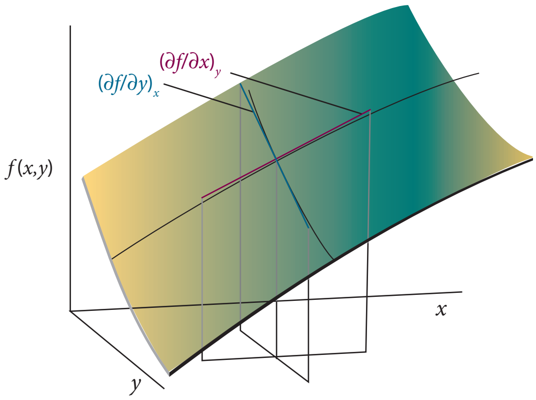
ΕΡΓΑΛΕΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΧΗΜΙΚΟΥ 9 **Μερικές παράγωγοι**

Η **μερική παράγωγος** μιας συνάρτησης περισσοτέρων της μίας μεταβλητών, όπως η $f(x,y)$, είναι η κλίση της συνάρτησης ως προς μια από τις μεταβλητές, με όλες τις άλλες μεταβλητές να διατηρούνται σταθερές (δείτε το παρακάτω σχήμα). Παρόλο που η μερική παράγωγος δείχνει το πώς μεταβάλλεται μια συνάρτηση όταν μεταβάλλεται μια μεταβλητή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιορίσουμε το πώς μεταβάλλεται η συνάρτηση όταν μεταβάλλονται περισσότερες της μίας μεταβλητές κατά απειροστή ποσότητα. Έτσι, αν f είναι μια συνάρτηση των x και y, τότε όταν τα x και y μεταβάλλονται κατά $\mathrm{d}x$ και $\mathrm{d}y$, αντίστοιχα, η f μεταβάλλεται κατά

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y$$

όπου χρησιμοποιείται το σύμβολο ∂ (αντί του d) για να δηλώσει μερική παράγωγο και ο δείκτης στην παρένθεση δηλώνει τη μεταβλητή που διατηρείται σταθερή.



Η ποσότητα $\mathrm{d}f$ ονομάζεται και **διαφορικό** της f. Οι διαδοχικές μερικές παράγωγοι μπορούν να ληφθούν με οποιαδήποτε σειρά:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\right)_y$$

Σύντομη εφαρμογή 9.1: Μερικές παράγωγοι

Έστω ότι $f(x,y) = ax^3y + by^2$ (η συνάρτηση που παριστάνεται γραφικά στο σχήμα) τότε

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 3ax^2y \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = ax^3 + 2by$$

Τότε, όταν τα x και y υφίστανται απειροστές μεταβολές, η f μεταβάλλεται κατά

$$\mathrm{d}f = 3ax^2y\,\mathrm{d}x + (ax^3 + 2by)\,\mathrm{d}y$$

Για να επαληθεύσουμε ότι η σειρά με την οποία υπολογίζουμε τη δεύτερη μερική παράγωγο δεν παίζει ρόλο, γράφουμε

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\right)_x = \left(\frac{\partial(3ax^2y)}{\partial y}\right)_x = 3ax^2$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\right)_y = \left(\frac{\partial(ax^3+2by)}{\partial x}\right)_y = 3ax^2$$

Έστω τώρα ότι το z είναι μια μεταβλητή από την οποία εξαρτώνται τα x και y (π.χ., τα x, y, και z μπορεί να αντιστοιχούν στα p, V, και T). Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

Σχέση 1. Όταν το x μεταβάλλεται με σταθερό z:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$$

Σχέση 2

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = \frac{1}{(\partial x/\partial y)_z}$$

Σχέση 3

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 2 και 3, καταλήγουμε στη **σχέση αλυσίδας του Euler**:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -1$$

Σχέση αλυσίδας του Euler