ιδιοτιμών με πίνακες

Σε μορφή πινάκων, μια **εξίσωση ιδιοτιμών** είναι

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \qquad \text{Εξίσωση ιδιοτιμών} \qquad (1α)$$

όπου $\boldsymbol{M}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με n γραμμές και n στήλες, λ μια σταθερά, η **ιδιοτιμή**, και $\boldsymbol{x}$ το **ιδιοδιάνυσμα**, ένας $n \times 1$ (στήλη) πίνακας που ικανοποιεί τις συνθήκες της εξίσωσης ιδιοτιμών και έχει τη μορφή:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Γενικά, υπάρχουν n ιδιοτιμές $\lambda^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, και n αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}^{(i)}$. Η εξ. 1α μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$(\boldsymbol{M} - \lambda\boldsymbol{1})\boldsymbol{x} = 0 \qquad (1β)$$

όπου $\boldsymbol{1}$ ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας, και όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $\boldsymbol{1x} = \boldsymbol{x}$. Η εξίσωση αυτή έχει λύση μόνο αν η ορίζουσα $|\boldsymbol{M} - \lambda\boldsymbol{1}|$ του πίνακα $\boldsymbol{M} - \lambda\boldsymbol{1}$ είναι μηδέν. Έπεται ότι οι n ιδιοτιμές μπορούν να βρεθούν από την επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$|\boldsymbol{M} - \lambda\boldsymbol{1}| = 0 \qquad (2)$$

Σύντομη εφαρμογή 25.1: Σύστημα εξισώσεων

Θεωρούμε την εξίσωση πινάκων

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

αναδιαταγμένη στη μορφή

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Από τους κανόνες για τον πολλαπλασιασμό πινάκων, η τελευταία μορφή αναπτύσσεται στην

$$\begin{pmatrix} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + (4-\lambda)x_2 \end{pmatrix} = 0$$

που δεν είναι παρά η γραφή του συστήματος των εξισώσεων

$$(1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \text{ και } 3x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0$$

Για να έχει το σύστημα λύσεις, θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη

$$|\boldsymbol{M} - \lambda\boldsymbol{1}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = 0$$

Η συνθήκη αυτή αντιστοιχεί στη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

με λύσεις $\lambda = +5{,}372$ και $\lambda = -0{,}372$, τις δύο ιδιοτιμές της αρχικής εξίσωσης.

Οι n ιδιοτιμές που βρίσκονται από την επίλυση των χαρακτηριστικών εξισώσεων χρησιμοποιούνται για την εύρεση των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων. Για τον σκοπό αυτό, ξεκινάμε θεωρώντας έναν $n \times n$ πίνακα $\boldsymbol{X}$, οι στήλες του οποίου σχηματίζονται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε όλες τις ιδιοτιμές. Έτσι, αν οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} \quad \cdots \boldsymbol{x}^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_n^{(n)} \end{pmatrix} \qquad (3α)$$

τότε ο πίνακας $\boldsymbol{X}$ είναι

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}^{(1)}\, \boldsymbol{x}^{(2)} \cdots \boldsymbol{x}^{(n)}) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{pmatrix} \qquad (3β)$$

Παρόμοια, σχηματίζουμε έναν $n \times n$ πίνακα $\boldsymbol{\Lambda}$ με τις ιδιοτιμές λ κατά μήκος της διαγωνίου και μηδέν παντού αλλού:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Τώρα όλες οι εξισώσεις ιδιοτιμών $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(i)} = \lambda_i\boldsymbol{x}^{(i)}$ μπορούν να συνδυαστούν στη μία εξίσωση πινάκων

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\Lambda} \qquad (5)$$

Σύντομη εφαρμογή 25.2: Εξισώσεις ιδιοτιμών

Στη *Σύντομη εφαρμογή* 25.1 βρήκαμε ότι αν $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ τότε $\lambda_1 = +5{,}372$ και $\lambda_2 = -0{,}372$. Τότε, με ιδιοδιανύσματα τα

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

σχηματίζουμε τους

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 5{,}372 & 0 \\ 0 & -0{,}372 \end{pmatrix}$$

Η έκφραση $\boldsymbol{M}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\Lambda}$ γίνεται

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2100)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5{,}372 & 0 \\ 0 & -0{,}372 \end{pmatrix}$$

η οποία αναπτύσσεται στην

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} & x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)} \\ 3x_1^{(1)} + 4x_2^{(1)} & 3x_1^{(2)} + 4x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}372x_1^{(1)} & -0{,}372x_1^{(2)} \\ 5{,}372x_2^{(1)} & -0{,}372x_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

Αυτός είναι ένας συμπαγής τρόπος γραφής των τεσσάρων εξισώσεων

$$x_1^{(1)}+2x_2^{(1)}=5{,}372x_1^{(1)} \qquad x_1^{(2)}+2x_2^{(2)}=-0{,}372x_1^{(2)}$$
$$3x_1^{(1)}+4x_2^{(1)}=5{,}372x_2^{(1)} \qquad 3x_1^{(2)}+4x_2^{(2)}=-0{,}372x_2^{(2)}$$

που αντιστοιχούν στο σύστημα των αρχικών δύο εξισώσεων και τις δύο ρίζες τους.

Τέλος, σχηματίζουμε τον $\boldsymbol{X}^{-1}$ από τον $\boldsymbol{X}$ και πολλαπλασιάζουμε από αριστερά την εξ. 5 με τον πρώτο:

$$\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Lambda} \tag{6}$$

Μια διάταξη της μορφής $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}$ ονομάζεται **μετασχηματισμός ομοιότητας**. Σε αυτή την περίπτωση ο μετασχηματισμός ομοιότητας $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}$ μετατρέπει τον $\boldsymbol{M}$ σε διαγώνιο (επειδή ο $\boldsymbol{\Lambda}$ είναι διαγώνιος). Έπεται ότι αν ο πίνακας $\boldsymbol{X}$ που κάνει τον $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}$ διαγώνιο είναι γνωστός, τότε το πρόβλημα έχει λυθεί: ο διαγώνιος πίνακας που παράγεται με αυτόν τον τρόπο έχει ως μόνα μη μηδενικά στοιχεία τις ιδιοτιμές, και ο πίνακας $\boldsymbol{X}$ που χρησιμοποιείται για τον μετασχηματισμό έχει τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ως στήλες. Στην πράξη, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν με χρήση μαθηματικού λογισμικού.

Σύντομη εφαρμογή 25.3: Μετασχηματισμοί ομοιότητας

Για να εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό ομοιότητας στον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ από τη *Σύντομη εφαρμογή* 25.1, είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε μαθηματικό λογισμικό για να βρούμε τη μορφή των $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{X}^{-1}$. Το αποτέλεσμα είναι

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 0{,}416 & 0{,}825 \\ 0{,}909 & -0{,}566 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{X}^{-1}=\begin{pmatrix} 0{,}574 & 0{,}837 \\ 0{,}922 & -0{,}422 \end{pmatrix}$$

Αυτό μπορεί να επαληθευθεί με την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού

$$\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 0{,}574 & 0{,}837 \\ 0{,}922 & -0{,}422 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}416 & 0{,}825 \\ 0{,}909 & -0{,}566 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 5{,}372 & 0 \\ 0 & -0{,}372 \end{pmatrix}$$

Το αποτέλεσμα είναι πράγματι ο διαγώνιος πίνακας $\boldsymbol{\Lambda}$ που υπολογίστηκε στη *Σύντομη εφαρμογή* 25.2. Έπεται ότι τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}^{(1)}$ και $\boldsymbol{x}^{(2)}$ είναι

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{pmatrix} 0{,}416 \\ 0{,}909 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{pmatrix} 0{,}825 \\ -0{,}566 \end{pmatrix}$$