κεφάλαιο

3

Η ΘΕΩΡΙΑ DE BROGLIE-BOHM I:

ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ

3.1 Εισαγωγή

Αν και οι πιο φιλοσοφικές πτυχές της κριτικής των de Broglie και Bohm –κυρίως του δεύτερου– προς τη σχολή της Κοπεγχάγης και η αντίκρουσή τους από τους υπερασπιστές της θα παρουσιαστούν στην τελευταία ενότητα του βιβλίου, εντούτοις μπορούμε να πούμε από τώρα ότι συνοψίζονται σε μια κεντρική θέση που είναι γνωστή ως *ρεαλισμός*. Και σημαίνει με απλά λόγια τούτο: Ότι ο φυσικός κόσμος υπάρχει ανεξάρτητα από εμάς και επομένως κάθε φυσική θεωρία οφείλει να μας προσφέρει μια αντικειμενική περιγραφή του, ανεξάρτητη από τον παρατηρητή και τα όργανα παρατήρησης που χρησιμοποιεί. Η κλασική φυσική –π.χ. η νευτώνεια μηχανική– ικανοποιεί εμφανώς τη ρεαλιστική απαίτηση, όμως η κβαντομηχανική και η καθιερωμένη ερμηνεία της μάλλον όχι. Και πάντως, *όχι με τον συμβατικό τρόπο*. Η σχολή της Κοπεγχάγης δεν μας λέει, π.χ., τι κάνουν τα ηλεκτρόνια σ' ένα άτομο ανεξάρτητα από τον τρόπο παρατήρησής τους –θεωρεί το ερώτημα μη ελέγξιμο πειραματικά και επομένως *μεταφυσικό*–, αλλά μόνο τι αποτελέσματα είναι πιθανόν να βρούμε αν πραγματοποιήσουμε μια σειρά μετρήσεων του ενός ή του άλλου τύπου. Τα αποτελέσματα αυτά είναι βεβαίως ίδια για όλους τους παρατηρητές κι επομένως αντιπροσωπεύουν –σύμφωνα με τη σχολή– μια *αντικειμενική γνώση* για το κβαντικό σύστημα που μελετούμε.

Επιπλέον, η κβαντομηχανική της Κοπεγχάγης είναι μια εγγενώς πιθανοκρατική θεωρία. Οι πιθανότητες τις οποίες εισάγει δεν οφείλονται σε ατελή γνώση των «αιτίων» που επηρεάζουν ένα μικροσκοπικό φυσικό σύστημα, αλλά είναι αληθινά *θεμελιώδεις*. Η φύση είναι εγγενώς πιθανοκρατούμενη. Το οποίο δεν μπορεί, βεβαίως, να γίνει δεκτό από τη σκοπιά του ρεαλισμού, διότι κάνει αδύνατη μια αντικειμενική περιγραφή της φύσης όπου τα ίδια αίτια –οι ίδιοι αντικειμενικοί παράγοντες– θα δίνουν πάντα τα ίδια αποτελέσματα. Οι οπαδοί του ρεαλισμού –τον οποίο εκπροσωπεί ο Bohm και οι συνεχιστές του– είναι λοιπόν αυτονόητα και *ντετερμινιστές*, και επομένως σε ανοιχτή ρήξη με την κυρίαρχη ερμηνεία της κβαντομηχανικής.

Σε τούτο το κεφάλαιο θα δούμε ποιο διαφορετικό ερμηνευτικό μονοπάτι ακολούθησαν οι ρεαλιστές και πόσο μακριά κατάφεραν να φτάσουν.

Θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε τη θεωρία τους στο απλούστερο δυνατό επίπεδο και με τη μέγιστη δυνατή έμφαση στη διαύγαση των εννοιών, ώστε να μπορούν να αναδειχθούν με σαφήνεια οι νέες ιδέες τις οποίες κομίζει, αλλά και τα τρωτά σημεία της. Για αυτό το τελευταίο θα φροντίσει σίγουρα ο «αυθάδης φοιτητής» που θα είναι διαρκώς μαζί μας. Εκείνο το «είδος» φοιτητή που δεν έχει μάθει να προσποιείται ότι «καταλαβαίνει το μάθημα» και δεν διστάζει να κάνει τις ενοχλητικές ερωτήσεις που θα θέλαμε να αποφύγουμε. Αυτός είναι που θα φροντίσει ώστε η παρουσίασή μας να μην ξεφύγει σε νεφελώδεις γενικότητες, αλλά να κινηθεί στο ίδιο απαιτητικό επίπεδο κατανόησης όπως και η διδασκαλία της συμβατικής κβαντομηχανικής. Η απαίτησή του από τη νέα θεωρία θα είναι πολύ απλή. Να μπορεί να ξέρει, όσο γίνεται νωρίτερα, ποιες είναι οι βασικές αρχές της –διατυπωμένες στην αναμφίβολη γλώσσα των μαθηματικών–, πώς να λύνει απλές ασκήσεις με βάση αυτές και, τέλος, πώς να τις εφαρμόζει στα ίδια πρότυπα κβαντικά συστήματα πάνω στα οποία έμαθε τη συνήθη κβαντομηχανική. Ώστε να είναι σε θέση να κάνει τις αναγκαίες αντιπαραβολές και συγκρίσεις με το «παλιό καθεστώς» και να βγάλει τα δικά του συμπεράσματα.

Όπως θα δούμε αμέσως, το πρώτο βήμα –η μαθηματική διατύπωση της προτεινόμενης εναλλακτικής θεωρίας– είναι πολύ απλό.

3.2 Η μαθηματική διατύπωση: Η εξίσωση de Broglie-Bohm

Η βασική ιδέα της θεωρίας είναι όντως πολύ απλή. Για ένα σωματίδιο μάζας m που κινείται στη μία διάσταση με ενέργεια E και ορμή p, και χωρίς καμία δύναμη να ασκείται πάνω του (ελεύθερη κίνηση), η κυματοσυνάρτησή του ψ έχει τη μορφή ενός επίπεδου κύματος

$$\psi = Ae^{i(kx-\omega t)}, \tag{3.1}$$

όπου ο κυματαριθμός k και η κυκλική συχνότητα ω του κύματος συνδέονται με τα σωματιδιακά χαρακτηριστικά E και p με τις γνωστές σχέσεις του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού

$$E = \hbar\omega, \quad p = \hbar k. \tag{3.2}$$

Για την ταχύτητα v του σωματιδίου θα είναι λοιπόν

$$v = \frac{p}{m} = \frac{\hbar}{m}k. \tag{3.3}$$

Όμως, το k μπορεί επίσης να γραφεί ως

$$k = \frac{\partial S}{\partial x}, \tag{3.4}$$

όπου $S = kx - \omega t$ η φάση του κύματος (3.1). Με άλλα λόγια, το k δεν είναι παρά η μεταβολή της φάσης του κύματος ανά μονάδα μήκους. Ή, αλλιώς, η *κλίση* της φάσης του. Για την οποία χρησιμοποιούμε εδώ το σύμβολο $S(x,t)$ –και όχι το $\phi(x,t)$ της § 1.5.2– διότι το S είναι το καθιερωμένο σύμβολο για τη φάση στο πλαίσιο της θεωρίας de Broglie-Bohm.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια τυχούσα λύση $\psi(x,t)$ της χρονεξαρτημένης εξίσωσης Schrödinger στη μία διάσταση

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x). \tag{3.5}$$

Κατ' αναλογία με την (3.1), η $\psi(x,t)$ μπορεί να γραφεί στη λεγόμενη *πολική μορφή*(*)

$$\psi(x,t) = R(x,t)e^{iS(x,t)}, \tag{3.6}$$

όπου R και S πραγματικές συναρτήσεις, εκ των οποίων η πρώτη παριστάνει το *πλάτος* του σχετικού κύματος $\psi(x,t)$ και η δεύτερη τη *φάση* του. Σημειώστε όμως ότι σε ένα σημαντικό μέρος της βιβλιογραφίας χρησιμοποιείται αντί της (3.6) η γραφή $\psi = R\exp(iS/\hbar)$, οπότε το δικό τους S έχει διαστάσεις δράσης –δηλαδή τις διαστάσεις του $\hbar$– έναντι του δικού μας που είναι αδιάστατο.

Συνεχίζοντας την αναλογία με την περίπτωση της ελεύθερης κίνησης, μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε έναν *τοπικό κυματαριθμό* στη θέση x (και τη χρονική στιγμή t) χρησιμοποιώντας ξανά τον τύπο (3.4), αλλά με τη φάση $S = S(x,t)$ της γενικής λύσης (3.6). Λέμε λοιπόν ότι θα είναι

$$k = k(x,t) = \frac{\partial S}{\partial x}. \tag{3.7}$$

Τότε όμως –βάσει της (3.3)– μπορούμε επίσης να ορίσουμε ως *τοπική ταχύτητα* $v(x,t)$ την

$$v = \frac{\hbar}{m}\frac{\partial S}{\partial x} \equiv \frac{\hbar}{m}S_x(x,t).\ ^{(\dagger)} \tag{3.8}$$

(*) Υπενθυμίζουμε ότι ένας τυχών μιγαδικός αριθμός $z = x+iy$ μπορεί πάντα να γραφεί στη μορφή $z = \rho e^{i\theta}$, όπου $\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ το μέτρο του (ή η απόλυτη τιμή του) και $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ η φάση του. Η γραφή αυτή είναι γνωστή ως *πολική μορφή*.

(†) Υπενθυμίζουμε κι εδώ τη γνωστή σύμβαση για τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \equiv u_x(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \equiv u_y(x,y).$$

Η θεωρία των de Broglie-Bohm είναι τώρα μπροστά μας. Η κβαντομηχανική εξίσωση (3.5) –δηλαδή η εξίσωση Schrödinger– εξακολουθεί να ισχύει, αλλά οι λύσεις της $\psi(x,t)$ –τα *κύματα Schrödinger*, αν θέλετε– έχουν τώρα διαφορετικό φυσικό ρόλο. Είναι *κύματα-οδηγοί* (pilot waves). Λένε στα σωματίδια πώς να κινηθούν. Και ο νόμος κίνησής τους είναι ακριβώς ο (3.8). Το σωματίδιο εκτελεί μια μονοδιάστατη κίνηση $x = x(t)$ με $v = \dot{x}(t)$ όπως στην (3.8). Θα είναι δηλαδή

$$\dot{x} = \frac{\hbar}{m} S_x(x,t). \quad (\text{εξίσωση de Broglie-Bohm}) \tag{3.9}$$

Η (3.9) δεν είναι παρά μια πρωτοτάξια διαφορική εξίσωση ως προς την άγνωστη συνάρτηση $x = x(t)$ που λύνεται μονοσήμαντα σε συνδυασμό με την αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$. Το ποια είναι η διαφορετική ερμηνεία της κβαντομηχανικής που προσφέρει η *μπομιανή μηχανική* (*bohmian mechanics*) –μια εναλλακτική ονομασία της θεωρίας de Broglie-Bohm, όπως αυτή ορίζεται από τις εξισώσεις (3.5) και (3.9)– θα το δούμε στην παράγραφο που ακολουθεί.

3.3 Η φυσική ερμηνεία της θεωρίας de Broglie-Bohm: Η απροσδιοριστία στη θέση οφείλεται σε άγνοια των αρχικών θέσεων του σωματιδίου

Ας σημειώσουμε κατ' αρχάς ότι η ιδέα των κυμάτων-οδηγών διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον de Broglie στο ιδρυτικό συνέδριο της κβαντομηχανικής (το περίφημο συνέδριο του Solvay) το 1927. Όμως η κριτική που δέχθηκε σχεδόν απ' όλους ήταν τόσο σφοδρή –θα δούμε αργότερα τους λόγους–, ώστε εγκαταλείφθηκε αμέσως από τον «πατέρα» της. Ήταν η σειρά του Bohm[*] να την ξανανακαλύψει το 1952 και να προτείνει το ερμηνευτικό της πλαίσιο. Με δεδομένο

[*] Ο David Bohm, αμερικανός φυσικός εβραϊκής καταγωγής, υπήρξε μια πολύ ξεχωριστή μορφή της μεταπολεμικής φυσικής. Η πολλά υποσχόμενη ακαδημαϊκή καριέρα του στο Πανεπιστήμιο Princeton διακόπηκε πρόωρα το 1949, στην κορύφωση του Ψυχρού Πολέμου, όταν αρνήθηκε να συνεργαστεί με τη διαβόητη επιτροπή Μακάρθυ, που είχε αναλάβει να «διεκπεραιώσει» ένα κυνήγι μαγισσών ενάντια σε όσους κρίνονταν ύποπτοι αντιαμερικανικών ενεργειών λόγω φιλοκομμουνιστικών φρονημάτων, πραγματικών ή εικαζόμενων. Μετά την απόλυσή του ως επίκουρου καθηγητή από το Princeton, ο Bohm μετανάστευσε στη Βραζιλία το 1951 όπου και παρέμεινε μέχρι το 1955, όταν μετακόμισε στο Ισραήλ. Λίγο αργότερα, το 1957, εγκαταστάθηκε στη Μεγάλη Βρετανία, όπου πέθανε το 1992. Κατά τη γνώμη μας, η σημαντικότερη συμβολή του Bohm στην κβαντική θεωρία είναι η ανακάλυψη, μαζί με τον φοιτητή του Yakir Aharonov, του *φαινομένου Bohm-Aharonov*: Ότι ένα φορτισμένο κβαντικό σωματίδιο μπορεί να «αισθανθεί» την παρουσία ενός μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό ενός «σωλήνα» περιφερόμενο γύρω από αυτόν, χωρίς όμως να διεισδύει ποτέ στο εσωτερικό του. Δηλαδή, χωρίς να έρθει ποτέ σε επαφή με το μαγνητικό πεδίο! Περισσότερα για τον D. Bohm θα βρείτε στο σχετικό άρθρο της Wikipedia.

όμως ότι το 1952 η κβαντομηχανική ήταν ήδη μια εδραιωμένη θεωρία με θεαματική επιβεβαίωση των προβλέψεών της, η όποια εναλλακτική ερμηνεία θα πρότεινε ο Bohm όφειλε να συμφωνεί με τη στατιστική ερμηνεία –δηλαδή με τη σχολή της Κοπεγχάγης– σε όλες τις μαθηματικές της συνέπειες. Δηλαδή σε όλες τις φυσικές προβλέψεις της. Κι αν το κατάφερνε –προσφέροντας ταυτόχρονα μια διαφορετική φυσική ερμηνεία–, τότε θα είχε αποδείξει ότι η πιθανοκρατική ερμηνεία δεν ήταν υποχρεωτική. Η ίδια φυσική μπορούσε να ιδωθεί διαφορετικά.

Αυτό που πρότεινε ο Bohm ήταν πολύ απλό: Η κατανομή πιθανότητας θέσεων του σωματιδίου

$$P(x,t) = \left|\psi(x,t)\right|^2 \tag{3.10}$$

–όπως τη θεσπίζει η σχολή της Κοπεγχάγης (κανόνας του Born)– επιδέχεται την εξής διαφορετική ερμηνεία: Το σωματίδιο που περιγράφεται από την (3.9) –«το σωματίδιο Bohm», για απλότητα[(*)]– δεν έχει μια καθορισμένη αρχική θέση x_0, αλλά μια *κατανομή αρχικών θέσεων* $\rho(x_0)$, οπότε και η θέση του $x(t)$ ύστερα από χρόνο t θα έχει μια κατανομή $\rho(x,t)$, που θα προκύπτει από την $\rho(x_0)$ αν η τροχιά $x(t)$ είναι γνωστή. (Θα δούμε σε λίγο πώς.)

Το καίριο σημείο είναι τώρα το εξής: Αν η αρχική κατανομή θέσεων του σωματιδίου είναι η ίδια με εκείνη που αντιστοιχεί στη δοθείσα *αρχική κυματοσυνάρτηση* $\psi(x,0)$, είναι δηλαδή

$$\rho(x_0) = \left|\psi(x_0,0)\right|^2, \tag{3.11}$$

τότε η χρονικά εξελιγμένη $\rho(x,t)$ –όπως προσδιορίζεται από τη λύση $x(t)$ της (3.9) (με $x(0)=x_0$, βεβαίως)– θα είναι ταυτόσημη με εκείνη που προβλέπει η χρονικά εξελιγμένη μορφή $\psi(x,t)$ της κυματοσυνάρτησης του προβλήματος. Δηλαδή

$$\rho(x,t) = \left|\psi(x,t)\right|^2. \tag{3.12}$$

Σημειώστε κατ' αρχάς ότι αυτή την ιδιότητα της θεωρίας de Broglie-Bohm θα έπρεπε να την περιμένουμε. Αφού το σωματίδιο του προβλήματος καθοδηγείται στην κίνησή του από ένα κύμα $\psi(x,t)$ που ικανοποιεί την εξίσωση Schrödinger, η χρονική εξέλιξη της αρχικής κατανομής των θέσεών του αναμένεται να είναι συμβατή με αυτήν την εξίσωση.

Συμπέρασμα: Ως προς την κατανομή της θέσης του σωματιδίου, η θεωρία de Broglie-Bohm μπορεί να αναπαραγάγει το κβαντικό αποτέλεσμα $P(x,t) = \left|\psi(x,t)\right|^2$ για κάθε t, αρκεί η αρχική κατανομή των θέσεών του να είναι εκείνη την οποία υπαγορεύει η αρχική κυματοσυνάρτηση $\psi(x,0)$.

[(*)] Για αποφυγή παρανόησης: Πρόκειται για το εκάστοτε σωματίδιο του προβλήματος, το οποίο ονομάζουμε «σωματίδιο Bohm» απλώς και μόνο επειδή η κίνησή του διέπεται από την εξίσωση de Broglie-Bohm.

Μέχρι εδώ, καλά. Ωστόσο, μερικά «φοιτητικά ερωτήματα» ανακύπτουν άμεσα. Τα εξής:

Q1: Γιατί να υποχρεούται η αρχική κατανομή θέσεων του σωματιδίου να έχει τη μορφή (3.11); Μήπως έτσι βάζουμε την «ορθόδοξη» ερμηνεία από το παράθυρο;

Q2: Και με τα άλλα φυσικά μεγέθη –ενέργεια, ορμή και στροφορμή– τι γίνεται; Η ορθόδοξη ερμηνεία έχει μια ξεκάθαρη «συνταγή» γι' αυτά. Σου λέει: Λύσε την εξίσωση ιδιοτιμών $\hat{A}\psi = a\psi$ για ένα τέτοιο μέγεθος και οι (συνήθως διάκριτες) ιδιοτιμές $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ που θα βρεις θα είναι οι μόνες *επιτρεπόμενες τιμές* του συγκεκριμένου μεγέθους. Το μέγεθος θα είναι *κβαντωμένο*. Ενώ για την πιθανότητα εμφάνισης κάθε μιας από αυτές σε μια μέτρηση, χρησιμοποίησε τον γενικό *τύπο του Born*

$$P_n = \left|(\psi_n, \psi)\right|^2,$$

όπου ψ_n η ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή a_n –δηλαδή $\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$– και ψ η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει την κατάσταση του μετρούμενου κβαντικού συστήματος τη δεδομένη στιγμή.

Ρωτάει λοιπόν ο φοιτητής: Ποιο είναι το αντίστοιχο «συνταγολόγιο» στη θεωρία de Broglie-Bohm; Ρωτάει όμως και τούτο:

Q3: Αν οι τροχιές Bohm είναι το στοιχείο που διαφοροποιεί τη νέα θεωρία (ή ερμηνεία) από τη γνωστή κβαντομηχανική, τότε τι κάνω με αυτές αν υποτεθεί ότι έλυσα τη διαφορική εξίσωση του Bohm –δηλαδή την (3.9)– και βρήκα τη λύση της για μια τυχούσα αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$; Τι φυσικά συμπεράσματα μπορώ να βγάλω γνωρίζοντας αυτήν την τροχιά;

Θα λύσουμε πρώτα λίγες απλές ασκήσεις και θα δούμε μετά αν έχουμε ικανοποιητικές απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα.

3.4 *Απλές ασκήσεις: Υπολογισμός των τροχιών Bohm στα πιο απλά κβαντικά συστήματα*

3.4.1 Άσκηση 1: Τροχιές Bohm για την ελεύθερη κίνηση στη μία διάσταση

Θεωρήστε γνωστό από το πρώτο κεφάλαιο (§ 1.4.5) ότι, αν η αρχική κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου έχει την γκαουσιανή μορφή

$$\psi(x,0) = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{\pi}}\, e^{-\lambda x^2/2}, \tag{3.13}$$

η χρονικά εξελιγμένη της μορφή θα είναι η

$$\psi(x,t) = N(t)e^{-\lambda(t)x^2/2}, \tag{3.14}$$

όπου $N(t)$ ένας νέος συντελεστής κανονικοποίησης (που η μορφή του δεν έχει σημασία για το πρόβλημά μας) και

$$\lambda(t) = \frac{\lambda m}{m + i\lambda\hbar t} \tag{3.15}$$

με $\lambda(0) = \lambda$, όπως θα έπρεπε. Η άσκηση για μας τώρα είναι η εξής: Να βρεθούν οι τροχιές Bohm για τη λύση (3.14) της ελεύθερης εξίσωσης Schrödinger.

Λύση: Η εξίσωση που έχουμε να λύσουμε θα απλοποιηθεί δραστικά –χωρίς απώλεια γενικότητας– αν επιλέξουμε (νοερά) ένα σύστημα μονάδων στο οποίο οι τρεις παράμετροι $\hbar$, m και λ του προβλήματος θα έχουν την τιμή μονάδα. Δηλαδή

$$\hbar = m = \lambda = 1. \tag{3.16}$$

Θα είναι τότε

$$\lambda(t) = \frac{1}{1+it} \equiv \frac{1-it}{1+t^2},$$

οπότε η (3.14) θα γράφεται ως

$$\psi(x,t) \sim e^{-\frac{1-it}{2(1+t^2)}x^2} \sim e^{-x^2/2(1+t^2)} \cdot e^{ix^2t/2(1+t^2)},$$

απ' όπου είναι φανερό ότι η φάση $S(x,t)$ της ψ θα είναι η

$$S(x,t) = \frac{x^2 t}{2(1+t^2)} \tag{3.17}$$

και η εξίσωση de Broglie-Bohm, $\dot{x} = S_x$ ($\hbar = m = 1$, όπως είπαμε), θα παίρνει τώρα τη συγκεκριμένη μορφή

$$\dot{x} = x\frac{t}{1+t^2}, \tag{3.18}$$

που είναι μια *διαχωρίσιμη εξίσωση*(*) η οποία λύνεται πολύ εύκολα (χωρίζοντας τα x από τα t) ως ακολούθως:

(*) Μια πρωτοτάξια διαφορική εξίσωση $\dot{x} = f(x,t)$ ονομάζεται *διαχωρίσιμη* αν η συνάρτηση $f(x,t)$ του δεύτερου μέλους της είναι γινόμενο μιας συνάρτησης του x επί μια συνάρτηση του t. Είναι δηλαδή $f(x,t) = A(x)B(t)$. Και τότε λύνεται πολύ εύκολα, διαχωρίζοντας τα x από τα t (μαζί και τα διαφορικά τους dx, dt) ως εξής:

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = A(x)B(t) \Rightarrow \frac{dx}{A(x)} = B(t)dt \Rightarrow \int \frac{dx}{A(x)} = \int B(t)\,dt \ \text{ κ.λπ.}$$

$$
\begin{aligned}
(3.18) \;\Rightarrow \qquad & \frac{dx}{dt} = x\frac{t}{1+t^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{tdt}{1+t^2} \\
& \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{tdt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} \\
& \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + c = \ln\sqrt{1+t^2} + c \\
& \Rightarrow e^{\ln x} = e^{\ln\sqrt{1+t^2}+c} \Rightarrow x = k\sqrt{1+t^2},
\end{aligned}
$$

όπου $k = e^c$ μια νέα αυθαίρετη σταθερά. Επιβάλλοντας τώρα και την αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$, παίρνουμε

$$
x(t) = x_0\sqrt{1+t^2} \tag{3.19}
$$

και αυτή είναι –για διάφορα x_0– η οικογένεια τροχιών Bohm του προβλήματος.

Η απορία του φοιτητή μας είναι πολύ εύλογη σ' αυτό το σημείο. Ας παρακολουθήσουμε τον σχετικό διάλογό του με τον δάσκαλο.

Φοιτητης: Μα, καλά, πώς γίνεται σε μια ελεύθερη κίνηση, όταν ουδεμία δύναμη ασκείται στο σωματίδιο, η κίνησή του να μην είναι ομαλή; Το οποίο, βέβαια, δεν χρειαζόταν καν να λύσουμε την εξίσωση (3.18) για να το μάθουμε. Φαίνεται κατευθείαν κι από τη μορφή της. Η ταχύτητα μεταβάλλεται. Τι συμπεραίνουμε λοιπόν; Ότι τα σωματίδια Bohm, ακόμα και στην ελεύθερη κίνηση, έχουν επιτάχυνση;

Δασκαλος: Εύλογη η απορία σου –προβλημάτισε και μένα, όταν έκανα την άσκηση για πρώτη φορά–, αντιλαμβάνεσαι όμως ότι τώρα η «κινούσα δύναμη» για τα σωματίδια Bohm προέρχεται από την ίδια την κυματοσυνάρτηση και μέσω αυτής «καταλαβαίνουν» και την εξωτερική δύναμη, που εδώ συμβαίνει να είναι μηδέν. Μάλιστα, από τον νόμο κίνησης του Bohm, $\dot{x} = (\hbar/m)S_x(x,t)$, είναι φανερό ότι η ταχύτητα του σωματιδίου είναι ανάλογη με την *κλίση της φάσης*, οπότε στην περίπτωσή μας, όπου η φάση αυξάνει ανάλογα με το x^2 (τύπος (3.17)), η κλίση της θα μεγαλώνει με το x και σίγουρα θα οδηγούσε σε άπειρη ταχύτητα για μεγάλα x αν δεν υπήρχε και η αντίστροφη εξάρτηση από τον χρόνο στη φάση (3.17), η οποία μειώνει την ταχύτητα για μεγάλα t.

Συμπέρασμα: Πρέπει να σκεφτόμαστε την κίνηση των σωματιδίων Bohm όχι με τον κλασικό νόμο κίνησης, αλλά με αυτόν που υπαγορεύει η φάση του εκάστοτε κύματος Schrödinger το οποίο τα οδηγεί.

ΦΟΙΤΗΤΗΣ: Ναι, πρέπει να το θυμάμαι διαρκώς αυτό. Ότι η κίνηση Bohm εξαρτάται από τη λύση $\psi(x,t)$ που χρησιμοποιούμε. Επομένως, για το ίδιο πρόβλημα – δηλαδή με την ίδια εξωτερική δύναμη– οι δυνατές κινήσεις είναι πολλές. Σωστά;

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: Έτσι ακριβώς. Παραδείγματος χάρη, αν ως λύση της ελεύθερης εξίσωσης Schrödinger πάρουμε την απλούστερη απ' όλες, δηλαδή το επίπεδο κύμα

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

–όπου $p = \hbar k$, $E = \hbar\omega$ $(= p^2/2m)$–, τότε είναι $S(x,t) = kx - \omega t$

$$\Rightarrow \dot{x} = v = \frac{\hbar}{m} S_x = \frac{\hbar}{m} k = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m}$$

και το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με το κλασικό. Το σωματίδιο Bohm κινείται τώρα με σταθερή ταχύτητα ίση με την αντίστοιχη κλασική.

ΦΟΙΤΗΤΗΣ: Όμως, ακόμα και η μπομιανή κίνηση πρέπει τουλάχιστον να ικανοποιεί το κλασικό όριο, όπως και η συνήθης κβαντομηχανική. Έτσι δεν είναι;

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: Βεβαίως. Και είναι μια καλή άσκηση για σένα να αποδείξεις ότι αυτό πράγματι συμβαίνει. Όμως, μην ξεχάσεις ότι το αποτέλεσμα (3.19) είναι στο σύστημα μονάδων όπου $\hbar = m = \lambda = 1$. Οπότε, πρέπει να το γράψεις (εξήγησε γιατί) ως

$$x(t) = x_0\sqrt{1 + (t/\tau_0)^2}, \tag{3.20}$$

όπου $\tau_0 = m/\hbar\lambda$ ο μοναδικός συνδυασμός των $\hbar$, m και λ που έχει διαστάσεις χρόνου. (Δείξε το.) Έτσι, στις συνήθεις μονάδες θα είναι

$$x(t) = x_0\sqrt{1 + \frac{\hbar^2\lambda^2}{m^2}\, t^2}\,,$$

και πράγματι στο κλασικό όριο ($\hbar \to 0$ ή $m \to \infty$) είναι $x(t) = x_0$. Το σωματίδιο Bohm είναι ακίνητο διότι και η αρχική του ταχύτητα βάσει της (3.18) είναι μηδέν. Επομένως, όπως το είπες, στο κλασικό όριο ακόμα και η κίνηση Bohm αποβάλλει τα κβαντικά χαρακτηριστικά της και καταλήγει στο κλασικό αποτέλεσμα.

ΦΟΙΤΗΤΗΣ: Βλέπω όμως τώρα άλλη μία ιδιομορφία της κίνησης Bohm: Ότι δεν μπορείς να δώσεις στο σωματίδιο όποια αρχική ταχύτητα θέλεις, αφού η εξίσωση κίνησης είναι *πρωτοτάξια*, οπότε αρκεί να δώσεις την αρχική θέση για να ξέρεις τι θα κάνει το σωματίδιο από κει και πέρα. Στο τωρινό πρόβλημα, παραδείγματος χάρη, όπως είπατε κι εσείς, η αρχική ταχύτητα είναι *υποχρεωτικά μηδέν*. Δεν είναι παράξενο αυτό;

Δάσκαλος: Είναι και δεν είναι! Δεν ξέρω πόσο σωστή είναι η σκέψη που θα πω τώρα, αλλά ας τη βγάλουμε στον… αέρα! Η εξίσωση κίνησης είναι μεν πρωτοτάξια, αλλά «τροφοδοτείται» από τη λύση $\psi(x,t)$ της εξίσωσης Schrödinger που είναι κι αυτή πρωτοτάξια ως προς τον χρόνο. Επομένως, είναι σαν να έχουμε μια ισοδύναμη εξίσωση κίνησης δευτέρας τάξεως. Ας προχωρήσουμε όμως σε μια δεύτερη άσκηση και επιστρέφουμε αν χρειαστεί.

3.4.2 Άσκηση 2: Στάσιμες καταστάσεις – Στάσιμες τροχιές!

Δείξτε ότι για τις *στάσιμες καταστάσεις* –δηλαδή τις *καταστάσεις καθορισμένης ενέργειας* ενός τυχόντος μονοδιάστατου δυναμικού $V(x)$– οι τροχιές Bohm $x(t)$ ισούνται με μια σταθερά. Είναι δηλαδή $x(0) = x_0$. Τα σωματίδια Bohm γι᾽ αυτές τις καταστάσεις είναι ακίνητα!

Λύση: Για τις στάσιμες καταστάσεις γνωρίζουμε ότι είναι

$$\psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}, \tag{3.21}$$

όπου $\psi(x)$ μια πραγματική κυματοσυνάρτηση που προκύπτει ως λύση της εξίσωσης ιδιοτιμών

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

του χαμιλτονιανού τελεστή $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$. (Βλ. § 1.4.4)

Από την (3.21) βλέπουμε αμέσως ότι $S(x,t) = -Et/\hbar$ ($=$ ανεξάρτητο του x), οπότε η εξίσωση de Broglie-Bohm $\dot{x} = (\hbar/m)S_x$ δίνει

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = x_0,$$

όπου x_0 η αρχική θέση του σωματιδίου.

Το αποτέλεσμα είναι τελείως τρελό! Σημαίνει, παραδείγματος χάρη, ότι στη θεμελιώδη κατάσταση του απειρόβαθου πηγαδιού ή του αρμονικού ταλαντωτή –καταστάσεις «σφύζουσας κίνησης», όπως μας διδάσκει η… ορθόδοξη κβαντομηχανική– το σωματίδιό μας, σύμφωνα με τη νέα θεωρία, μένει τελείως ακίνητο! Και δικαιολογημένα διαμαρτύρεται ο φοιτητής μας: «Μα, είναι σοβαρά πράγματα αυτά, δάσκαλε; Ή ο Bohr θα έχει δίκιο και ο Bohm θα λέει ανοησίες, ή το αντίστροφο. Πάντως, να είναι και οι δύο σωστοί, αποκλείεται! Ακόμα χειρότερα: Αν το σωματίδιο στη θεωρία του Bohm είναι ακίνητο σε ένα σημείο –έχει δηλαδή καθορισμένη θέση και ταχύτητα–, τότε η αρχή της αβεβαιότητας σίγουρα παραβιάζεται. Κι αν αυτό ισχύει, τότε η “επίσημη” κβαντομηχανική πάει για… ανακύκλωση. Μας είπατε όμως στο μάθημα, δάσκαλε, ότι ο Bohm ήταν πολύ σοβαρός άνθρωπος και δεν θα πρότεινε ποτέ μια θεωρία που στο πρώτο βήμα της θα ερχόταν σε σύγκρουση με τη συνήθη κβαντομηχανική. Ακριβώς το αντίθετο ήταν ο σκοπός του. Να διατυπώσει μια θεωρία η οποία θα κάνει τις ίδιες ακριβώς προβλέψεις με την κβαντομηχανική, αλλά που θα έχει έναν διαφορετικό φυσικό μηχανισμό από πίσω της. Κάτι δεν έχω καταλάβει καλά, δάσκαλε!!!»

Είναι προφανές ότι ο φοιτητής μας έχει δίκιο, αλλά θα του ζητήσουμε να κάνει λίγη υπομονή ακόμα, λύνοντας μαζί μας μερικές επιπλέον ασκήσεις. Η πρώτη από αυτές (Άσκηση 3) θα μας επιτρέψει να εφαρμόζουμε τη θεωρία του Bohm και σε πιο ρεαλιστικά τριδιάστατα προβλήματα, όπως π.χ. το άτομο του υδρογόνου.

3.4.3 Άσκηση 3: Γενίκευση στις τρεις διαστάσεις και το άτομο του υδρογόνου

Σκεφτείτε ποια είναι η εύλογη γενίκευση της εξίσωσης de Broglie-Bohm για την περίπτωση που το κβαντικό σωματίδιο βρίσκεται στον τριδιάστατο χώρο και η κυματοσυνάρτηση που το «οδηγεί» είναι της μορφής $\psi = \psi(x, y, z, t)$ ή, πιο συνοπτικά, $\psi = \psi(\boldsymbol{r}, t)$, όπου $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου. Εφαρμόστε την εξίσωση που βρήκατε για να πείτε τι κάνει το κατά Bohm ηλεκτρόνιο στη θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου.

Λύση: Για να μην… συσκοτίσουμε το προφανές, ας πούμε αμέσως ότι η ζητούμενη γενίκευση δεν μπορεί παρά να είναι η

$$\dot{x} = \frac{\hbar}{m} S_x(x, y, z, t), \quad \dot{y} = \frac{\hbar}{m} S_y(x, y, z, t), \quad \dot{z} = \frac{\hbar}{m} S_z(x, y, z, t), \tag{3.22}$$

δηλαδή όπως και στη μία διάσταση, αλλά για κάθε άξονα χωριστά. Ισοδύναμα –σε πιο πυκνή διανυσματική μορφή– θα έχουμε

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\hbar}{m} \nabla S(\boldsymbol{r}, t), \tag{3.23}$$

όπου $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ και $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ ο γνωστός διανυσματικός τελεστής *ανάδελτα* (ανεστραμμένο δέλτα).

Για τη θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου τα πράγματα θα είναι ακριβώς όπως στην προηγούμενη άσκηση. Η χρονική εξέλιξη θα πολλαπλασιάσει το χωρικό μέρος της κυματοσυνάρτησης (που είναι πραγματικό εν γένει) με τον παράγοντα φάσης $e^{-iEt/\hbar}$, οπότε θα είναι $S = -Et/\hbar \Rightarrow \nabla S = 0$

$$\Rightarrow \dot{\boldsymbol{r}}(t) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 = \text{σταθερό διάνυσμα.}$$

Σύμφωνα λοιπόν με τη θεωρία του Bohm, τα ηλεκτρόνια στη θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου είναι ακίνητα!!!

Ας δούμε όμως τι έχουν να πουν φοιτητής και δάσκαλος γι' αυτό το τρελό αποτέλεσμα. Ίδιο βέβαια με το προηγούμενο, αλλά πολύ πιο σοκαριστικό, γιατί τώρα αφορά το «χαϊδεμένο παιδί» της κβαντικής φυσικής: το άτομο του υδρογόνου. Και καλούμαστε να δεχθούμε μια τελείως διαφορετική εικόνα για το άτομο αυτό από εκείνη που εγκατέστησε στο μυαλό μας η καθιερωμένη κβαντομηχανική!

Φοιτητης: Αν όμως, δάσκαλε, τα ηλεκτρόνια είναι ακίνητα, τότε γιατί δεν πέφτουν στον πυρήνα, που φυσικά δεν σταματάει να τα έλκει; Προφανώς –απαντώ μόνος μου– γιατί ο νόμος κίνησής τους δεν είναι αυτός του Νεύτωνα αλλά του Bohm.

Δασκαλος: Όπως το λες. Θα πρέπει να θυμόμαστε διαρκώς ότι το «κινούν αίτιο» είναι τώρα η φάση της ψ και ειδικότερα η κλίση της. Κι αφού η φάση δεν έχει χωρική εξάρτηση στις στάσιμες καταστάσεις –εξαρτάται μόνο από το t–, η κλίση της θα είναι μηδέν, άρα και η ταχύτητα Bohm του ηλεκτρονίου το ίδιο.

Φοιτητης: Και με την αρχή της αβεβαιότητας τι γίνεται, δάσκαλε; Δεν είναι προφανές ότι η θεωρία de Broglie-Bohm την παραβιάζει κατάφωρα, αφού τα ηλεκτρόνια στέκουν ακίνητα σε ένα σημείο;

Δασκαλος: Οι μπομιανοί έχουν έναν αντίλογο σε αυτό –αλίμονο αν δεν είχαν–, δεν είναι όμως ακόμα η ώρα για να το κουβεντιάσουμε. Κράτησε λοιπόν την απορία σου και επιστρέφουμε αργότερα, όταν θα έχουμε εμβαθύνει λίγο περισσότερο στη θεωρία που έχουμε μπροστά μας.

Φοιτητης: Με ενοχλεί όμως και κάτι άλλο ως προς τη νέα εικόνα για το άτομο του υδρογόνου που καλούμαι να «καταναλώσω». Στην κβαντομηχανική που ξέρω, η κατανομή των πιθανών θέσεων του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα είναι αντικειμενικά καθορισμένη. Προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης Schrödinger που το χωρικό της μέρος (για τη θεμελιώδη κατάσταση) έχει τη γνωστή μορφή

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}\, e^{-r/a_0}, \tag{3.24}$$

όπου $a_0 = \hbar^2/me^2$ η *ακτίνα του Bohr*. Οπότε, για την αντίστοιχη ακτινική πυκνότητα πιθανότητας γνωρίζουμε ότι θα είναι(*)

$$\mathcal{P}(r) = 4\pi r^2 \big|\psi(r)\big|^2 = \frac{4}{a_0^3}\, r^2\, e^{-2r/a_0}. \tag{3.25}$$

Όμως, στη θεωρία του Bohm, ποιος υποχρεώνει την κατανομή αρχικών θέσεων του ηλεκτρονίου να έχει αυτή τη μορφή; Είδαμε ότι είναι στο χέρι μας να ορίζουμε την κατανομή των αρχικών θέσεων όπως εμείς θέλουμε, και οι μπομιανοί

(*) Δεν πρόκειται βέβαια για την πιθανότητα ανά μονάδα όγκου –που είναι ίση με $\big|\psi(r)\big|^2$–, αλλά για την πιθανότητα να βρούμε το ηλεκτρόνιο οπουδήποτε μέσα στον σφαιρικό δακτύλιο από r έως $r + dr$ που ο όγκος του είναι $4\pi r^2 dr$, απ' όπου και το αποτέλεσμα (3.25).

μάς λένε απλώς να τη θέσουμε ίση με την (3.25), ώστε να συμφωνεί με τη συνήθη κβαντομηχανική και στο μέλλον. Η συμφωνία άλλωστε για κάθε t είναι εδώ τετριμμένη, αφού μιλάμε για μια στάσιμη κατάσταση που η χρονική της εξέλιξη αφήνει ανεπηρέαστη την κατανομή θέσης του ηλεκτρονίου. Σωστά μέχρι εδώ, δάσκαλε;

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: Δεν μπορώ να διαφωνήσω μαζί σου.

ΦΟΙΤΗΤΗΣ: Τότε όμως, δάσκαλε, προβλέπει τίποτα η θεωρία του Bohm ή απλώς περιμένει τη «συμβατική» κβαντομηχανική να λύσει ένα πρόβλημα και μετά σπεύδει να προσθέσει «φιλοσοφική ορθότητα» στην παρουσίαση της λύσης του; Δηλαδή, εδώ, τι ακριβώς κάνει η θεωρία του Bohm; Απλώς ορίζει την αρχική κατανομή θέσεων του σωματιδίου ίση με τη «δική» μας; Ακόμα περισσότερο, όταν δεν μιλάμε πια για μια τυχούσα αρχική συνθήκη $\psi(\boldsymbol{r},0)$ –που και στην κοινή κβαντομηχανική μπορεί να είναι όποια θέλουμε– αλλά για την *αντικειμενική κατανομή θέσεων* του ηλεκτρονίου στη θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου. Από την οποία κατανομή προκύπτει το πόσο μακριά από τον πυρήνα βρίσκεται κατά μέσο όρο το ηλεκτρόνιο. Δηλαδή το μέγεθος του ατόμου. Ενώ από την ίδια λύση που μου έδωσε το αποτέλεσμα (3.24) –άρα και το ότι το μέγεθος του ατόμου είναι της τάξης του $a_0 = \hbar^2/me^2 \simeq 0{,}5\,\text{Å}$– προκύπτει επίσης ότι η ενέργεια του ηλεκτρονίου στη θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου είναι ίση με $E_1 = -me^4/2\hbar^2 = -13{,}6\,\text{eV}$. Οπότε το έργο ιοντισμού του –αυτή η βασική χημική ποσότητα που για πρώτη φορά στην ιστορία προβλέπεται θεωρητικά– είναι $13{,}6\,\text{eV}$. Για όλα αυτά έχει να μου πει τίποτα η μπομιανή μηχανική, δάσκαλε; Διότι αν δεν έχει, τότε τι είδους φυσική θεωρία είναι; Φυσική για… ποιητές;

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: Θα συμφωνήσω μαζί σου ως προς το εξής: Αν η θεωρία του Bohm διεκδικεί να είναι μια σοβαρή εναλλακτική στην ορθόδοξη κβαντομηχανική, θα πρέπει να μπορεί να απαντήσει με πειστικό τρόπο στα ερωτήματα που έθεσες. Προτείνω όμως να τη γνωρίσουμε λίγο καλύτερα προτού τη στήσουμε στον… τοίχο!

3.4.4 Άσκηση 4: Πώς οι τροχιές Bohm $x(t)$ μετατοπίζουν στον χρόνο την αρχική κατανομή θέσεων του σωματιδίου

Δείξτε ότι, αν η κατανομή αρχικών θέσεων του σωματιδίου Bohm της Άσκησης 1 είναι σύμφωνη με εκείνη που προβλέπει η αρχική κυματοσυνάρτηση, δηλαδή η

$$\rho(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x_0^2} \qquad (\hbar = m = \lambda = 1), \tag{3.26}$$

τότε *η μεταφορά της στον χρόνο* –με τον νόμο $x(t) = x_0\sqrt{1+t^2}$ των τροχιών Bohm– θα δώσει την ίδια κατανομή θέσεων με εκείνη που αντιστοιχεί στη χρονικά εξελιγμένη κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$. Δείξτε πρώτα ότι η μεταφορά στον χρόνο μιας αρχικής κατανομής θέσεων $\rho(x_0)$ θα γίνεται με τον κανόνα

$$\rho(x,t) = \rho\big(x_0(x,t)\big)\frac{\partial x_0}{\partial x}, \tag{3.27}$$

όπου x_0 η αρχική θέση, $x(t) = x(x_0,t)$ η τροχιά Bohm με αυτή την αρχική θέση και $x_0 = x_0(x,t)$ η αντίστροφη συνάρτηση της $x = x(x_0,t)$, η οποία εκφράζει την αρχική θέση συναρτήσει της τελικής.

Λύση: Γραμμένη ως $\rho(x,t)\Delta x = \rho\big(x_0(x,t)\big)\Delta x_0$, η (3.27) είναι πολύ εύλογη. Μας λέει ότι, πέραν της σύνδεσης του αρχικού σημείου x_0 με εκείνο –δηλαδή το x– στο οποίο θα φτάσει ύστερα από χρόνο t (αυτό κάνει η αντικατάσταση του x_0 με το $x_0(x,t)$), θα πρέπει επίσης να ληφθεί υπόψη η αντιστοίχιση των διαστημάτων Δx_0 και Δx των δύο κατανομών, δηλαδή ο λόγος $\Delta x_0/\Delta x \equiv \partial x_0/\partial x$. Στην περίπτωσή μας –όπου είναι–

$$x = x_0\sqrt{1+t^2} \Rightarrow x_0 = \frac{x}{\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow \frac{\partial x_0}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

ο τύπος (3.27) –σε συνδυασμό με τον (3.26)– θα δώσει

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}\,\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, e^{-x^2/(1+t^2)}$$

και το αποτέλεσμα αυτό είναι πράγματι εκείνο που δίνει και η $\psi(x,t)$ της Άσκησης 1. (Δείξτε το.)

Επαληθεύεται λοιπόν στο συγκεκριμένο πρόβλημα η *θεμελιώδης ιδιότητα* των τροχιών Bohm να «εξελίσσουν» μια αρχική κατανομή θέσεων του σωματιδίου με τον τρόπο που υπαγορεύει η εξίσωση Schrödinger.

Σημειώστε επ' ευκαιρία ότι η κατανομή $\rho(x,t)$ που βρήκαμε, συνεχώς απλώνει καθώς περνάει ο χρόνος. Γίνεται διαρκώς πλατύτερη και χαμηλότερη. Κι αυτό μπορούσαμε να το προβλέψουμε από την αρχή, αν παρατηρούσαμε –βάσει της εξίσωσης των τροχιών $x = x_0\sqrt{1+t^2}$– ότι τα σημεία που είναι στον θετικό ημιάξονα (δηλ. $x_0 > 0$) φεύγουν προς τα δεξιά, ενώ εκείνα που είναι στον αριστερό ($x_0 < 0$) προς τα αριστερά. Οπότε η κατανομή των θέσεων διαρκώς θα «τεντώνεται» και επομένως –λόγω διατήρησης του εμβαδού της– θα γίνεται ολοένα και χαμηλότερη.

3.4.5 Άσκηση 5: Τροχιές Bohm για μια κατάσταση επαλληλίας του αρμονικού ταλαντωτή

Στο σύστημα μονάδων $\hbar = m = \omega = 1$ του αρμονικού ταλαντωτή, οι δύο πρώτες ιδιοσυναρτήσεις του έχουν τη μορφή (§ 1.4.6)

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\, e^{-x^2/2}, \quad \psi_1(x) = \sqrt[4]{\frac{4}{\pi}}\, x e^{-x^2/2} \tag{3.28}$$

με αντίστοιχες ενέργειες $E_0 = 1/2$ και $E_1 = 3/2$.

α) Γράψτε την πιο γενική κατάσταση επαλληλίας των παραπάνω καταστάσεων και δείξτε ότι η χρονικά εξελιγμένη της μορφή θα γράφεται πάντα ως

$$\psi(x,t) = \left(A + Bxe^{-it}\right) e^{-x^2/2}, \tag{3.29}$$

όπου A και B κατάλληλες σταθερές.

β) Δείξτε ότι η εξίσωση de Broglie-Bohm για την κυματοσυνάρτηση (3.29) είναι η

$$\dot{x} = -\frac{AB\sin t}{A^2 + B^2x^2 + 2ABx\cos t}, \tag{3.30}$$

που γράφεται επίσης ως

$$\dot{x} = -\frac{\sigma\sin t}{x^2 + \sigma^2 + 2\sigma x\cos t}, \tag{3.31}$$

όπου $\sigma = A/B$.

γ) Δείξτε ότι οι λύσεις $x(t)$ της (3.31) είναι περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο 2π, όση του ημιτόνου και του συνημιτόνου στο δεύτερο μέλος της.

δ) Χρησιμοποιήστε τη *Mathematica* –ή όποιο άλλο σχετικό πρόγραμμα– για να λύσετε την (3.31) με διάφορες αρχικές συνθήκες και σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

Λύση: Να σημειώσουμε κατ' αρχάς το εξής: Για να υπάρξει κίνηση Bohm, η λύση $\psi(x,t)$ πρέπει να είναι μια κατάσταση επαλληλίας, αφού για τις ενεργειακές ιδιοκαταστάσεις το σωματίδιο Bohm παραμένει ακίνητο. Στην περίπτωση της ελεύθερης κίνησης που εξετάσαμε πρώτη, η γκαουσιανή κυματοσυνάρτηση την οποία χρησιμοποιήσαμε ήταν πράγματι μια κατάσταση επαλληλίας των ενεργειακών ιδιοκαταστάσεων της ελεύθερης κίνησης που είναι οι ίδιες με τις ιδιοκαταστάσεις της ορμής, δηλαδή οι $\psi_p(x) = Ne^{ipx/\hbar}$. Και το τεχνικό πλεονέκτημα της γκαουσιανής μορφής ήταν ότι γι' αυτήν μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη χρονική της εξέλιξη σε *κλειστή μορφή*.

Ο σκοπός του τωρινού προβλήματος είναι να δούμε τι συμβαίνει με την κίνηση Bohm όταν η κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$ είναι μια επαλληλία δύο μόνο ενεργειακών ιδιοκαταστάσεων. Και το απλούστερο σχετικό παράδειγμα είναι μια επαλληλία της θεμελιώδους και της πρώτης διεγερμένης κατάστασης του αρμονικού ταλαντωτή. Έστω λοιπόν ότι

$$\psi(x,0) = c_0\psi_0(x) + c_1\psi_1(x), \tag{3.32}$$

οπότε, ύστερα από χρόνο t, θα είναι (σε μονάδες με $\hbar = m = \omega = 1$)

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= c_0\psi_0(x)e^{-iE_0t} + c_1\psi_1(x)e^{-iE_1t} \\ &= e^{-iE_0t}\big(c_0\psi_0(x) + c_1\psi_1(x)e^{-i(E_1-E_0)t}\big) \end{aligned} \tag{3.33}$$

και δεδομένου ότι ο παράγοντας φάσης e^{-iE_0t} στην (3.33) δεν έχει φυσική σημασία (αφού είναι ανεξάρτητος του x), η (3.33) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\psi(x,t) = c_0\psi_0(x) + c_1\psi_1(x)e^{-it}, \tag{3.34}$$

όπου λάβαμε επιπλέον υπόψη ότι $E_1 - E_0 = 1$. Χρησιμοποιώντας τώρα και τις συγκεκριμένες μορφές των $\psi_0(x)$ και $\psi_1(x)$ –τύποι (3.28)–, η (3.34) γράφεται ως

$$\psi(x,t) = \left(\frac{c_0}{\sqrt[4]{\pi}} + c_1\sqrt[4]{\frac{4}{\pi}}\,xe^{-it}\right)e^{-x^2/2}$$

ή

$$\psi(x,t) = \big(A + Bxe^{-it}\big)e^{-x^2/2}, \tag{3.35}$$

όπου

$$A = \frac{c_0}{\sqrt[4]{\pi}}, \quad B = c_1\sqrt[4]{\frac{4}{\pi}} \tag{3.36}$$

και εννοείται βέβαια ότι $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$, ώστε η (3.32) να αντιπροσωπεύει μια κανονικοποιημένη ψ.

Για να βρούμε τώρα τη φάση $S(x,t)$ της λύσης (3.35), υποθέτουμε για λόγους απλότητας ότι τα c_0 και c_1 –άρα και τα A, B– είναι πραγματικοί αριθμοί, οπότε, με βάση τον τύπο του Euler ($e^{-it} = \cos t - i\sin t$), η (3.35) θα γράφεται ως

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \big(A + Bx(\cos t - i\sin t)\big)e^{-x^2/2} \\ &= \big((A + Bx\cos t) - iBx\sin t\big)e^{-x^2/2}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Για τον υπολογισμό του παράγοντα φάσης $S(x,t)$ και της παραγώγου του ως προς x, δείξτε πρώτα ότι για μια γενική έκφραση του τύπου(*)

(*) Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού βασίζεται στην ισοδύναμη γραφή της εξίσωσης de Broglie-Bohm (δείξτε την)

$$\dot{x} = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\,\frac{\psi_x}{\psi}.$$

$$f(x) + ig(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)} \tag{3.38}$$

θα είναι

$$\tan\theta = \frac{g}{f} \Rightarrow \theta' = \frac{g'f - gf'}{f^2 + g^2}, \tag{3.39}$$

οπότε για την (3.37) –γραμμένη επίσης στην πολική μορφή της $\psi = Re^{iS}$– δεν έχουμε παρά να εφαρμόσουμε τον τύπο (3.39) με $f = A + Bx\cos t$ και $g = -Bx\sin t$. Αγνοώντας δηλαδή τον παράγοντα $e^{-x^2/2}$ που είναι πραγματικός και δεν επηρεάζει τη φάση της ψ. Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε ότι

$$\dot{x}(t) = S_x(x,t) = -\frac{AB\sin t}{A^2 + B^2x^2 + 2ABx\cos t} \tag{3.40}$$

ή ισοδύναμα –διαιρέστε αριθμητή και παρονομαστή της (3.40) με B^2–

$$\dot{x} = -\frac{\sigma\sin t}{x^2 + \sigma^2 + 2\sigma x\cos t}, \tag{3.41}$$

όπου $\sigma = A/B$. Τα αποτελέσματα (3.30) και (3.31) που δώσαμε στην αρχή είναι επομένως σωστά. Η εξίσωση στην οποία καταλήξαμε –δηλαδή η (3.41)– δεν λύνεται ακριβώς, οπότε η χρήση ενός υπολογιστικού πακέτου όπως η *Mathematica* –για την οποία υπάρχει και δωρεάν έκδοση[*]– είναι υποχρεωτική. Μπορείτε όμως να δείξετε πρώτα ότι η λύση $x(t)$ θα είναι περιοδική ως προς t με την ίδια περίοδο, όπως και η συνάρτηση του δεύτερου μέλους ως προς t. Δηλαδή 2π.[†]

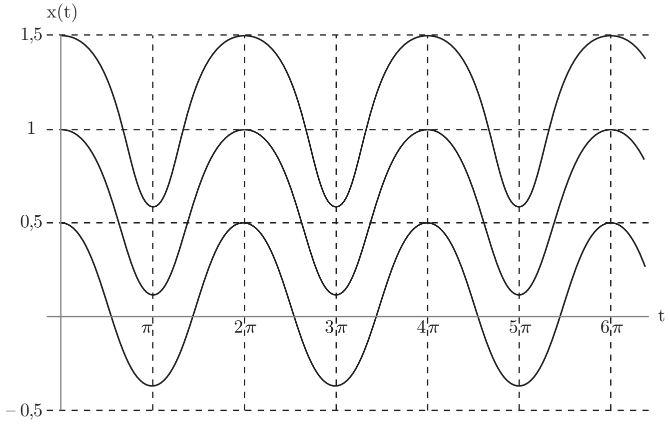
Παίρνοντας για την παράμετρο σ την αριθμητική τιμή $\sigma = 2$ και ως αρχικές συνθήκες τις

α) $x(0) = 1{,}5$, β) $x(0) = 1$, γ) $x(0) = 0{,}5$

η *Mathematica* μας δίνει για τις αντίστοιχες τροχιές $x(t)$ τις γραφικές παραστάσεις που απεικονίζονται στο Σχήμα 3.1.

(*) Μια πολύ βοηθητική εισαγωγή στη χρήση της *Mathematica* για τη λύση διαφορικών εξισώσεων θα βρείτε στο διαδικτυακό μάθημα του *Mathesis*: Κ. Νικολάου, «Εφαρμογές Διαφορικών Εξισώσεων με τη *Mathematica*».

(†) Ισχύει το εξής γενικό: Αν η συνάρτηση $f(x,t)$ είναι περιοδική ως προς t με περίοδο T –δηλαδή $f(x,t+T) = f(x,t)$–, τότε θα είναι επίσης περιοδικές με την ίδια περίοδο και οι λύσεις της πρωτοτάξιας εξίσωσης $\dot{x} = f(x,t)$.



Σχημα 3.1: *Τροχιές Bohm σε μια κατάσταση επαλληλίας του αρμονικού ταλαντωτή*

Όπως βλέπουμε, και οι τρεις τροχιές είναι περιοδικές με περίοδο 2π όση και η περίοδος $T = 2\pi/\omega$ (με $\omega = 1$) του αντίστοιχου κλασικού ταλαντωτή. Όμως, ενώ η κλασική ταλάντωση καλύπτει ένα συμμετρικό διάστημα $-a < x < +a$ γύρω από την αρχή, αυτό δεν ισχύει για τις τροχιές Bohm που μελετούμε τώρα. Παραδείγματος χάρη, εκείνη που ξεκινάει από το σημείο $x(0) = 1{,}5$ περιορίζεται στα θετικά x και συγκεκριμένα στο διάστημα $0{,}57 < x < 1{,}5$.

Ας δούμε πώς σχολιάζουν τα αποτελέσματα αυτά ο δάσκαλος και ο φοιτητής του:

Δασκαλος: Η δική μου πρώτη αντίδραση στα παραπάνω αποτελέσματα είναι μάλλον θετική. Θυμόμαστε κατ' αρχάς ότι στην κλασική φυσική ένα φορτισμένο σωματίδιο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ακτινοβολεί ΗΜ κύματα με συχνότητα όση και εκείνη της ταλάντωσής του. Κι επειδή στον αρμονικό ταλαντωτή η συχνότητα ταλάντωσης είναι ανεξάρτητη από το πλάτος της, η εκπεμπόμενη ακτινοβολία θα έχει κι αυτή μία και μοναδική συχνότητα. Στον κβαντικό ταλαντωτή ισχύει το ίδιο συμπέρασμα χάρη στο γεγονός ότι έχει ισαπέχουσες στάθμες και επιτρέπονται μόνο οι μεταβάσεις με $\Delta n = 1$, δηλαδή μεταξύ γειτονικών σταθμών.

Τι πιο καλόδεκτο λοιπόν από το να διαπιστώσουμε ότι και οι τροχιές Bohm είναι περιοδικές κι επομένως, αν το σωματίδιο είναι φορτισμένο, θα εκπέμπει –όποια κι αν είναι η τροχιά του– μία και μοναδική συχνότητα; Σωστά μέχρι εδώ;

Φοιτητης: Μάλλον ναι. Αυτό θα ήταν το αυτονόητο συμπέρασμα κάθε λογικού ανθρώπου που θα ερχόταν σε επαφή με τη θεωρία de Broglie-Bohm. Αφού μας λέτε –έτσι θα επιχειρηματολογούσα εγώ απευθυνόμενος στους μπομιανούς– ότι μόνο τα σωματίδια έχουν ρεαλιστική φυσική ύπαρξη, τότε, όταν βρούμε τις τροχιές τους για μια δεδομένη $\psi(x,t)$, το φυσικό περιεχόμενο της θεωρίας θα το φέρουν πλέον μόνο τα σωματίδια. Επομένως, αν είναι, για παράδειγμα, φορτισμένα, η ακτινοβολία που θα εκπέμπουν θα καθορίζεται από το είδος της κίνησής τους όπως και στην κλασική φυσική.

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: Βλέπω ότι συμφωνείς μαζί μου· απ' ό,τι φαίνεται όμως κάνουμε και οι δύο λάθος! Διότι, αν πράγματι ήταν σωστό αυτό που τόσο εύστοχα είπες –ότι, δηλαδή, άπαξ και βρήκαμε τις τροχιές τους, τη φυσική τη φέρουν πλέον τα σωματίδια–, τότε στο πρόβλημα της ελεύθερης κίνησης τι θα λέγαμε; Ότι αν το σωματίδιο είναι φορτισμένο θα ακτινοβολεί κι εκεί, αφού η τροχιά Bohm που βρήκαμε (για μια κατηγορία λύσεων) προβλέπει επιταχυνόμενη κίνηση; Κάτι που βεβαίως δεν ισχύει. Κι αφήνω σε σένα να σκεφτείς κι άλλα παρόμοια συμπεράσματα –δηλαδή *αντίθετα στην εμπειρία*– σχετικά με το πρόβλημα που τώρα συζητάμε.

ΦΟΙΤΗΤΗΣ: Όμως –και συγχωρήστε μου την έκφραση, αγαπητέ δάσκαλε– τώρα αρχίζω «να τα παίρνω στο κρανίο»! Διότι προσπάθησα πριν λίγες μέρες, μελετώντας τη βιβλιογραφία που μας δώσατε, να ξεκαθαρίσω το ζήτημα που τώρα συζητάμε (και ήταν στο μυαλό μου από την αρχή) και ποιο ήταν το αποτέλεσμα; Δεν κατάλαβα λέξη! Και θυμήθηκα αυτό που λέει συχνά ένας φίλος μου: «Όταν σου απαντά ένας φιλόσοφος, ξεχνάς και τι τον είχες ρωτήσει». Όμως εδώ υποτίθεται πως κάνουμε φυσική, δάσκαλε. Κι έχω την εντύπωση ότι είναι σαν να πρέπει *να ερμηνεύσουμε τις γραφές*! Ένα απλό ερώτημα είχα από την αρχή και απάντηση δεν βλέπω ακόμα. Τι στο καλό σημαίνουν φυσικά αυτές οι τροχιές; Αν τις βρούμε, ποια φυσικά συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε απ' αυτές; Κι αν οι *ερμηνευτές των γραφών* δεν καταδέχονται να απαντήσουν σε τόσο ταπεινά ερωτήματα, εσείς τι έχετε να μου πείτε;

Εντάξει, εντάξει, μας το ξεκαθαρίσατε από την αρχή ότι σε τούτο το θέμα μαθαίνετε κι εσείς μαζί μας. Δεν σας πιστεύω όμως τελείως, γιατί φαίνεται να καταλαβαίνετε πολύ περισσότερα απ' όσα μας λέτε. Σας ρωτώ ευθέως λοιπόν: Ποια είναι η ερμηνεία που εσείς δίνετε στις τροχιές Bohm; Μιλάμε για πραγματικές τροχιές και πραγματικά σωματίδια ή πρόκειται για… φαντάσματα;

ΔΑΣΚΑΛΟΣ: Για την ώρα, αγαπητέ φοιτητή μου, επίτρεψέ μου να πω μόνο τούτο: Αν οι μπομιανοί δίδασκαν από καιρού εις καιρόν ένα μάθημα με φοιτητές σαν και σένα, η θεωρία τους –αν, βέβαια, είναι σωστή– θα ήταν σίγουρα σε καλύτερη κατάσταση απ' ό,τι είναι σήμερα. Στο κάτω-κάτω, η μαζική διδασκαλία της είναι που βελτίωσε και την ορθόδοξη κβαντομηχανική, δίνοντάς της τη διαύγεια που σήμερα έχει. Για άλλη μια φορά λοιπόν σου ζητώ να συγκρατήσεις τις απορίες σου –διευκρινίζοντας ότι είναι και δικές μου– και να περιμένεις λίγο ακόμα.

3.5 Το «κβαντικό δυναμικό»: Μια πολυσυζητημένη και απολύτως περιττή έννοια

Κάποιοι αναγνώστες μπορεί να διερωτώνται αν στη θέση της εξίσωσης de Broglie-Bohm

$$\dot{x} = \frac{\hbar}{m} S_x(x,t) \tag{3.42}$$

θα μπορούσαμε να έχουμε μια «πιο νευτώνεια» εκδοχή της, του τύπου(*)

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{3.43}$$

όπου $U(x)$ ένα δυναμικό που θα περιλαμβάνει, εκτός από εκείνο που μας δόθηκε –ας το πούμε $V(x)$–, και έναν πρόσθετο όρο $Q(x,t)$ για τον οποίο περιμένουμε να αντιπροσωπεύει τη μη νευτώνεια επίδραση που ασκεί το κύμα-οδηγός στην κίνηση του σωματιδίου. Θα είναι δηλαδή

$$U = V + Q. \tag{3.44}$$

Αν η υπόθεσή μας είναι σωστή, θα φανεί αν παραγωγίσουμε τα δύο μέλη της (3.42) ως προς t και διαπιστώσουμε ότι το δεύτερο μέλος της μπορεί να γραφεί ως παράγωγος ως προς x μιας γνωστής έκφρασης. Και επειδή τα μαθηματικά γίνονται διαυγέστερα χωρίς την παρουσία των φυσικών σταθερών $\hbar$ και m, υιοθετούμε το σύστημα μονάδων όπου $\hbar = m = 1$ και έχουμε ότι

$$\dot{x} = S_x(x,t). \tag{3.45}$$

Παραγωγίζοντας τώρα τα δύο μέλη της (3.45) ως προς t παίρνουμε

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d}{dt} S_x = \frac{\partial S_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial S_x}{\partial t} \equiv S_{xx}\dot{x} + S_{xt}\Big|_{\dot{x}=S_x} \\ \Rightarrow \ddot{x} &= S_{xx}S_x + S_{xt} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}S_x^2 + S_t\right) \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\left(\frac{1}{2}S_x^2 + S_t\right)\right). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Η υπόθεσή μας αποδείχθηκε λοιπόν σωστή και το *ολικό δυναμικό* του προβλήματος –δηλαδή το άθροισμα του δοθέντος και του κβαντικού όρου Q– θα δίδεται –λόγω της (3.46)– από τον τύπο

$$U = -\left(\frac{1}{2}S_x^2 + S_t\right) \qquad (\hbar = m = 1). \tag{3.47}$$

(*) Υπενθυμίζουμε ότι *το δυναμικό* $V(x)$ –ή *η δυναμική ενέργεια* $V(x)$– και η δύναμη $F(x)$ συνδέονται με τη σχέση $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$.

Και δεδομένου ότι $U = V + Q$, το καθαρά κβαντικό δυναμικό Q θα δίδεται –βάσει της (3.47)– από τη σχέση

$$Q = -V - \left(\frac{1}{2}S_x^2 + S_t\right), \tag{3.48}$$

ενώ μπορείτε να δείξετε μόνοι σας –βλ. και το πρόβλημα 3 στο τέλος του κεφαλαίου– ότι η (3.48) είναι ισοδύναμη με την

$$Q = -\frac{1}{2}\frac{R_{xx}}{R}, \tag{3.49}$$

όπου $R(x,t)$ το *πλάτος* του κύματος $\psi(x,t) = R(x,t)\exp\big(iS(x,t)\big)$. Σε ένα τριδιάστατο πρόβλημα –όπου $\psi(\boldsymbol{r},t) = R(\boldsymbol{r},t)e^{iS(\boldsymbol{r},t)}$– θα έχουμε

$$Q = -\frac{1}{2}\frac{\nabla^2 R}{R}. \tag{3.50}$$

Στην πραγματικότητα, ο τύπος (3.48), παρ' ότι λιγότερο κομψός από τον (3.49) σε πρώτο κοίταγμα, είναι προτιμότερος γιατί μας λέει ότι μόνο η φάση $S(x,t)$ της λύσης $\psi(x,t)$ έχει σημασία, ενώ ο (3.49) ή ο (3.50) φαίνεται να εμπλέκουν και το πλάτος της. Έτσι, παραδείγματος χάρη, σε μια στάσιμη κατάσταση όπου είναι (κατά τα γνωστά)

$$\psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar} \Rightarrow S = -Et/\hbar = -Et \qquad (\hbar = 1)$$

θα έχουμε $S_x = 0$, $S_t = -E$, οπότε η (3.48) θα δώσει αμέσως

$$Q = E - V,$$

οπότε για το ολικό δυναμικό $U = V + Q$ θα έχουμε

$$U = E = \text{ σταθερά}$$

και η εξίσωση τύπου Νεύτωνα –δηλαδή η (3.43) (με $m = 1$ στην περίπτωσή μας)– θα δώσει

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow x(0) = x_0,$$

αφού πρέπει να είναι και $\dot{x}(0) = 0$ λόγω της αρχικής πρωτοτάξιας εξίσωσης $\dot{x}(t) = S_x = 0$.

Πολύς θόρυβος για το τίποτα! Μετατρέψαμε μια πρωτοτάξια εξίσωση σε δευτεροτάξια, για να επιστρέψουμε στο εξαρχής προφανές!

Ένα δεύτερο παράδειγμα θα μας δείξει αν όντως το κβαντικό δυναμικό μπορεί να μας προσφέρει ή όχι μια χρήσιμη εναλλακτική σκοπιά στην μπομιανή κίνηση.

Παραδειγμα: Υπολογίστε το κβαντικό δυναμικό Q για τη χρονικά εξελισσόμενη γκαουσιανή κυματοσυνάρτηση της ελεύθερης κίνησης (§ 3.4.1).

Λύση: Όπως είχαμε δει στη σχετική άσκηση, είναι

$$S(x,t) = \frac{x^2 t}{2(1+t^2)} \qquad (\hbar = m = \lambda = 1)$$

$$\Rightarrow S_x = \frac{xt}{1+t^2} \quad S_t = \frac{x^2}{2}\,\frac{(t)^{\cdot}(1+t^2) - t(1+t^2)^{\cdot}}{(1+t^2)^2} = \frac{x^2}{2}\,\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}S_x^2 + S_t = \frac{x^2}{2}\,\frac{t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{x^2}{2}\,\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{(1+t^2)^2}$$

$$\Rightarrow Q = -V - \left(\frac{1}{2}S_x^2 + S_t\right) = 0 - \frac{x^2}{2(1+t^2)^2} \tag{3.51}$$

και η εξίσωση τύπου Νεύτωνα είναι τώρα (πάντα σε μονάδες με $\hbar = m = \lambda = 1$):

$$\ddot{x} = \frac{x}{(1+t^2)^2}. \tag{3.52}$$

Πρόκειται σίγουρα για ένα… αξιοθαύμαστο επίτευγμα! Ξεκινήσαμε από μια πρωτοτάξια εξίσωση που λυνόταν πολύ εύκολα και καταφέραμε να φτάσουμε –με πολύ κόπο!– σε μια δευτεροτάξια που δεν ξέρουμε πώς να τη λύσουμε!!!

Μήπως όμως το κβαντικό δυναμικό –το (3.51) στην περίπτωσή μας– μας προσφέρει μια διαυγέστερη εικόνα για την κίνηση $x(t)$ των σωματιδίων Bohm; Η απάντηση είναι κατηγορηματική: *Απολύτως όχι*. Η αρχική πρωτοτάξια εξίσωση για το πεδίο ταχυτήτων

$$v = \dot{x} = \frac{xt}{1+t^2} \tag{3.53}$$

είναι πολύ προσφορότερη και για ποιοτική ανάλυση της λύσης σε σχέση με την (3.52). Κι αυτό φάνηκε ήδη σε μια σχετική συζήτηση νωρίτερα.

Επιπλέον, αν επιστρέψουμε στη γενική εξίσωση (3.43), γίνεται φανερό ότι αυτό που «βλέπει» η δεύτερη παράγωγος –το $\ddot{x}$– είναι το ολικό δυναμικό

$$U = V + Q = -\left(\frac{1}{2}S_x^2 + S_t\right),$$

οπότε η έκφραση (3.51) για το Q δεν λέει τίποτα από μόνη της, αφού ο πρώτος όρος της (το $-V$) θα πάει πάλι στο πρώτο μέλος για να σχηματίσει ξανά το ολικό δυναμικό U, που αυτό μόνο έχει σημασία στην εξίσωση κίνησης. Και πέρα από όλα αυτά, η «νευτώνεια» εξίσωση (3.43) δεν δέχεται όποια αρχική ταχύτητα θέλουμε, αφού αυτή δεσμεύεται από την αρχική πρωτοτάξια μορφή $\dot{x} = S_x(x,t)$ να έχει την τιμή $v_0 = S_x(x_0, 0)$.

Συμπέρασμα: Το κβαντικό δυναμικό Q είναι μια απολύτως πλεονάζουσα έννοια την οποία εισήγαγε ο Bohm στην αρχική του εργασία, φάνηκε όμως στη συνέχεια –τουλάχιστον στους σοβαρότερους μπομιανούς– ότι δεν προσθέτει τίποτα και πρέπει να εγκαταλειφθεί.(*)

Κι αν αποφασίσαμε να την παρουσιάσουμε εδώ, είναι για να γνωρίζει ο αναγνώστης περί τίνος πρόκειται και να μην εκπλαγεί όταν τη δει να αναφέρεται στη βιβλιογραφία. Χωρίς να ξεχνά βεβαίως –πέραν των άλλων– και τούτο: Ότι το κβαντικό δυναμικό δεν είναι μια δοσμένη συνάρτηση των x και t, αλλά εξαρτάται από την εκάστοτε λύση της εξίσωσης Schrödinger του προβλήματος.

Σημειώστε ακόμα ότι στις συνήθεις μονάδες οι τύποι (3.49) και (3.50) για το κβαντικό δυναμικό γράφονται ως

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{R_{xx}}{R} \quad (1\mathrm{D}) \quad \text{και} \quad Q = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\nabla^2 R}{R} \quad (3\mathrm{D}),$$

ενώ για τον τύπο (3.47) του ολικού δυναμικού στη μία διάσταση θα είναι

$$U = V + Q = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}S_x^2 + \hbar S_t\right) \quad (1\mathrm{D}).$$

Τουλάχιστον ο διαστατικός έλεγχος του παραπάνω αποτελέσματος είναι πολύ εύκολος, αφού και οι δύο όροι του πρέπει να έχουν διαστάσεις ενέργειας. Και πράγματι, έτσι είναι για τον όρο $\hbar S_t$, διότι το S είναι αδιάστατο, οπότε το S_t θα έχει διαστάσεις $1/T$, και σε συνδυασμό με το $\hbar$ που έχει διαστάσεις ενέργειας $\times$ χρόνο θα δίνει τελικά ενέργεια. Παρόμοια, για τον πρώτο όρο $(\hbar^2/2m)S_x^2$ θα έχουμε

$$[S_x] = \frac{1}{L} \Rightarrow [S_x^2] = \frac{1}{L^2} \Rightarrow \left[\frac{\hbar^2}{2m}S_x^2\right] = \frac{\hbar^2}{2mL^2}.$$

Και είναι πασίγνωστο από το μάθημα της κβαντικής φυσικής ότι η τελευταία παράσταση έχει διαστάσεις ενέργειας. Αν δεν το θυμάστε, δείτε τον τύπο $p^2/2m$ με $p = \hbar/\lambda$. Θα είναι τότε

$$\Rightarrow [p] = \frac{\hbar}{L} \Rightarrow \left[\frac{p^2}{2m}\right] = \frac{\hbar^2}{2mL^2}.$$

(*) Υπάρχουν εντούτοις περιπτώσεις (θα δούμε δύο τέτοιες στο επόμενο κεφάλαιο) όπου το κβαντικό δυναμικό μπορεί να είναι χρήσιμο παρότι μη αναγκαίο ως θεμελιώδης έννοια.

3.6 Ρεύμα πιθανότητας και τροχιές Bohm: Μια χρήσιμη συμπληρωματική εικόνα της μπομιανής κίνησης στον χώρο

Στην αρχή του κεφαλαίου εισαγάγαμε την έννοια των τροχιών Bohm και τη σχετική εξίσωση

$$\boldsymbol{v} = \frac{\hbar}{m}\nabla S(\boldsymbol{r},t) \qquad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{3.54}$$

με έναν πολύ άμεσο και φυσικά διαυγή τρόπο, ξεκινώντας από τη σχέση de Broglie του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού

$$\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k} \Rightarrow m\boldsymbol{v} = \hbar\boldsymbol{k} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \frac{\hbar}{m}\boldsymbol{k}$$

και θέτοντας μετά

$$\boldsymbol{k} = \nabla S(\boldsymbol{r},t), \tag{3.55}$$

που ισχύει για τη φάση $S(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t$ ενός επίπεδου κύματος και μπορεί εύλογα να γενικευτεί για τη φάση ενός τυχόντος κύματος Schrödinger $\psi(\boldsymbol{r},t)$, όπως αυτή ορίζεται από την πολική μορφή του

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = R(\boldsymbol{r},t)e^{iS(\boldsymbol{r},t)}. \tag{3.56}$$

Όλα τα παραπάνω μπορούμε τώρα να τα δικαιολογήσουμε και διαφορετικά μέσω της έννοιας του *ρεύματος πιθανότητας* $\boldsymbol{j}$ για το οποίο μιλήσαμε στο κεφάλαιο 1 και δείξαμε ότι δίδεται από τον τύπο

$$\boldsymbol{j} = \mathrm{Re}\left[\psi^*(\hat{\boldsymbol{v}}\psi)\right], \tag{3.57}$$

όπου

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}}{m} = -\frac{i\hbar}{m}\nabla$$

ο κβαντομηχανικός τελεστής ταχύτητας. Η (3.57) γράφεται επίσης ως

$$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left[\psi^*(\nabla\psi)\right], \tag{3.58}$$

οπότε –με ψ όπως στην (3.56)– θα είναι

$$\nabla(Re^{iS}) = (\nabla R)e^{iS} + R(i\nabla S)e^{iS}, \tag{3.59}$$

όπου στην (3.59) χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ταυτότητα

$$\nabla(f\cdot g) = (\nabla f)g + f(\nabla g),$$

που είναι μάλλον προφανής, αν σκεφτούμε ότι το ∇ είναι στην ουσία ένας πρωτοτάξιος τελεστής παραγώγισης, οπότε αναμένεται να ισχύει και γι' αυτόν ο κανόνας παραγώγισης γινομένου όπως και για τη συνήθη παράγωγο.

Με βάση την (3.59), θα είναι τώρα

$$\begin{aligned}\psi^*(\nabla\psi) &= Re^{-iS}(\nabla R + iR\nabla S)e^{iS} = R\nabla R + iR^2\nabla S\\ \Rightarrow &\mathrm{Im}\left[\psi^*(\nabla\psi)\right] = R^2\nabla S,\end{aligned}$$

οπότε η (3.58) θα δώσει τελικά ότι

$$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{m}R^2\nabla S = \frac{\hbar}{m}P(\nabla S), \tag{3.60}$$

όπου $P = |\psi|^2 = R^2$ η γνωστή μας πυκνότητα πιθανότητας θέσης.

Υπενθυμίζουμε τώρα (§ 1.5.2) ότι το ρεύμα πιθανότητας $\boldsymbol{j}$ και η πυκνότητα πιθανότητας P ικανοποιούν την *εξίσωση συνεχείας*

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0, \tag{3.61}$$

που είναι το κβαντομηχανικό ανάλογο της κλασικής εξίσωσης συνεχείας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0, \tag{3.62}$$

η οποία εκφράζει σε διαφορική μορφή την *αρχή διατήρησης της μάζας* σ' ένα κλασικό ρευστό με τοπική πυκνότητα μάζας $\rho = \rho(\boldsymbol{r}, t)$ και τοπική ταχύτητα $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$. Και όπως γνωρίζουμε από την κλασική φυσική, το $\boldsymbol{j}$ συνδέεται με τα ρ και $\boldsymbol{v}$ μέσω της σχέσης

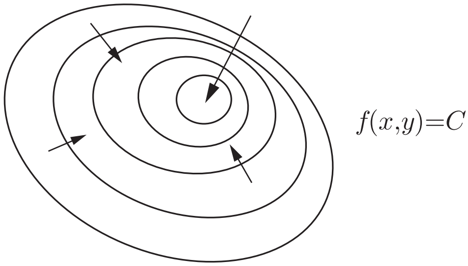
$$\boldsymbol{j} = \rho \cdot \boldsymbol{v}, \tag{3.63}$$

η οποία μας λέει το εξής πολύ απλό: Η ένταση ροής μάζας του ρευστού σε κάποιο σημείο –αυτό είναι το $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$– θα είναι ανάλογη με το πόσο γρήγορα κινείται το ρευστό εκεί και το πόσο πυκνό είναι στο ίδιο σημείο. Αντιπαραβάλλοντας την (3.61) με την (3.62), είναι φανερό ότι η πυκνότητα πιθανότητας $P(\boldsymbol{r}, t)$ είναι το κβαντικό ανάλογο της πυκνότητας μάζας ρ, οπότε η αντιπαραβολή των (3.60) και (3.63) οδηγεί στην πρόσθετη αναλογία ότι

$$\boldsymbol{v} \leftrightarrow \frac{\hbar}{m}\nabla S, \tag{3.64}$$

ότι δηλαδή στις μετακινήσεις πιθανότητας που προκαλεί η χρονική εξέλιξη τον ρόλο της κλασικής ταχύτητας $\boldsymbol{v}$ τον παίζει η κλίση της φάσης ∇S πολλαπλασιασμένη με τον συντελεστή $\hbar/m$.

Όλα τα παραπάνω καθιστούν βεβαίως πολύ εύλογη την εξίσωση de Broglie-Bohm –δηλαδή την (3.54)–, δεν πρέπει όμως να σπεύσουμε να συμπεράνουμε ότι το $\boldsymbol{v}$ που εμφανίζεται σ᾽ αυτήν είναι η πραγματική ταχύτητα του σωματιδίου του προβλήματος. Στην «ορθόδοξη» κβαντομηχανική αυτό σίγουρα δεν ισχύει, ενώ στη θεωρία de Broglie-Bohm έχει τεθεί ως το *βασικό της αξίωμα*. Σε επίπεδο φυσικής εικόνας, η (3.54) μάς λέει όμως και κάτι ακόμα που δεν το είχαμε τονίσει με έμφαση έως τώρα. Θυμηθείτε σχετικά ότι για μια τυχούσα συνάρτηση $f(x,y)$ –ας πούμε, δύο μεταβλητών– η κλίση της, $\nabla f(x,y) = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$, είναι ένα διάνυσμα κάθετο στις «ισοϋψείς» γραμμές τής f –δηλαδή εκείνες για τις οποίες η f έχει μια σταθερή τιμή– και με μέτρο τόσο μεγαλύτερο όσο μεγαλύτερη είναι η κλίση της επιφάνειας $z = f(x,y)$ στην περιοχή που συζητάμε. Ή, αν θέλετε, το διάνυσμα ∇f δείχνει «ευθεία ψηλά» στις «πλαγιές» του «βουνού» που αντιπροσωπεύει η επιφάνεια $z = f(x,y)$. Και όσο μεγαλύτερο είναι το μέτρο του, τόσο πιο απότομη είναι η πλαγιά (βλ. Σχήμα 3.2).



Σχημα 3.2: Η κίνηση Bohm είναι κάθετη προς τις ισοφασικές επιφάνειες –$S(x,y,t) =$ σταθ.– και τόσο πιο γρήγορη (μεγάλο $|\boldsymbol{v}|$) όσο πιο απότομη είναι η κλίση τους.

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η ιδέα των de Broglie και Bohm έχει μια ισχυρή ευλογοφάνεια. Αυτό όμως δεν αρκεί για να είναι και σωστή. Στο επόμενο κεφάλαιο θα έχουμε την ευκαιρία να την εξετάσουμε πιο προσεκτικά.

Προβλήματα – Εργασίες

1. Δείξτε ότι η εξίσωση de Broglie-Bohm μπορεί επίσης να γραφεί στη μία ή την άλλη από τις παρακάτω μορφές:

α) $\dot{x} = \dfrac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left(\dfrac{\psi_x}{\psi}\right)$

β) $\dot{x} = \dfrac{1}{P}\mathrm{Re}\big(\psi^* \hat{v}\psi\big) \qquad P = |\psi|^2$

Πώς εξηγείτε φυσικά τη δεύτερη από αυτές;

2. Δεδομένης της σημασίας που έχει η πολική μορφή(*)

$$\psi(x,t) = R(x,t)e^{iS(x,t)} \tag{1}$$

στο πλαίσιο της θεωρίας de Broglie-Bohm, είναι λογικό να διερευνήσουμε τη μορφή που παίρνει η εξίσωση Schrödinger ως προς τις συναρτήσεις R και S. Δείξτε λοιπόν –σε μονάδες $\hbar = m = 1$– ότι η αντικατάσταση (1) στην εξίσωση Schrödinger οδηγεί στο ακόλουθο σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων

$$R_t + S_x R_x + \frac{1}{2} S_{xx} R = 0 \tag{2}$$

$$R_{xx} - \big(S_x^2 + 2S_t + 2V\big)R = 0. \tag{3}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2) με R, δείξτε ότι γράφεται επίσης ως

$$P_t + (S_x P)_x = 0 \qquad (P = R^2), \tag{4}$$

και αφού εξηγήσετε το φυσικό περιεχόμενο αυτής της εξίσωσης δείξτε ότι οδηγεί φυσιολογικά στη σχέση $v = S_x$, που δεν είναι παρά η εξίσωση de Broglie-Bohm. Θα έχετε έτσι και τη γενική απόδειξη ότι οι τροχιές Bohm «εξελίσσουν» μια κατανομή αρχικών θέσεων $\rho(x_0) = \big|\psi(x_0,0)\big|^2$ στην $\rho(x,t) = \big|\psi(x,t)\big|^2$.

3. Χρησιμοποιήστε την εξίσωση (3) του παραπάνω προβλήματος για να δείξετε τον τύπο (3.49) για το κβαντικό δυναμικό, με αφετηρία την προηγούμενη μορφή του (3.48).

4. Ο αναγνώστης πιθανόν να διερωτάται αν υπάρχουν κι άλλες λύσεις της εξίσωσης Schrödinger –πέραν των στάσιμων καταστάσεων– για τις οποίες το σωματίδιο παραμένει ακίνητο. Για να συμβαίνει αυτό, θα πρέπει να είναι $S_x = 0 \Rightarrow S(x,t) =$ ανεξάρτητο του $x = \alpha(t)$. Αντικαταστήστε στις εξισώσεις (2) και (3) του προβλήματος 3.2 ένα S της μορφής $S = \alpha(t)$ και δείξτε ότι οδηγούμαστε υποχρεωτικά στις δέσμιες καταστάσεις του δοθέντος δυναμικού $V(x)$.

5. Μετά το προηγούμενο, το επόμενο ερώτημα που θα μπορούσαμε να θέσουμε είναι τούτο: Υπό ποιες συνθήκες το σωματίδιο Bohm του προβλήματος έχει ταχύτητα που εξαρτάται μόνο από τον χρόνο αλλά όχι από τη θέση στην οποία βρίσκεται; Οπότε, βεβαίως, θα πρέπει να είναι

$$S(x,t) = \alpha(t)x + \beta(t). \tag{1}$$

Εξετάστε ειδικότερα την περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή –στο σύστημα μονάδων $\hbar = m = k = 1$– για τον οποίο είναι $V = x^2/2$.

Δείξτε ειδικότερα –ως αποτέλεσμα της διερεύνησής σας– ότι μια συγκεκριμένη λύση $\psi(x,t)$ του αρμονικού ταλαντωτή, η οποία έχει τις παραπάνω προδιαγραφές, είναι η

$$\psi(x,t) \sim e^{-(x+\cos t)^2/2} e^{i(x\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{t}{2})}, \tag{2}$$

(*) Σημειώστε όμως ότι σε αντίθεση με την πολική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού $z = \rho e^{i\theta}$, όπου το $\rho = |z|$ είναι πάντα θετικό, η συνάρτηση $R(x,t)$ στην (1) μπορεί και να αλλάζει πρόσημο καθώς τα x και t μεταβάλλονται. Αντιπροσωπεύει επομένως το *πλάτος* του κύματος ψ, συμπεριλαμβανομένης μιας πραγματικής φάσης ± 1.

της οποίας η φάση

$$S(x,t) = x \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{t}{2} \tag{3}$$

έχει πράγματι τη γενική μορφή (1) με $\alpha(t) = \sin t$, $\beta(t) = \frac{1}{2}(\sin 2t - t)$. Σημειώστε επίσης ότι για $t = 0$ η (2) έχει τη μορφή

$$\psi(x,0) \sim e^{-(x+1)^2/2}, \tag{4}$$

που δεν είναι παρά η θεμελιώδης κατάσταση του ΑΤ, όμως με το κέντρο της μετατοπισμένο στο σημείο $a(0) = -1$. Οπότε η λύση (1) μας λέει το πώς εξελίσσεται χρονικά μια τέτοια «μετατοπισμένη» ιδιοκατάσταση του ταλαντωτή: Το κέντρο της θα ταλαντεύεται περιοδικά, σύμφωνα με τη σχέση $a(t) = -\cos t$.

6. Θεωρώντας τώρα ως δεδομένη τη λύση του προηγούμενου προβλήματος, υπολογίστε τις αντίστοιχες τροχιές Bohm και δείξτε ότι έχουν τη μορφή

$$x(t) = x_0 + 1 - \cos t$$

με αντίστοιχη ταχύτητα

$$v = \dot{x} = \sin t,$$

σε συμφωνία βεβαίως με την εξίσωση de Broglie-Bohm $v = S_x$ $(\hbar = m = k = 1)$.

Ποιες είναι οι κβαντομηχανικές προβλέψεις για τις μέσες τιμές $\langle x \rangle$ και $\langle p \rangle = \langle v \rangle$; Πώς σχολιάζετε τα αποτελέσματά σας; Κρατήστε τις όποιες παρατηρήσεις ή απορίες σας, γιατί θα σας φανούν χρήσιμες λίγο πιο κάτω.

7. Κβαντομηχανικά προβλήματα με λύσεις $\psi(x,t)$, τέτοιες ώστε οι αντίστοιχες τροχιές Bohm να είναι *μη τετριμμένες* –δηλαδή το σωματίδιο να μην μένει ακίνητο– και *να μπορούν να υπολογιστούν ακριβώς*, είναι σπάνιο είδος: Ουσιαστικά, το εξής... ένα: Το χρονικά εξελιγμένο γκαουσιανό κυματοπακέτο στην ελεύθερη κίνηση. Και τώρα –με τη διερεύνηση του προβλήματος 5– αποκτήσαμε άλλο ένα. Όσοι όμως από σας μπόρεσαν να βρουν τη σχετική λύση μόνοι τους καλούνται τώρα να τη διερευνήσουν λίγο πιο προσεκτικά για να δείξουν ότι, αν $\psi_n(x)$ είναι μια τυχούσα ιδιοσυνάρτηση του ΑΤ –με τη γνωστή ιδιοτιμή $E_n = n + (1/2)$–, τότε θα είναι λύση της χρονεξαρτημένης εξίσωσης Schrödinger η έκφραση

$$\psi(x,t) = \psi_n(x + \cos t) e^{iS(x,t)}, \tag{1}$$

όπου

$$S(x,t) = x \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t - E_n t, \tag{2}$$

η οποία μας λέει ότι μια αρχική κυματοσυνάρτηση της μορφής

$$\psi(x,0) = \psi_n(x+1), \tag{3}$$

δηλαδή μια *μετατοπισμένη ιδιοσυνάρτηση* με το κέντρο της στο σημείο $a(0) = -1$ εξελίσσεται χρονικά σύμφωνα με την (1). Δηλαδή το κέντρο της ταλαντεύεται περιοδικά σύμφωνα με τη σχέση $a(t) = -\cos t$, επιπλέον όμως αποκτά και μια μη τετριμμένη φάση όπως στην (2). Που είναι η ίδια όπως πριν –όταν η αρχική κυματοσυνάρτηση ήταν εκείνη της θεμελιώδους στάθμης–, με την αναμενόμενη διαφορά στον τελευταίο όρο της (2), ο οποίος αντιπροσωπεύει τον συνήθη παράγοντα φάσης των δέσμιων καταστάσεων. Εννοείται βέβαια –σε όλα τα προηγούμενα– ότι η αρχική «θέση» των ιδιοσυναρτήσεων μπορούσε να είναι σ' ένα τυχόν σημείο κι εμείς διαλέξαμε να είναι στο $x = -1$.

Με βάση τα παραπάνω, δείξτε τώρα το εξής βασικό συμπέρασμα: Οι τροχιές Bohm είναι *ακριβώς ίδιες* για όλη την άπειρη οικογένεια λύσεων (1) και είναι οι

$$x(t) = x_0 + 1 - \cos t, \tag{4}$$

όπως και στο Πρόβλημα 3.6. Το οποίο βέβαια δεν είναι καθόλου καλή είδηση για τις τροχιές Bohm. Σημαίνει ότι δεν περιέχουν σοβαρή πληροφορία για την κατάσταση του κβαντικού σωματιδίου για το οποίο μιλάμε.

8. Ο (Η) αναγνώστης (-τρια) θα διερωτάται ενδεχομένως τι κάνουμε με την αρχική θέση x_0, η οποία –στο πλαίσιο της θεωρίας de Broglie-Bohm– είναι μια «κρυμμένη» (δηλαδή άγνωστη) μεταβλητή για την οποία γνωρίζουμε μόνο την αρχική κατανομή τιμών της, που είναι η

$$\rho(x_0) = \left|\psi(x_0, 0)\right|^2. \tag{1}$$

Είναι λογικό λοιπόν να σκεφτούμε μήπως θα πρέπει, όταν υπολογίζουμε διάφορες φυσικές ποσότητες χρησιμοποιώντας αυτές τις τροχιές, να παίρνουμε και τον *στατιστικό μέσο όρο* πάνω στις δυνατές τιμές της «κρυμμένης μεταβλητής» x_0. Σ' αυτό το πνεύμα, επιστρέψτε στην § 3.4.1 του κειμένου όπου είχαμε βρει ότι

$$x(t) = x_0\sqrt{1+t^2} \qquad (\hbar = m = \lambda = 1), \tag{2}$$

ενώ για την κατανομή αρχικών θέσεων x_0 είχαμε

$$\rho(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x_0^2}. \tag{3}$$

Υπολογίστε την κινητική ενέργεια του σωματιδίου Bohm για την τροχιά (2) –που ισούται βέβαια με την ολική του ενέργεια, αφού μιλάμε για ελεύθερη κίνηση ($V = 0$)– και πάρτε κατόπιν τον στατιστικό μέσο όρο της. Το αποτέλεσμα που θα βρείτε (πάντα σε μονάδες $\hbar = m = \lambda = 1$) είναι

$$\overline{E} = \frac{t^2}{2(1+t^2)}\overline{x_0^2} = \frac{t^2}{2(1+t^2)}\int_{-\infty}^{+\infty} x_0^2 \rho(x_0)\, dx_0$$

$$\Rightarrow \overline{E} = \frac{t^2}{4(1+t^2)}, \tag{4}$$

και το συμπέρασμα είναι μάλλον σοκαριστικό! Έστω και μετά τη διαδικασία του μέσου όρου πάνω στην αρχική κατανομή θέσεων, η ενέργεια παραμένει συνάρτηση του χρόνου και επομένως *δεν διατηρείται*! Αντίθετα με ό,τι ισχύει για την κβαντομηχανική μέση τιμή $\langle E\rangle$, για την οποία –δείξτε το– έχουμε

$$\langle E\rangle = \frac{1}{4}, \tag{5}$$

ένα αποτέλεσμα με το οποίο η (4) συμφωνεί μόνο για $t \to \infty$.

Θορυβημένοι από το παραπάνω αποτέλεσμα, διερωτώμαστε τι συμβαίνει με τη διατήρηση μεγεθών όπως η ορμή, για την οποία –βάσει του τύπου (2)– θα είναι

$$p = mv = m\dot{x} = \dot{x} = x_0\,\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

δηλαδή *χρονικά εξαρτημένη*, όπως είχαμε επισημάνει και στη σχετική συζήτηση της § $3.4.1$. Όμως εδώ –επειδή η ορμή εξαρτάται γραμμικά από το x_0 και είναι $\bar{x}_0 = 0$– θα έχουμε $\bar{p} = 0$, που είναι το ίδιο με το κβαντομηχανικό αποτέλεσμα $\langle p\rangle = 0$ το οποίο καλείστε να αποδείξετε. Δείξτε επίσης ότι ισχύουν –και είναι μάλλον προφανείς– οι σχέσεις

$$\overline{x(t)} = \langle x\rangle = 0.$$

9. Έχοντας θορυβηθεί αρκετά από το προηγούμενο πρόβλημα –αν η θεωρία de Broglie-Bohm παραβιάζει την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας (ΑΔΕ), τότε γιατί να χάνουμε τον καιρό μας μ' αυτήν;–, επιστρέφουμε στο Πρόβλημα 3.7 για να δούμε τι συμβαίνει εκεί. Για… προθέρμανση δείξτε ότι για τις κβαντομηχανικές μέσες τιμές $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$ και $\langle E\rangle$ ισχύουν οι

$$\langle x\rangle = -\cos t, \qquad \langle p\rangle = \sin t \tag{1}$$

και

$$\langle E\rangle = E_n + \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Υπόδειξη: Δείξτε ότι για μια ψ γραμμένη στην πολική μορφή $\psi = Re^{iS}$ θα είναι (πάντα σε μονάδες $\hbar = m = 1$)

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} R^2\,dx, \quad \langle p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} R^2 S_x\,dx, \tag{3}$$

ενώ για την ενέργεια μπορείτε να λάβετε υπόψη ότι είναι διατηρήσιμη ποσότητα στην κβαντομηχανική και επομένως να την υπολογίσετε για $t = 0$, οπότε είναι $\psi(x,0) = \psi_n(x+1)$. Κι αν θεωρήσετε λογικό ότι η απλή μετατόπιση μιας κυματοσυνάρτησης δεν μεταβάλλει την κινητική της ενέργεια, τότε εύκολα καταλήγετε στο αποτέλεσμα (2) με βάση το πολύ γνωστό γεγονός ότι για τις μη μετατοπισμένες ιδιοσυναρτήσεις $\psi_n(x)$ είναι $\langle x^2\rangle = \langle p^2\rangle = E_n$.

Δείξτε τώρα ότι για τις τροχιές Bohm του προβλήματος

$$x(t) = x_0 + 1 - \cos t \Rightarrow p(t) = v(t) = \dot{x}(t) = \sin t \tag{4}$$

είναι αμέσως φανερό ότι

$$\overline{x(t)} = -\cos t, \quad \overline{p(t)} = \sin t, \tag{5}$$

αφού τώρα είναι

$$\rho(x_0) = \left|\psi_n(x_0+1)\right|^2 \Rightarrow \overline{x}_0 = -1 \tag{6}$$

και τα αποτελέσματά μας είναι κι εδώ –όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα– τα ίδια με τα αντίστοιχα κβαντικά. Όσο για την ενέργεια E του σωματιδίου Bohm, θα είναι τώρα

$$E(x_0,t) = \frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{2}p^2(t) = \frac{1}{2}(x_0+1-\cos t)^2 + \frac{1}{2}\sin^2 t, \tag{7}$$

απ' όπου είναι εύκολο να συμπεράνετε ότι

$$\overline{E} = \frac{1}{2}(E_n+1). \tag{8}$$

Υπόδειξη: Θέστε $x_0+1 = z_0 \Rightarrow \bar{z}_0 = 0$ και $\rho(z_0) = \left|\psi_n(z_0)\right|^2$. Το καλό νέο από το αποτέλεσμα (8) είναι ότι τώρα ο στατιστικός μέσος όρος για την ενέργεια βγήκε ανεξάρτητος του χρόνου: Τουλάχιστον κατά μέσο όρο, η ενέργεια διατηρείται. Το κακό νέο –αν πρέπει να θεωρηθεί έτσι– είναι ότι τώρα ο κβαντομηχανικός και ο στατιστικός μέσος όρος δεν είναι ίσοι. Ενδιαφέρουσα τροφή για σκέψη, την οποία αφήνουμε σε σας.

10. [Εργασία: *Προβλήματα με ακριβώς υπολογίσιμες τροχιές Bohm*] Παρ' ότι τα προβλήματα με μη τετριμμένες –δηλαδή *μη στάσιμες*– τροχιές Bohm που μπορούν να υπολογιστούν ακριβώς χαρακτηρίστηκαν νωρίτερα (βλ. Πρόβλημα 3.7) σπάνιο είδος, εντούτοις για τους… εραστές των ακριβών λύσεων, όπως ο συγγραφέας τούτου του βιβλίου, τα αντιπαραδείγματα –όπως αυτό του Προβλήματος 3.5– δεν είναι καθόλου λίγα. Και θα μπορούσαν να αναζητηθούν συστηματικά αν ξεκινούσαμε από την εξίσωση de Broglie-Bohm

$$\dot{x} = S_x(x,t) \qquad (\hbar = m = 1) \tag{1}$$

και ρωτούσαμε τι μορφή θα έπρεπε να έχει η συνάρτηση $S_x(x,t) = f(x,t)$ του δεύτερου μέλους τής (1), ώστε η σχετική εξίσωση να είναι ακριβώς επιλύσιμη. Η πιο προφανής τέτοια περίπτωση είναι η $f(x,t) = \alpha(t)x+\beta(t)$, οπότε η εξίσωση de Broglie-Bohm (dBB) θα είναι γραμμική και επομένως σίγουρα επιλύσιμη. Για τη συνάρτηση $S(x,t)$ καθ' εαυτήν θα είναι λοιπόν

$$S(x,t) = \frac{1}{2}\alpha(t)x^2 + \beta(t)x + \gamma(t), \tag{2}$$

όπου το $1/2$ μπήκε για να απαλλαγούμε από αυτό στην εξίσωση dBB, η οποία γράφεται ως

$$\dot{x} = \alpha(t)x + \beta(t), \tag{3}$$

που είναι πράγματι μια τυπική γραμμική εξίσωση. Δεν είναι όμως καθόλου προφανές ότι υπάρχουν εξισώσεις Schrödinger –για κάποια δυναμικά $V(x)$– που επιδέχονται λύσεις $\psi(x,t)$ με φάση όπως στην (2).

Για λόγους πολύ διαφορετικούς από τους τωρινούς, το ενδεχόμενο αυτό διερευνήθηκε συστηματικά στο βιβλίο: Σ. Τραχανάς, *Ακριβώς Επιλύσιμα Κβαντομηχανικά Δυναμικά*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2009, και ειδικότερα στο Κεφάλαιο 4 με τίτλο: «Χρονεξαρτημένα Επιλύσιμα Δυναμικά Ι». Ο (Η) αναγνώστης (-τρια) με κλίση προς τα ακριβώς επιλύσιμα προβλήματα –τα οποία έχουν συνήθως και πολύ ξεχωριστές φυσικές ιδιότητες– θα βρει εκεί ένα «χρυσωρυχείο» περιπτώσεων με ακριβώς υπολογίσιμες τροχιές Bohm, οι οποίες δίνουν λαβή και για πολύ «ενοχλητικά» ερωτήματα σχετικά με το φυσικό περιεχόμενο αυτών των τροχιών. Θα διαπιστώσει, παραδείγματος χάρη –μεταξύ πολλών άλλων–, ότι υπάρχει μια άπειρη κλάση αρχικών κυματομορφών $\psi(x,0)$ της ελεύθερης κίνησης ($V=0$), των οποίων η χρονικά εξελιγμένη μορφή $\psi(x,t)$ οδηγεί στις ίδιες ακριβώς τροχιές Bohm με εκείνες που είχαμε βρει στην § 3.4.1 για το γκαουσιανό κυματοπακέτο! Μια ισχυρή ένδειξη –μαζί με μια αντίστοιχη από το Πρόβλημα 3.7 παραπάνω– ότι οι τροχιές Bohm δεν είναι καθόλου «ευαίσθητες» στις λεπτομέρειες της λύσης, με αποτέλεσμα η πληροφορία που κουβαλούν να είναι πολύ περιορισμένη.

Αν τα παραπάνω είναι αρκούντως «ερεθιστικά», αυτό που ζητείται από τον αναγνώστη είναι να γράψει μια μικρή εργασία –ας πούμε, 10 σελίδων– για οποιοδήποτε επιμέρους ζήτημα κεντρίσει το ενδιαφέρον του σχετικά με τις ακριβώς υπολογίσιμες τροχιές Bohm.

11. Στην ορθόδοξη κβαντομηχανική είναι πολύ γνωστό ότι για μια σφαιρικά συμμετρική κυματοσυνάρτηση $\psi(r)$ είναι

$$\hat{\ell}_i\psi(r)=0 \qquad i=x,y,z, \tag{1}$$

που σημαίνει ότι το διάνυσμα της στροφορμής είναι αυστηρά μηδέν σε αυτήν την κατάσταση.

α) Για επανάληψη, αποδείξτε την (1) γνωρίζοντας μόνο τις εκφράσεις των τελεστών $\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y, \hat{\ell}_z$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

β) Αν τώρα συμβολίσουμε ξανά με $\hat{\boldsymbol{\ell}}$ το διάνυσμα της στροφορμής του σωματιδίου Bohm, θα είναι

$$\boldsymbol{\ell}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{r}\times\nabla S, \tag{2}$$

όπου $S=S(\boldsymbol{r},t)$ η φάση της τριδιάστατης κυματοσυνάρτησης του προβλήματος.

Χρησιμοποιήστε την (2) για να αποδείξετε ότι κατά την κβαντική κίνηση τύπου Bohm σε ένα κεντρικό δυναμικό, αν μια κυματοσυνάρτηση ψ ήταν σφαιρικά συμμετρική για $t=0$ –οπότε θα παραμείνει τέτοια και για κάθε t (εξηγήστε το)–, η στροφορμή του σωματιδίου Bohm θα είναι διαρκώς μηδενική: ($\boldsymbol{\ell}=0\,\forall t$).

12. Στην πρώτη από τις δύο σχετικές εργασίες του τού 1952 –με τις οποίες «ιδρύθηκε» η αντίστοιχη σχολή–, ο David Bohm προσπάθησε να αποδείξει επίσης την κβάντωση της στροφορμής των σωματιδίων που ακολουθούν την εξίσωση dBB, και ειδικότερα τη σχέση $\ell_z=\hbar m$ ($m=0,\pm1,\pm2,\pm\ell$) που όλοι γνωρίζουμε. Διατυπωμένη ως άσκηση, η βασική ιδέα ξεκινάει από τη γενική μορφή των ιδιοσυναρτήσεων σε ένα κεντρικό δυναμικό –ας πούμε, στο άτομο του υδρογόνου– που έχουν τη γνωστή μορφή

$$\psi_{n\ell m}(r,\theta,\phi,t)=R_{n\ell}(r)P_{\ell|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}\cdot e^{-iE_nt/\hbar}, \tag{1}$$

οπότε θα είναι

$$S=m\phi–E_nt/\hbar, \tag{2}$$

ενώ από την εξ. (2) του προηγούμενου προβλήματος θα έχουμε

$$\begin{aligned}\ell_z &= \hbar(xS_y - yS_x) \equiv \hbar\left(x\,\frac{\partial}{\partial y} - y\,\frac{\partial}{\partial x}\right)S \\ &= \hbar m\left(x\,\frac{\partial\phi}{\partial y} - y\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\right),\end{aligned}$$

απ' όπου –λαμβάνοντας υπόψη ότι $\tan\phi = y/x$– είναι εύκολο να δείξετε ότι πράγματι είναι

$$\ell_z = \hbar m$$

για τη λύση (1). Αυτό γίνεται πιο άμεσα φανερό για όσους γνωρίζουν τη σχέση

$$x\,\frac{\partial}{\partial y} - y\,\frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial\phi}.$$

Όμως το συμπέρασμα του Bohm ότι η θεωρία του εξηγεί και την κβάντωση της στροφορμής *δεν αντέχει σε αυστηρό έλεγχο*. Εξηγήστε γιατί ισχύει αυτή η κρίση μας, παίρνοντας ως παράδειγμα μια κατάσταση με $\ell \neq 0$ και $m = 0$, για την οποία η στροφορμή Bohm είναι $\boldsymbol{\ell} = 0$ (δείξτε το) και το ίδιο για το αντίστοιχο κβαντομηχανικό διάνυσμα, δηλαδή

$$\langle\ell_x\rangle = \langle\ell_y\rangle = \langle\ell_z\rangle = 0 \qquad \text{(δείξτε το)}$$

και όμως, η σχετική κατάσταση $\psi_{n\ell 0}$ είναι ιδιοκατάσταση του $\boldsymbol{\ell}^2$ με ιδιοτιμή $\hbar^2\ell(\ell + 1)$ με $\ell = 1$, δηλαδή διάφορη του μηδενός. Θα επανέλθουμε στο επόμενο κεφάλαιο, όπου θα δούμε ότι η στροφορμή όχι μόνο δεν είναι κβαντωμένη στη θεωρία dBB –ή τουλάχιστον στις καθιερωμενες ερμηνείες της–, αλλά δεν είναι καν μια διατηρήσιμη ποσότητα σε καμία ερμηνεία της.

13. Όπως συζητήσαμε στο κείμενο, αν γνωρίζετε την εξίσωση των τροχιών

$$x(t) = x_0\sqrt{1+t^2},$$

τότε θα μπορούσατε να συμπεράνετε από αυτήν ότι η αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$ διαρκώς απλώνει. Στην περίπτωση που η εξίσωσή σας ήταν η

$$x(t) = x_0 + 1 - \cos t,$$

τι θα συμπεραίνατε; Ισχύουν τα συμπεράσματά σας για τις κυματοσυναρτήσεις-οδηγούς αυτών των τροχιών;

14. Για να πειστείτε και μόνοι σας πόσο περιττή έννοια είναι το κβαντικό δυναμικό, υπολογίστε τη μορφή του για το Πρόβλημα 3.7 και λύστε μετά τη σχετική εξίσωση Νεύτωνα $\ddot{x} = -\partial U/\partial x$, για να υπολογίσετε τις σχετικές τροχιές Bohm. Με τον κανονικό τρόπο –δηλαδή λύνοντας την εξίσωση $\dot{x} = S_x$ ($\hbar = m = 1$)–, ο υπολογισμός δεν θα σας πήρε περισσότερο από ένα λεπτό. Με τον νέο, πολλαπλασιάστε τουλάχιστον επί δέκα!

15. [Εργασία: *Εξισώσεις dBB για ένα σύστημα δύο σωματιδίων. Σχετική κίνηση και κίνηση κέντρου μάζας*] Όπως γνωρίζουμε από την κλασική μηχανική, η κίνηση ενός συστήματος δύο σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με ένα δυναμικό το οποίο εξαρτάται μόνο από τη σχετική τους θέση $x = x_1 - x_2$ –είναι δηλαδή $V = V(x_1 - x_2)$– ανάγεται στην ελεύθερη κίνηση του κέντρου μάζας τους και στην κίνηση ενός υποθετικού σωματιδίου μάζας $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ –γνωστής ως *ανηγμένη μάζα*– υπό την επίδραση του δυναμικού $V(x)$, όπου $x = x_1 - x_2$. Είναι δηλαδή

$$M\ddot{X} = 0 : \text{ Κίνηση Κέντρου Μάζας} \tag{1}$$

και

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} : \text{ Σχετική Κίνηση} \tag{2}$$

όπου $X = (m_1 x_1 + m_2 x_2)/M$ η συντεταγμένη του κέντρου μάζας και $M = m_1 + m_2$ η ολική μάζα του συστήματος. Γνωρίζουμε επίσης ότι ένας ανάλογος διαχωρισμός των κινήσεων ισχύει και στη συνήθη κβαντομηχανική των δύο σωματιδίων, όπου η κυματοσυνάρτηση του συστήματος γράφεται ως

$$\psi(x_1, x_2, t) = \Psi(X, t)\psi(x, t). \tag{3}$$

Θα έχει δηλαδή τη *μορφή γινομένου*, αφού οι δύο κινήσεις είναι ανεξάρτητες. Και βεβαίως οι κυματοσυναρτήσεις των δύο επιμέρους κινήσεων –του κέντρου μάζας $\Psi(X, t)$ και της σχετικής κίνησης $\psi(x, t)$– θα ικανοποιούν τις δύο ανεξάρτητες εξισώσεις Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_{cM}\Psi, \qquad i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \tag{4}$$

όπου $H_{cM} = P^2/2M$ και $H = p^2/2m + V(x)$ οι χαμιλτονιανές της ελεύθερης κίνησης του κέντρου μάζας και της σχετικής κίνησης, αντίστοιχα ($P = p_1 + p_2 = M\dot{X}$ είναι η ολική ορμή των δύο σωματιδίων και $p = m\dot{x}$ η ορμή της σχετικής τους κίνησης). Δείξτε τώρα ότι ως προς τις μεταβλητές X και x οι εξισώσεις dBB των δύο σωματιδίων

$$\dot{x}_1 = (\hbar/m_1)S_{x_1}(x_1, x_2, t), \qquad \dot{x}_2 = (\hbar/m_2)S_{x_2}(x_1, x_2, t) \tag{5}$$

θα μεταγράφονται ως

$$\dot{X} = (\hbar/M)S_X(X, t), \qquad \dot{x} = (\hbar/m)S_x(x, t), \tag{6}$$

όπου $S(X, t)$ και $S(x, t)$ οι φάσεις των κυματοσυναρτήσεων $\Psi(X, t)$ και $\psi(x, t)$, αντίστοιχα. Συγκρατήστε τα παραπάνω γιατί θα μας χρειαστούν στο κεφάλαιο που ακολουθεί.