμος κατανοείται μέσω όχι της ίδιας της εμπειρίας αλλά των μαθηματικών και της φιλοσοφίας θυμίζει μια θέση του Albert Einstein. Ο πρόγονος της σύγχρονης φυσικής, η φυσική φιλοσοφία, περιλαμβάνεται στην πλατωνική φιλοσοφία, όπως περιλαμβάνεται στη φιλοσοφία και πολύ μετά την εποχή του Πλάτωνα. Τα θεμέλια όμως των φυσικών θεωριών, σύμφωνα με τον Einstein, δεν δίνονται από την εμπειρία, αν και οι φυσικές θεωρίες περιγράφουν φαινόμενα του κόσμου της, αλλά από τα μαθηματικά: δίνουν το κλειδί για την κατανόηση της φύσης αλλά ανακαλύπτονται από τον νου εντελώς ανεξάρτητα από την εμπειρία. Για τον Einstein η εμπειρία δικαιολογεί την πεποίθηση ότι στη φύση πραγματώνονται οι απλούστερες μαθηματικές έννοιες τις οποίες ο καθαρός νους μπορεί να συλλάβει — η εμπειρία υποδεικνύει τις κατάλληλες μαθηματικές έννοιες για μια φυσική θεωρία αλλά αυτές δεν συνάγονται εμπειρικά, αποτελεί το μοναδικό κριτήριο της φυσικής εφαρμογής των μαθηματικών εννοιών που ανακαλύπτονται από τον νου αλλά η δημιουργική αρχή των φυσικών θεωριών εδράζεται στα μαθηματικά. «Υπό μία έννοια» υποστήριξε ο Einstein «θεωρώ λοιπόν ότι η καθαρή σκέψη μπορεί να συλλάβει την πραγματικότητα, όπως οραματίστηκαν οι αρχαίοι».[23] Αν και ο Einstein δεν αναφέρει τις πλατωνικές ιδέες ως μη εμπειρικά θεμέλια των μαθηματικοποιημένων φυσικών θεωριών, οι αρχαίοι οραματιστές τους οποίους δεν κατονομάζει μπορεί να είναι μόνο πλατωνιστές: οι μαθηματικές έννοιες του Einstein που ανακαλύπτονται από τον καθαρό νου διαθέτουν μια αυθυπόστατη ύπαρξη, και μπορούμε να τις παραλληλίσουμε με τα αντικαθρεφτίσματα και τις σκιές των πραγμάτων έξω από το σπήλαιο — τις ιδέες όπως τις συλλαμβάνει ο νους του ανθρώπου μαθηματικά, έμμεσα και όχι άμεσα. Η άρρηκτη σχέση των μαθηματικών και της φυσικής μπορεί να θεωρηθεί ισχυρό επιχείρημα υπέρ της πλατωνικής αντιμετώπισης των αντικειμένων που μελετώνται στα μαθηματικά ως αυθυπόστατων και ανεξάρτητων από τον νου, δεδομένης της αδιαμφισβήτητα αυθυπόστατης ύπαρξης των αντικειμένων μελέτης της φυσικής.[24]

Ως νοητές, με την έννοια ότι προσεγγίζονται μόνο από τον νου ανεξάρτητα από την εμπειρία, οι πλατωνικές ιδέες είναι ασώματες ή άυλες χωρίς καμία από τις ιδιότητες των περιεχομένων του αισθητού κόσμου: η πίστη στην ύπαρξη ενός σύμπαντος τέτοιων οντοτήτων που δεν μπορεί παρά να βρίσκονται εκτός του χώρου και του χρόνου, αν και οι νόμοι του χωροχρονικού κόσμου καθορίζονται από αυτές, έχει περιγραφεί ως «φιλοσοφική δεισιδαιμονία» που ξεκινά από μια παρομοίωση —αυτή της σύλληψης των μαθηματικών αληθειών με την αντίληψη των φυσικών αντικειμένων—, παρομοίωση που επιβάλλει την υπόθεση της ύπαρξης μαθηματικών αντικειμένων, τελείως διαφορετικών βέβαια από τα φυσικά, για να περιγράφονται από τις μαθηματικές αλήθειες.[25]

---

23 Einstein 1954, 274.

24 Γνωστό στη βιβλιογραφία με τα ονόματα των Quine και Putnam, το επιχείρημα υποδεικνύεται από τις θέσεις του Quine σε διάφορα δημοσιεύματά του (για παραπομπές βλ. Panza & Sereni 2013, 196 σημ. 3, οι οποίοι το πραγματεύονται διεξοδικά στα κεφ. 6–7)· η διατύπωση του επιχειρήματος οφείλεται στον Putnam 1971, κεφ. 5. Η φιλοσοφία των μαθηματικών του ίδιου του Quine είναι βέβαια κάθε άλλο παρά πλατωνική· βλ. Quine 1951 και την παρουσίαση των απόψεών του από τον Shapiro 2000, κεφ. 8.2.

25 Dummett 1978, 202. Ο Wittgenstein ²2008, 237 (V.16) περιγράφει ως

Στην *Πολιτεία* η πλατωνική θεώρηση των αντικειμένων που μελετώνται από τα μαθηματικά όντως εισάγεται με αυτή την παρομοίωση στο πλαίσιο της αλληγορίας του σπηλαίου. Φιλοσοφική δεισιδαιμονία ή όχι, ο πλατωνισμός καταλαμβάνει το πρώτο κεφάλαιο στην ιστορία της φιλοσοφίας των μαθηματικών, και η προσπάθεια αντιμετώπισης των προβλημάτων του είναι ένας από τους κινητήρες της εξέλιξης αυτού του κλάδου της φιλοσοφίας.[26]

Οι παραπομπές στα έργα του Πλάτωνα, π.χ. *Τίμαιος* 58d4–61c2, δίνουν τους αριθμούς σελίδων (58–61) όπου βρίσκεται το συγκεκριμένο χωρίο στην έκδοση των έργων του Πλάτωνα από τον Henri Estienne, γνωστό ως Ερρίκο Στέφανο (1574)· τα τμήματα των σελίδων (a–e) στα οποία αρχίζει και τελειώνει το χωρίο, και τους αριθμούς των στίχων τους. Στις σύγχρονες εκδόσεις των έργων του Πλάτωνα, οι αριθμοί των σελίδων της έκδοσης του Στεφάνου και οι διαιρέσεις των σελίδων της τυπώνονται στο περιθώριο των σελίδων του αρχαίου κειμένου (η αρίθμηση των στίχων στις σύγχρονες εκδόσεις δεν συμφωνεί με τους στίχους της έκδοσης του Στεφάνου). Οι αριθμοί των σελίδων αυτής της παλιάς έκδοσης και οι διαιρέσεις των σελίδων της χρησιμοποιούνται διεθνώς για τις παραπομπές στα έργα Πλάτωνα. Στις παραπομπές σε χωρία από τα εκτενή πλατωνικά έργα που παραδοσιακά διαιρούνται σε

«μαθηματική αλχημεία» την πλατωνική σύλληψη των μαθηματικών ως εξερεύνησης των αντικειμένων τα οποία αφορούν οι μαθηματικές προτάσεις· βλ. επίσης Wittgenstein 1976, 251–256 και πρβλ. Hacking 2014, 250–257.

26 Για μια εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών από τη σκοπιά της πλατωνικής θεώρησης των μαθηματικών αντικειμένων βλ. Panza & Sereni 2013. Παρά την ιστορική σημασία της, η πλατωνική σύλληψη των μαθηματικών αντικειμένων μπορεί να απορριφθεί ως στερούμενη νοήματος· βλ. Balaguer 1998 ο οποίος όμως για τον ίδιο λόγο απορρίπτει και κάθε αντιπλατωνική σύλληψή τους. Εναντίον της πλατωνικής θεώρησης των μαθηματικών ως συνεργατών της φιλοσοφίας που τη συνδράμουν στην προσπάθειά της να επιτύχει τη στροφή του νου μας από τον κόσμο της αισθητηριακής αντίληψης σε έναν κόσμο απρόσιτο στην ίδια αλλά προσιτό μέσω του νου μας βλ. Schneider 2012, κεφ. 7 και 2013. Για τη ριζοσπαστική άποψη ότι ο Πλάτων δεν υιοθετεί στην πραγματικότητα την κακώς λεγόμενη πλατωνική θεώρηση των μαθηματικών αντικειμένων βλ. McLarty 2005 και 2012.

βιβλία, την *Πολιτεία* και τους *Νόμους*, δίνεται και ο αριθμός του βιβλίου. Παρόμοια σύμβαση χρησιμοποιείται για τις παραπομπές στα έργα του Αριστοτέλη, π.χ. *Μετὰ τὰ φυσικά* A 6, 987b1–18: μετά τον τίτλο του έργου δίνεται το βιβλίο, αν το έργο διαιρείται σε βιβλία, με κεφαλαίο γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου (A)· το κεφάλαιο (6)· η σελίδα (987) και η στήλη της (a ή b) στις οποίες το συγκεκριμένο χωρίο βρίσκεται στην έκδοση των απάντων του Αριστοτέλη από τον Immanuel Bekker (*Aristotelis Opera*, Berlin 1831)· οι στίχοι της στήλης (1–18) που περιέχουν το συγκεκριμένο χωρίο (οι οποίοι όμως στις σύγχρονες εκδόσεις δεν συμφωνούν πάντα με την αρίθμηση των στίχων της έκδοσης του Bekker).

Οι παραπομπές στα αποσπάσματα από τα έργα των προσωκρατικών φιλοσόφων και στις μαρτυρίες για τη σκέψη τους ακολουθούν συμβατικά τη συλλογή των Diels και Kranz: μετά τα αρχικά των επωνύμων τους (DK) δίνεται ο αύξων αριθμός του φιλοσόφου στη συλλογή, δηλώνεται το τμήμα της συλλογής με τις μαρτυρίες για αυτόν (A) ή με τα αποσπάσματα από ένα έργο του (B) και κατόπιν δίνεται ο αύξων αριθμός της μαρτυρίας ή του αποσπάσματος (π.χ. DK 67 A 6, μια μαρτυρία για τον Λεύκιππο· το όνομα του φιλοσόφου δηλώνεται μόνο αν δεν είναι προφανές από τα συμφραζόμενα). Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις εκτός των προσωκρατικών, τα αποσπάσματα δηλώνονται με τη συντομογραφία *απ.* και τον αύξοντα αριθμό στη χρησιμοποιούμενη συλλογή τους, η οποία αναφέρεται με το όνομα του επιμελητή της· τα πλήρη στοιχεία των συλλογών αποσπασμάτων που χρησιμοποιούνται δίνονται στο πρώτο τμήμα της βιβλιογραφίας. Εκεί δίνονται και τα στοιχεία των εκδόσεων έργων στα οποία οι παραπομπές γίνονται με την αρίθμηση τόμου (αν υπάρχουν περισσότεροι από έναν), σελίδων και στίχων σελίδων μιας συγκεκριμένης έκδοσης η οποία στην παραπομπή δηλώνεται με το όνομα του επιμελητή (π.χ. Αρχιμήδης, *Ψαμμίτης* II.218.7–18 Heiberg). Για τις αβέβαιες χρονολογίες χρησιμοποιούνται οι συμβάσεις της Nails 2002: ± περίπου· < πριν· > μετά.

Το κείμενο των αριθμημένων χωρίων που μεταφράζονται έχει τυπωθεί όπως εμφανίζεται στις κριτικές εκδόσεις των έργων από τα οποία προέρχονται τα χωρία: Αριστοτέλης, *Μετὰ τὰ φυσικά*: Jaeger 1957· *Ἠθικὰ εὐδήμεια*: Walzer & Mingay 1991· Πλάτων, *Πολιτεία*: Slings 2003· *Φίληβος*: Burnet 1901· *Συμπόσιο*: Burnet 1901· *Σοφιστής*: Burnet 1900· *Τίμαιος*: Burnet 1902. Αν στην κριτική έκδοση η αρχή ενός χωρίου δεν συμπίπτει με την αρχή στίχου, το προηγούμενο μέρος του στίχου παραλείπεται, και η πρώτη λέξη του χωρίου τυπώνεται προς τα δεξιά, ανάλογα με την έκταση των παραλειπόμενων λέξεων. Λέξεις σε αγκύλες [ ] έχουν, κατά την κρίση του εκδότη, παρεισφρήσει στο αρχικό κείμενο.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ακόμη μία φορά τους υπεύθυνους της σειράς Αρχαία Επιστημονική Γραμματεία Γιάννη Χριστιανίδη και Μιχάλη Σιάλαρο για την ευγενική πρόσκλησή τους να συμβάλω στη δημιουργία της σειράς, και τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης για την απόφασή τους να φιλοξενήσουν τόσο τη σειρά όσο και ένα ακόμη έργο μου. Όπως και το πρώτο (Κουρεμένος 2020), διαμορφώθηκε σε σημαντικό βαθμό από τη διδασκαλία μου στο Τμήμα Φιλολογίας του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, όπου εδώ και χρόνια προσφέρω σε ετήσια βάση ένα σχετικό μάθημα στο πλαίσιο του προγράμματος σπουδών για την ειδίκευση κλασικής φιλολογίας. Με χαρά λοιπόν ευχαριστώ τα μέλη όλων των ακροατηρίων και αυτού του μαθήματος που με τη συμμετοχή τους μου έδιναν σε ετήσια βάση την ευκαιρία να προσπαθήσω να ξαναπαρουσιάσω καλύτερα τη σκέψη του Πλάτωνα. Ευχαριστώ και τον Λάζαρο Κεραμυδά που αφιέρωσε για μία ακόμη φορά αφειδώς τον χρόνο και τη φιλική προσοχή του διαβάζοντας το κείμενο, διορθώνοντας αβλεψίες και καταρτίζοντας τον πίνακα χωρίων και το ευρετήριο. Η προσπάθειά μου, ήδη από τα φοιτητικά μου χρόνια, να κατανοήσω την πλατωνική φιλοσοφία των μαθηματικών οφείλει πάρα πολλά στη συμφοιτήτριά μου και κατόπιν σύζυγο και συνάδελφο Πουλχερία Κυριάκου: την ευχαριστώ θερμά για την επιμέλεια με την οποία συνέβαλε στην τελική μορφή και αυτού του βιβλίου μου και, κυρίως, για την ακούραστη και υπομονετική συμμετοχή της σε συζητήσεις δεκαετιών.

Now, had Tashtego perished in that head, it had been a very precious perishing; smothered in the very whitest and daintiest of fragrant spermaceti; confined, hearsed, and tombed in the secret inner chamber and sanctum sanctorum of the whale. Only one sweeter end can readily be recalled—the delicious death of an Ohio honey-hunter, who seeking honey in the crotch of a hollow tree, found such exceeding store of it, that leaning too far over, it sucked him in, so that he died embalmed. How many, think ye, have likewise fallen into Plato's honey-head, and sweetly perished there?

[Αν πάλι ο Τάστιγκο έχανε τη ζωή του μέσα σε κείνο το κεφάλι, θα ήταν ένας πολύ σπουδαίος θάνατος· θα πέθαινε πνιγμένος στο πιο άσπρο και νόστιμο, ευωδιαστό σπερματσέτο· θα είχε σα φέρετρο, σα νεκροκρέβατο και σαν τάφο τον κρυφό εσωτερικό θάλαμο, τα «άγια των αγίων» της φάλαινας. Μόνο ένα γλυκύτερο τέλος μού 'ρχεται στο μυαλό αυτή τη στιγμή — ο απολαυστικός θάνατος ενός μελισσοκόμου στο Οχάιο, που, ψάχνοντας για μέλι στη διχάλα ενός κούφιου δέντρου, βρήκε ένα τόσο μεγάλο απόθεμα, που, σκύβοντας από πάνω πάρα πολύ, τον ρούφηξε εκείνο το μέλι μέσα του, με αποτέλεσμα να πεθάνει βαλσαμωμένος. Σκέφτεστε άραγε πόσοι έπεσαν, με παρόμοιο τρόπο, μες στο κεφάλι του Πλάτωνα, που είναι γεμάτο από μέλι, και χάθηκαν εκεί μέσα γλυκά;]

H. Melville, *Moby Dick*, κεφ. LXXVII
Μτφρ. Α.Κ. Χριστοδούλου, Gutenberg [2]1991

I

Ο πλατωνισμός στα μαθηματικά

Ο δραματικός χρόνος του διαλόγου του Πλάτωνα *Πολιτεία* τοποθετείται στην τελευταία δεκαετία του 5ου αιώνα π.Χ. και η συγγραφή του στις πρώτες δεκαετίες του επόμενου αιώνα. Ένα από τα σημαντικότερα έργα του Πλάτωνα, αν όχι το σημαντικότερο, δίνει μια πολύ καλή εικόνα του τύπου των ερωτημάτων στα οποία επιχειρώντας να απαντήσει ο Πλάτων προσδιόρισε ό,τι μπορεί να χαρακτηριστεί, χωρίς υπερβολή, η μορφή του πυρήνα της φιλοσοφίας όπως την ξέρουμε. Οπωσδήποτε δεν ήταν ο πρώτος που έθεσε αρκετά από αυτά τα προβλήματα. Ήταν όμως μάλλον ο πρώτος που τα πραγματεύτηκε συστηματικά, στις διάφορες απρόσμενες συσχετίσεις τους και σε ένα ενιαίο πλαίσιο, συλλαμβάνοντας τη φιλοσοφία ως προσπάθεια απάντησης σε αυτά και σε ανάλογα με συστηματική επιχειρηματολογία, και προτιμώντας οποιεσδήποτε απαντήσεις αναδύονται έτσι, όσο επιφυλακτικά και αν υιοθετούνται, από βεβαιότητες τις οποίες πολύ εύκολα και άκριτα μπορούμε να δεχτούμε.

Ο ίδιος ο Πλάτων δεν εμφανίζεται ποτέ ως συνομιλητής στους διαλόγους του. Οι απόψεις που στην *Πολιτεία* υποστηρίζονται από τον Σωκράτη (469–399 π.Χ.), τον πρωταγωνιστή του διαλόγου, ανήκουν στον Πλάτωνα: οι μαρτυρίες του Αριστοτέλη, μέλους της σχολής του Πλάτωνα στην Αθήνα από το 367 π.Χ. μέχρι τον θάνατο του Πλάτωνα το 347 π.Χ., μας επιτρέπουν να διακρίνουμε τον Σωκράτη που δεν έγραψε κάποιο έργο από τον Πλάτωνα.[1] Η διάκριση έχει άμεση σχέση με τις σωκρατικές απαρχές της έννοιας των ιδεών που δικαιολογημένα μπορεί να θεωρηθεί το σήμα

[1] Βλ. *Μετὰ τὰ φυσικά* Α 6, 987b1–18 (κείμ. 1) και Μ 4, 1078b9–36 (κείμ. 2)· συζητούνται στο κεφ. ΙΙ.

κατατεθέν της φιλοσοφίας του Πλάτωνα, και με τη θεώρηση των αντικειμένων που μελετώνται από τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία ως ιδεών — τον άξονα της συζήτησης στο έκτο και έβδομο βιβλίο της *Πολιτείας* για τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία.

Η πλατωνική θεώρηση των μαθηματικών αντικειμένων περιγράφεται καλά με απλό τρόπο από τον Βρετανό μαθηματικό Godfrey Hardy (1887–1947) στο δοκίμιό του *Η απολογία ενός μαθηματικού*:

> Για μένα —και υποθέτω για τους περισσότερους μαθηματικούς— υπάρχει και μια άλλη πραγματικότητα την οποία θα αποκαλέσω «μαθηματική πραγματικότητα»· δεν υπάρχει όμως κανένα είδος συμφωνίας ανάμεσα στους μαθηματικούς ή στους φιλοσόφους για τη φύση της μαθηματικής πραγματικότητας. Μερικοί ισχυρίζονται ότι είναι «διανοητική» και υπό κάποια έννοια την κατασκευάζουμε, άλλοι ότι είναι έξω και ανεξάρτητη από εμάς. Εκείνος ο οποίος θα μπορούσε να καταγράφει πειστικά τη μορφή της μαθηματικής πραγματικότητας θα είχε λύσει πολλά από τα πιο δύσκολα προβλήματα της Μεταφυσικής. Αν μπορούσε να περιλάβει και τη φυσική πραγματικότητα στην περιγραφή του, θα τα είχε λύσει όλα.
>
> Δεν θα επιθυμούσα να συζητήσω εδώ κανένα από τα θέματα αυτά, ακόμη και αν ήμουν ικανός να το κάνω· θα διατυπώσω όμως τη θέση μου κατηγορηματικά ώστε να αποφύγω μερικές παρεξηγήσεις. Πιστεύω ότι η μαθηματική πραγματικότητα βρίσκεται έξω από εμάς, ότι ο ρόλος μας είναι να την ανακαλύπτουμε ή να την *παρατηρούμε*, και ότι τα θεωρήματα που αποδεικνύουμε και που με υπερφίαλο τρόπο τα περιγράφουμε ως δικές μας «δημιουργίες», είναι απλώς οι σημειώσεις για τις παρατηρήσεις μας. Αυτή η άποψη υποστηρίχθηκε, με τη μια ή την άλλη μορφή της, από πολλούς φιλοσόφους υψηλού κύρους από τον Πλάτωνα και μετά, και θα χρησιμοποιήσω τη γλώσσα που ταιριάζει σε κάποιον που την ασπάζεται. Ο αναγνώστης που δεν του αρέσει αυτή η φιλοσοφία μπορεί να αλλάξει τη γλώσσα: θα έχει πολύ μικρή επίπτωση στα συμπεράσματά μου.[2]

Αντιδιαστέλλοντας παρακάτω για άλλη μία φορά τη φυσική πραγματικότητα από τη μαθηματική, ο Hardy γράφει σε πλατωνικό ύφος τα εξής:

---

[2] Hardy [1]1991, 88–89· παρατίθεται εν μέρει και από τους Panza & Sereni 2013, 16.

> Μια καρέκλα ή ένα αστέρι δεν είναι καθόλου αυτά που φαίνονται: όσο περισσότερο τα αναλογιζόμαστε, τόσο πιο ομιχλώδη γίνονται τα περιεχόμενά τους στην καταχνιά του κόσμου των αισθήσεων που τα περιβάλλει. Αλλά το «2» και το «317» δεν έχουν καμία σχέση με τον κόσμο των αισθήσεων, και όσο πιο πολύ τα αναλογιζόμαστε εκ του σύνεγγυς, τόσο πιο πολύ ξεκαθαρίζουν οι ιδιότητές τους. Ίσως είναι η σύγχρονη Φυσική που ταιριάζει πιο πολύ σε κάποιο πλαίσιο ιδεαλιστικής φιλοσοφίας — δεν το πιστεύω, αλλά υπάρχουν διαπρεπείς φυσικοί που το ισχυρίζονται. Τα καθαρά Μαθηματικά, τουναντίον, μου φαίνονται σαν ένας βράχος πάνω στον οποίο όλοι οι ιδεαλισμοί συντρίβονται: ο 317 είναι πρώτος, όχι επειδή έτσι νομίζουμε ή επειδή τα μυαλά μας είναι κατασκευασμένα με κάποιον συγκεκριμένο τρόπο αλλά *επειδή έτσι είναι*, επειδή έτσι είναι κατασκευασμένη η μαθηματική πραγματικότητα.[3]

Το γεγονός ότι ο Πλάτων αποκαλεί «ιδέες» τα περιεχόμενα της υπεραισθητής πραγματικότητας από την οποία εξαρτάται η αισθητή, και την οποία στόχο έχουν να περιγράψουν τα μαθηματικά και η φιλοσοφία, δεν τον καθιστά ιδεαλιστή φιλόσοφο — τα περιεχόμενά της βρίσκονται έξω από τον νου μας, όπως και σύμφωνα με τον Hardy, και δεν κατασκευάζονται αλλά μόνο περιγράφονται και γίνονται αντιληπτά από τον νου μας, λόγος για τον οποίο και αποκαλούνται «νοητά». Και για τον Πλάτωνα ο αριθμός 317 είναι πρώτος όχι επειδή έτσι θέλουμε, ή εξαιτίας της κατασκευής του εγκεφάλου μας, αλλά *γιατί έτσι είναι.*

Ο αριθμός 317 *είναι* πρώτος όχι επειδή του συνέβη να είναι τέτοιος, όπως έτυχε π.χ. ο αριθμός των μήλων να είναι πρώτος αφού μαζέψαμε 317, όσα βρέθηκαν, αλλά ως ό,τι αυτός ο αριθμός *είναι* — όχι ως πλήθος μήλων που μαζεύτηκαν ή οποιωνδήποτε μετρημένων πραγμάτων αλλά ως ο αριθμός 317 καθ' εαυτόν. Ο αριθμός 317 καθ' εαυτόν, αυτό που *είναι* ο αριθμός 317, ονομάζεται από τον Πλάτωνα «ον» και «ουσία» —αυτή του αριθμού 317— με τη μετοχή (*ὄν*) του ρήματος *είμαι* στην αρχαία ελληνική (*εἰμί*) και με το αφηρημένο ουσιαστικό (*οὐσία*) που παράγεται από αυτό το ρήμα.[4] Ονομάζεται και «ιδέα» (*ἰδέα*) ή «είδος»

---

3 Hardy [1]1991, 93–94.

4 Βλ. *Φαίδωνα* 101b4–c9: ένα, δύο, οκτώ ή δέκα αισθητά πράγματα γίνονται τόσα εξαιτίας της λεγόμενης μέθεξής τους στην «ιδία ουσία» του αριθμού 1, 2, 8 και 10 αντίστοιχα.

(*εἶδος*) του αριθμού 317, αφηρημένα ουσιαστικά παραγόμενα από το θέμα του αορίστου (*εἶδον*· απαρέμφατο *ἰδεῖν*) του ρήματος *βλέπω* στην αρχαία ελληνική (*ὁρῶ*):[5] όχι ως κάποιο ορατό πλήθος 317 πραγμάτων —δεν τον βλέπουμε, αφού δεν είναι αισθητός—,[6] αλλά επειδή εξαιτίας του κάθε ορατό πλήθος 317 πραγμάτων γίνεται τέτοιο, όπως και αν αυτό συμβαίνει,[7] και το αντιλαμβανόμαστε ως τέτοιο.

Αντίθετα με 317 μήλα, καρέκλες ή αστέρια, ο «ειδητικός» αριθμός 317 δεν συνίσταται από σώματα, ούτε βρίσκεται κάπου, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν υπάρχει όπως υπάρχουν τα πλήθη σωμάτων που «μετέχουν» σε αυτόν και ως τα οποία εκδηλώνεται: αντιθέτως, υπάρχει σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό από αυτά — στον μέγιστο δυνατό. Όλα τα παραπάνω σώματα είναι υποδεέστερα του ειδητικού αριθμού στον οποίο «μετέχουν»: η μέθεξή τους σε αυτόν συλλαμβάνεται ως απλή επιθυμία και τάση τους να είναι σαν αυτόν,[8] ως η σχέση απεικονίσεων ή απομιμήσεων με το πρότυπο ή το υπόδειγμά τους,[9] ή ως η σχέση των ονείρων με την πραγματικότητα.[10] Γεννιούνται, μεταβάλλονται και τελικά χάνονται· ό,τι μπορούμε να πούμε πως είναι το καθένα και το πλήθος τους, είναι αυτό που είναι, και τέτοιο που είναι, για κάποιο μικρότερο ή μεγαλύτερο χρονικό διάστημα. Αλλά, για ό,τι είναι ο αριθμός 317, δεν έχει κανένα νόημα να πούμε ότι άρχισε κάποτε να είναι αυτός που είναι, και τέτοιος που είναι, π.χ. πρώτος, και ότι κάποτε θα πάψει να είναι τέτοιος — θα γίνει σύνθετος ή θα χαθεί: απλά *είναι*, άμοιρος της γένεσης, του αντιθέτου της και κάθε μεταβολής, άρα και του χρόνου, έννοια με την οποία μπορούμε να πούμε ότι

---

5 Για την ιδία ουσία ενός αριθμού ως το είδος του βλ. *Φαίδωνα* 100b3–e3, όπου διατυπώνεται η γενική αρχή που εφαρμόζεται κατόπιν στα πλήθη αισθητών πραγμάτων.

6 Βλ. *Φαίδωνα* 78d10–79a11.

7 Βλ. *Φαίδωνα* 100b10–e3. Ο Πλάτων είναι βέβαιος για την ύπαρξη των ιδεών αλλά συνειδητοποιεί τις δυσκολίες τις οποίες εγείρει η παραδοχή της ύπαρξής τους — δεν κρύβει π.χ. την αδυναμία του να χαρακτηρίσει τη σχέση μεταξύ μιας ιδέας και των αισθητών που «μετέχουν» σε αυτή, αδυναμία που τονίζεται από τον Αριστοτέλη· βλ. *Μετὰ τὰ φυσικά* Α 6, 987b1–18 (κείμ. 1).

8 Βλ. *Φαίδωνα* 74a9–75b9.

9 Βλ. *Πολιτεία* 5, 476c1–d3· 6, 484b4–d3· 7, 534b3–d2· *Τίμαιο* 48e2–49a1 και 50a4–c6.

10 Βλ. πάλι *Πολιτεία* 5, 476c1–d3, και 7, 534b3–d2.

υπάρχει «έξω» από τον χρόνο ή, σε σχέση με καθετί που υπάρχει «στον» χρόνο, ότι είναι αιώνιος.[11] Η *ἀριθμητική*, ένας από τους δύο κύριους κλάδους των μαθηματικών της εποχής του Πλάτωνα, αντίστοιχος όχι της αριθμητικής με τη σύγχρονη σημασία της λέξης αλλά της θεωρίας αριθμών, μελετά τέτοιους ασώματους και αιώνιους αριθμούς, αντιληπτούς μόνο από τη νόηση και όχι από τις αισθήσεις.[12] Ο δεύτερος, η *γεωμετρία*, αποσκοπεί παρομοίως για τον Πλάτωνα στη γνώση του αιώνιου όντος — ιδεών των γεωμετρικών αντικειμένων: όχι στη γνώση των ιδιοτήτων ορατών γεωμετρικών διαγραμμάτων ή παραστάσεών τους στον νου, ή στην εκτέλεση γεωμετρικών κατασκευών που κάποια στιγμή δημιουργούνται και μετά χάνονται, ούτε στη «μέτρηση της γης» από την οποία η γεωμετρία ονομάστηκε έτσι.[13]

1. Ο ΑΝΤΙΠΛΑΤΩΝΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ ΚΑΙ ΤΟΥ KANT

Όπως σωστά υπονοεί ο Hardy στο πρώτο από τα παραπάνω παραθέματα, η πλατωνική θεώρηση του αντικειμένου μελέτης των μαθηματικών δεν είναι η μόνη δυνατή. Την απέρριψε ήδη ο ίδιος ο Αριστοτέλης, αν και ήταν μαθητής του Πλάτωνα, αντιστρέφοντας τη σχέση των μαθηματικών αντικειμένων με τον φυσικό κόσμο. Εξάρτησε τα πρώτα όχι μόνο από τον δεύτερο αλλά και από τον νου μας, ώστε να αποφεύγεται η πλατωνική θεώρηση των μαθηματικών αντικειμένων ως αυθυπόστατων αλλά και να διασφαλίζεται η αναμφισβήτητη ανεξαρτησία τους από κάθε συγκεκριμένο περιεχόμενο της αντίληψής μας και η καθολική ισχύς της αλήθειας των μαθηματικών: για τον Αριστοτέλη, τα αντικείμενα μελέτης των μαθηματικών είναι πλευρές του εμπειρικού κόσμου τις οποίες απομονώνει ο νους από τις υπόλοιπες που δεν τον ενδιαφέρουν ως μαθηματικό και έτσι αφαιρούνται.[14] Η αφαιρετική δυνατότητα του νου μας δείχνει για τον Immanuel Kant (1724–1804) ότι, πέρα από τα συγκεκριμένα περιεχόμενα

---

[11] Για την αφηρημένη ύπαρξη «εκτός» χώρου και χρόνου βλ. Lowe 2002, 370–372· σχετικά με τις πλατωνικές ιδέες και τον χρόνο βλ. Sorabji 1983, 108–112.

[12] Βλ. κείμ. 3 και 13.

[13] Βλ. κείμ. 3 και 14.

[14] Βλ. και κεφ. VII.2· οι αφηρημένες οντότητες του Αριστοτέλη υπάρχουν στον χώρο και τον χρόνο.

της ανθρώπινης εποπτείας (intuitus στα λατινικά), υπάρχει και η μορφή της, η καθαρή εποπτεία — το γενικό πλαίσιο στο οποίο μας δίνεται κάθε συγκεκριμένο περιεχόμενο της εποπτείας από τον εποπτικό μηχανισμό μας: ο χρόνος και ο ευκλείδειος χώρος που για τον Kant είναι μέρη αυτού του μηχανισμού. Η καθαρή εποπτεία προσφέρει το ιδιάζον αντικείμενο μελέτης των μαθηματικών, και στόχος τους είναι η διερεύνηση των δυνατών τρόπων με τους οποίους παρουσιάζεται στον χρόνο και στον ευκλείδειο χώρο κάθε συγκεκριμένο περιεχόμενο της εποπτείας μας. Η χωροχρονική μορφή της ανθρώπινης εποπτείας επιβάλλει στα συγκεκριμένα περιεχόμενά της τα χαρακτηριστικά της διαδοχικότητας, της διάκρισης, της πληθικότητας και της μέτρησης. Επιτρέπει έτσι την κατασκευή των εννοιών των αριθμών εντός της με την πρόσθεση και τη μέτρηση των διαδοχικών μονάδων ως τις οποίες αναγκαστικά θα μας παρουσιάσει όλα τα δυνατά περιεχόμενά της, π.χ. τα δάχτυλά μας των οποίων όμως η ιδιαίτερη φύση αφαιρείται.[15] Η καθαρή εποπτεία μας επιβάλλει επίσης σε όλα τα δυνατά περιεχόμενά της γεωμετρικά χαρακτηριστικά (μας παρουσιάζει καθετί ως τετράγωνο, κυκλικό κ.ο.κ.). Παράγει έτσι τις χωρικές έννοιες της γεωμετρίας (το τετράγωνο, τον κύκλο κ.ο.κ.) για να τις διερευνήσει ο λόγος κατασκευάζοντάς τες στην καθαρή εποπτεία με την καθοδήγηση της ίδιας. Η αναγκαία σύνδεση μορφής και περιεχομένου της εποπτείας υποχρεώνει τη γεωμετρία να μελετά το αντικείμενό της με τη βοήθεια εποπτικών συγκεκριμενοποιήσεών του, διαγραμμάτων ή των νοητικών αναπαραστάσεών τους όπου γίνονται οι κατασκευές, κάτι που δεν υποσκάπτει την καθολικότητα των γεωμετρικών προτάσεων χάρη πάλι στην αριστοτελική αφαίρεση του συγκεκριμένου από το μορφικό και καθολικό.[16]

Η καντιανή αντιμετώπιση των μαθηματικών όχι ως εξερεύνησης από τον νου μας μιας αυθυπόστατης υπεραισθητής πραγματικότητας πέρα από αυτόν αλλά ως κατασκευαστικής ενδοσκόπησης και αυτοπαρατήρησης οδηγήθηκε στα άκρα με τον ιντουισιονισμό του Ολλανδού μαθηματικού και φιλοσόφου Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966).[17] Ο ιντουισιονισμός ανήκει στο δημοφιλές

---

15 Βλ. *Κριτική του καθαρού λόγου* B 15–16.

16 Βλ. *Κριτική του καθαρού λόγου* A 713/B 741—A 717/B 745· πρβλ. κείμ. 3.

17 Για τη ζωή και το έργο του βλ. van Dalen 2013.

κεφάλαιο της ιστορίας των μαθηματικών του 20ού αιώνα που συνήθως ονομάζεται «κρίση στα θεμέλια των μαθηματικών»,[18] απότοκος της ραγδαίας εξέλιξης των μαθηματικών στον προηγούμενο αιώνα.[19] Στη διάρκειά του, τα μαθηματικά μπορούμε να πούμε ότι απέκτησαν χαρακτήρα έντονα πλατωνικό — εκ πρώτης όψεως τουλάχιστον. Η γεωμετρική εποπτεία εξορίστηκε εντελώς από τη μαθηματική ανάλυση που την προϋπέθετε ήδη από τη γένεσή της δύο αιώνες πριν (όταν ουσιαστικά άρχισε η κρίση στα θεμέλια των μαθηματικών με τα προβλήματα του απείρου), ενώ η σταδιακή αποδοχή των μη ευκλείδειων γεωμετριών διέρρηξε τη σχέση της γεωμετρίας με τον φυσικό χώρο και την καντιανή εποπτεία· η έμφαση στην αξιωματικοποίηση και τη λογική δομή των γεωμετριών παραμέρισε τα παραδοσιακά διαγράμματα και τις κατασκευές.[20] Καθοριστικής σημασίας για την απογεωμετρικοποίηση και την αριθμητικοποίηση της ανάλυσης ήταν οι ορισμοί από τον Georg Cantor (1845–1918) και τον Richard Dedekind (1831–1916) των άρρητων, και γενικά των πραγματικών, αριθμών.[21] Οι πραγματικοί αριθμοί ορίζονται ως ένα απειροσύνολο, τα στοιχεία του οποίου δεν μπορούν να κατασκευαστούν εποπτικά με κάποιο στοιχειώδη τρόπο από τους ρητούς, όπως κατασκευάζεται η σειρά των φυσικών με τη δυνητική διαδοχή του προηγούμενου από τον επόμενό του σύμφωνα με έναν πολύ απλό κανόνα: φαίνεται να διαθέτουν μια αυθυπόστατη, μη χωροχρονική ύπαρξη πέρα από τις κατασκευαστικές δυνάμεις του νου μας, όπως και οι ρητοί, οι ακέραιοι και οι φυσικοί ως τα υποσύνολά τους, αλλά και τα άλλα απειροσύνολα της συνολοθεωρίας του Cantor με τους υπερπεπερασμένους διατακτικούς και πληθικούς αριθμούς τους.[22]

18 Για το οποίο βλ., σε μορφή κόμικ, Δοξιάδη κ.ά. 2008.

19 Για μια γενική εισαγωγή σε αυτό το κεφάλαιο της ιστορίας των μαθηματικών βλ. Ferreirós 2008.

20 Για την ανάλυση βλ. Archibald 2008· για τη γεωμετρία βλ. Gray 2008.

21 Για τη ζωή και το έργο του Cantor βλ. Dauben 1990.

22 Το 1874 ο Cantor απέδειξε ότι υπάρχουν περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί από τους ακεραίους που έχουν με τους φυσικούς αντιστοιχία ένας προς έναν, έννοια με την οποία οι ακέραιοι είναι αριθμήσιμοι: αντιστοιχούμε έναν προς έναν τους φυσικούς 1, 2, 3, ... και τους ακεραίους 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, ..., δείχνοντας όχι μόνο ότι οι ακέραιοι είναι αριθμήσιμοι αλλά και ορίζοντας μια διάταξή τους. Αν ξεκινήσουμε να μετράμε τα σημεία π.χ. στο πραγματικό διάστημα

2. Ο ΠΛΑΤΩΝΙΣΜΟΣ ΤΟΥ CANTOR

Σύμφωνα με τον Cantor, «οι πληθικοί αριθμοί και οι διατακτικοί τύποι [οι διατακτικοί αριθμοί] είναι *απλές* εννοιολογικές αναπαραστάσεις· καθένας από αυτούς είναι *μία πραγματική ενιαία οντότητα* (*μονάς*) επειδή σε αυτόν συνδέονται *ενιαίως* μια ποικιλία και μια πολλαπλότητα *ατόμων* [Einsen]».[23] Όπως εξηγεί, αν και στην αντίληψή μας τα στοιχεία ενός συνόλου παρουσιάζονται διακριτά, στη νοητική εικόνα του συνόλου που αποτελεί τον διατακτικό τύπο του τα στοιχεία του συνόλου, τα «άτομα» (Einsen), ενώνονται σε ένα οργανικό όλο το οποίο ο Cantor αναλύει με τη

[0, 1], οι φυσικοί αριθμοί θα μας τελειώσουν πριν να έχουμε μετρήσει και διατάξει όλα τα σημεία του. Κάλλιστα όμως μπορούμε να τους «βάλουμε» όλους στην άκρη και να ξεκινήσουμε να μετράμε από την αρχή. Ο Cantor έθεσε έναν «οριακό» διατακτικό αριθμό ω, τον πρώτο υπερπεπερασμένο διατακτικό αριθμό, μετά από όλους τους πεπερασμένους διατακτικούς αριθμούς 1, 2, 3, ..., πριν από τον οποίο όμως δεν υπάρχει κανείς από αυτούς ως προτελευταίος. Μετά από τον ω συνεχίζουμε να μετράμε όπως και πριν: (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...) ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, ... Κατόπιν έρχεται ένας δεύτερος οριακός διατακτικός αριθμός $\omega + \omega = \omega \cdot 2$ και συνεχίζουμε ως εξής: $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 2 + 1$, $\omega \cdot 2 + 2$, ... , $\omega \cdot n$, ..., $\omega \cdot n + m$, ... φτάνοντας στον $\omega \cdot \omega = \omega^2$, μετά στον ω^3, μετά στον ω^4, ... , μέχρι τον ω^ω, παρομοίως στον ω^{ω^ω} κ.ο.κ. Οι υπερπεπερασμένοι πληθικοί αριθμοί ορίζονται με τη βοήθεια των υπερπεπερασμένων διατακτικών αριθμών και συμβολίζονται με το πρώτο γράμμα της εβραϊκής αλφαβήτου $\aleph$ (άλεφ). Ο πρώτος, $\aleph_0$, είναι το πλήθος των πεπερασμένων διατακτικών αριθμών και ο πληθάριθμος του συνόλου των φυσικών αριθμών, των ακεραίων και των ρητών· ο δεύτερος, $\aleph_1$ είναι το πλήθος των μη πεπερασμένων αλλά αριθμήσιμων διατακτικών αριθμών και ο πρώτος υπεραριθμήσιμος πληθικός αριθμός κ.ο.κ. Σύμφωνα με την περίφημη υπόθεση του συνεχούς του Cantor, $2^{\aleph_0}$ είναι ο πληθάριθμος του συνόλου των πραγματικών αριθμών που είναι υπεραριθμήσιμος, και $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, ο μικρότερος υπεραριθμήσιμος πληθάριθμος, μια από τις σημαντικότερες υποθέσεις στην ιστορία των μαθηματικών. Στα *Μετὰ τὰ φυσικά* Μ 8, 1083b36–1084a3, ο Αριστοτέλης υποστηρίζει ότι δεν μπορεί να υπάρξει άπειρος αριθμός γιατί κάθε αριθμός είναι άρτιος ή περιττός, άρα πεπερασμένος. Ο Cantor απέρριψε το επιχείρημα αυτό υποδεικνύοντας ότι, επειδή $1 + \omega = 2 + \omega = \omega$, όπως και $1 + \aleph_0 = 2 + \aleph_0 = \aleph_0$, ένας άπειρος αριθμός μπορεί κάλλιστα να είναι και άρτιος και περιττός· βλ. Cantor 1932 [1883], 178.

23 Βλ. Cantor 1932 [1887–1888], 380· για τους διατακτικούς και πληθικούς αριθμούς βλ. σημ. 22.

βοήθεια βασικών αριστοτελικών εννοιών: της ύλης και της μορφής — τα διακριτά άτομα αποτελούν την ύλη της νοητικής εικόνας, ενώ η διάταξή τους αντιστοιχεί στη μορφή της.

Στην ανάλυση του όλου, ο Cantor προϋποθέτει ότι η μορφή π.χ. ενός παπουτσιού ή το είδος του, όπως επίσης ονομάζει ο Αριστοτέλης τη μορφή, είναι ό,τι διαφοροποιεί το παπούτσι από τα μέρη του που χρησιμοποιήθηκαν για να φτιαχτεί και ό,τι του προσδίδει τη χαρακτηριστική ενότητά του πέρα και πάνω από αυτά: το παπούτσι δεν είναι ο σωρός των μερών του αλλά η συγκεκριμένη διάταξή τους, η μορφή του (αυτονόητα, αντίθετα με το πλατωνικό είδος, το αριστοτελικό δεν είναι αυθυπόστατο αλλά εμμενές, σε ύλη, αν και η επιστημολογική ανωτερότητα του πλατωνικού διατηρείται). Διαφορετικοί υπερπεπερασμένοι διατακτικοί αριθμοί μπορούν να αντιστοιχούν στις διατάξεις απειροσυνόλων με το ίδιο πλήθος στοιχείων, και οι έννοιες της ύλης και της μορφής εκφράζουν πολύ καλά αυτή τη ρήξη της διάταξης στοιχείων από την πληθικότητά τους. Εκτός από την ανάλυση των διατακτικών αριθμών σε ύλη και μορφή, γνωστή από τον Αριστοτέλη μάς είναι και η θεώρηση των αριθμών όχι ως σωρών ατόμων αλλά ως ενιαίων οντοτήτων: σύμφωνα με τη μαρτυρία του, οι ειδητικοί αριθμοί του Πλάτωνα νοούνται ως ολότητες που έχουν οργανική ενότητα, όχι ως σωροί μονάδων[24] (κανείς τους δεν διακρίνει τους πληθικούς από τους διατακτικούς αριθμούς, ούτε βέβαια διαθέτει την έννοια των υπερπεπερασμένων αριθμών). Ο πλατωνικός διάλογος *Φίληβος* είναι η πηγή από την οποία Cantor άντλησε τη χρήση της αρχαίας ελληνικής λέξης *μονάς* με τη σημασία «πραγματική ενιαία οντότητα» — η λέξη και η ιδιότυπη *ενάς* απαντούν στον *Φίληβο* για κάθε ιδέα ως «πραγματική ενιαία οντότητα».[25]

Η νοητική αναπαράσταση ενός συνόλου ως διατακτικού αριθμού επιτυγχάνεται με την αφαίρεση που απομακρύνει τον ιδιαίτερο χαρακτήρα όλων των στοιχείων του και τις κάθε είδους σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους, και μεταξύ αυτών και οποιωνδήποτε άλλων πραγμάτων, διατηρώντας μόνο τη διάταξή τους·[26] απομακρύνοντας και τη διάταξή τους, η αριστοτελική

[24] Βλ. *Μετὰ τὰ φυσικά* Μ 8, 1084b21–22.

[25] Βλ. κεφ. V.1. Ο Cantor ήξερε τον *Φίληβο* του Πλάτωνα· βλ. Cantor 1932 [1883], 204 σημ. 1.

[26] Βλ. Cantor 1932 [1887–1888], 422.