Ολοκλήρωση

Η ολοκλήρωση έχει να κάνει με τα εμβαδά κάτω από καμπύλες. Το **ολοκλήρωμα** μιας συνάρτησης $f(x)$, που συμβολίζεται με $\int f(x)\mathrm{d}x$ (το σύμβολο $\int$ είναι ένα επιμηκυμένο S που δηλώνει το άθροισμα), μεταξύ των δύο τιμών $x = a$ και $x = b$ ορίζεται αν φανταστούμε ότι ο άξονας x χωρίζεται σε λωρίδες μήκους δx και αν υπολογίσουμε το ακόλουθο άθροισμα:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta x \to 0} \sum_i f(x_i)\delta x$$

Ολοκλήρωμα [ορισμός]

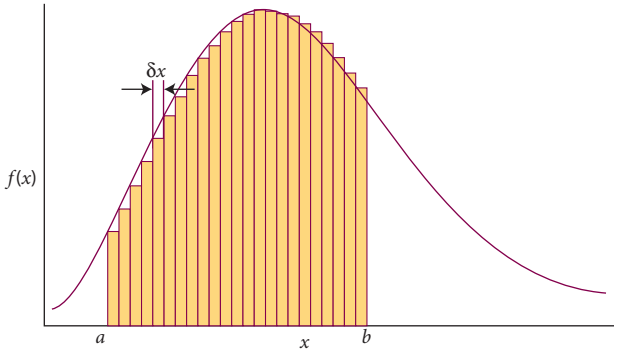
Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, το ολοκλήρωμα είναι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη μεταξύ των ορίων a και b. Η συνάρτηση που πρέπει να ολοκληρώσουμε ονομάζεται **ολοκληρωτέα συνάρτηση**. Αποτελεί εντυπωσιακό μαθηματικό γεγονός ότι η ολοκλήρωση και η παραγώγιση είναι αντίστροφες διαδικασίες. Με άλλα λόγια, αν παραγωγίσουμε μια συνάρτηση f, και έπειτα ολοκληρώσουμε τη συνάρτηση που προκύπτει, το αποτέλεσμα θα είναι η αρχική συνάρτηση f (με την απροσδιοριστία μιας σταθεράς).

Το ολοκλήρωμα στην προηγούμενη εξίσωση ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα**, διότι έχει καθορισμένα όρια. Αν τα όρια δεν είναι καθορισμένα, ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα**. Αν το αποτέλεσμα μιας αόριστης ολοκλήρωσης είναι $g(x) + C$, όπου C μια σταθερά, για να υπολογίσουμε το αντίστοιχο ορισμένο ολοκλήρωμα ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \{g(x)+C\}\Big|_a^b = \{g(b)+C\} - \{g(a)+C\}$$
$$= g(b) - g(a)$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Προσέξτε ότι η σταθερά ολοκλήρωσης απλοποιείται. Τα ορισμένα και τα αόριστα ολοκληρώματα που συναντούμε σε αυτό το βιβλίο αναφέρονται στο *Τμήμα πηγών*. Μπορούν επίσης να υπολογιστούν με τη βοήθεια μαθηματικού λογισμικού.



Περαιτέρω πληροφορίες

Όταν ένα αόριστο ολοκλήρωμα δεν έχει τη μορφή ενός από εκείνα που αναφέρονται στο *Τμήμα πηγών*, είναι μερικές φορές δυνατόν να το μετασχηματίσουμε σε μια από αυτές τις μορφές χρησιμοποιώντας τεχνικές ολοκλήρωσης όπως οι:

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες: Δείτε *Εργαλειοθήκη του χημικού* 15.

Αντικατάσταση. Εισάγουμε μια μεταβλητή u που σχετίζεται με την ανεξάρτητη μεταβλητή x (π.χ. μέσω μιας αλγεβρικής σχέσης όπως η $u = x^2 - 1$ ή μιας τριγωνομετρικής σχέσης όπως η $u = \sin x$). Εκφράζουμε το διαφορικό $\mathrm{d}x$ συναρτήσει του $\mathrm{d}u$ (για τις παραπάνω σχέσεις, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ και $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$, αντίστοιχα). Έπειτα μετασχηματίζουμε το αρχικό ολοκλήρωμα που ήταν γραμμένο συναρτήσει του x σε ολοκλήρωμα ως προς u για το οποίο, σε κάποιες περιπτώσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια πρότυπη μορφή από εκείνες που παρατίθενται στο *Τμήμα πηγών*.

Σύντομη εφαρμογή 4.1: Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Για να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x$, κάνουμε την αντικατάσταση $u = \cos x$. Άρα $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = -\sin x$, και συνεπώς $\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$. Το ολοκλήρωμα είναι επομένως

$$\int \cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x = -\int u^2\,\mathrm{d}u = -\tfrac{1}{3}u^3 + C = -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + C$$

Για να υπολογίσουμε το αντίστοιχο ορισμένο ολοκλήρωμα, μετατρέπουμε τα όρια ως προς x σε όρια ως προς u. Έτσι, αν τα όρια είναι $x = 0$ και $x = \pi$, τα όρια γίνονται $u = \cos 0 = 1$ και $u = \cos \pi = -1$:

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x = -\int_1^{-1} u^2\mathrm{d}u = \left\{-\tfrac{1}{3}u^3 + C\right\}\Big|_1^{-1} = \tfrac{2}{3}$$

Μια συνάρτηση μπορεί να εξαρτάται από περισσότερες από μία μεταβλητές, περίπτωση στην οποία είναι απαραίτητο να ολοκληρώσουμε πάνω σε όλες τις μεταβλητές, όπως στο:

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Εμείς (αλλά όχι όλοι) υιοθετούμε τη σύμβαση ότι τα a και b είναι τα όρια της μεταβλητής x, ενώ τα c και d είναι τα όρια για το y (όπως δηλώνουν τα αντίστοιχα χρώματα). Η διαδικασία αυτή είναι απλή αν η συνάρτηση είναι γινόμενο συναρτήσεων κάθε μεταβλητής και της μορφής $f(x,y) = X(x)Y(y)$. Σε αυτή την περίπτωση, το διπλό ολοκλήρωμα δεν είναι παρά ένα γινόμενο ολοκληρωμάτων:

$$I = \int_a^b \int_c^d X(x)Y(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b X(x)\mathrm{d}x \int_c^d Y(y)\mathrm{d}y$$

Σύντομη εφαρμογή 4.2: Ένα διπλό ολοκλήρωμα

Διπλά ολοκληρώματα της μορφής

$$I = \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \sin^2(\pi x/L_1)\sin^2(\pi y/L_2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

εμφανίζονται στη μελέτη της μεταφορικής κίνησης ενός σωματιδίου σε δύο διαστάσεις, όπου L_1 και L_2 είναι η μέγιστη απόσταση κίνησης κατά μήκος των αξόνων x και y αντίστοιχα. Για να υπολογίσουμε το I, γράφουμε

$$I = \overbrace{\int_0^{L_1} \sin^2(\pi x/L_1)\mathrm{d}x}^{\text{Ολοκλήρωμα Τ.2}} \overbrace{\int_0^{L_2} \sin^2(\pi y/L_2)\mathrm{d}y}^{\text{Ολοκλήρωμα Τ.2}}$$
$$= \left\{\tfrac{1}{2}x - \frac{\sin(2\pi x/L_1)}{4\pi/L_1} + C\right\}\Bigg|_0^{L_1} \left\{\tfrac{1}{2}y - \frac{\sin(2\pi y/L_2)}{4\pi/L_2} + C\right\}\Bigg|_0^{L_2}$$
$$= \tfrac{1}{4}L_1L_2$$