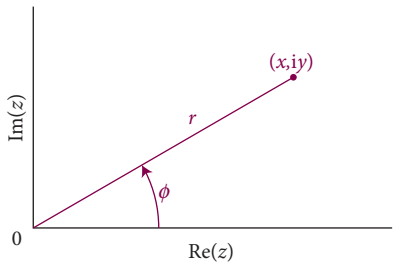
ΕΡΓΑΛΕΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΧΗΜΙΚΟΥ 16 **Τύπος του Euler**

Ο μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα σημείο σε ένα επίπεδο, το **μιγαδικό επίπεδο**, με το Re(z) στον άξονα x και το Im(z) στον άξονα y (Σχέδιο 1). Η θέση του σημείου μπορεί επίσης να καθοριστεί μέσω μιας απόστασης r και μιας γωνίας ϕ (οι πολικές συντεταγμένες). Τότε $x = r\cos\phi$ και $y = r\sin\phi$, επομένως έχουμε ότι

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Η γωνία ϕ, που ονομάζεται **όρισμα** του z, είναι η γωνία που σχηματίζει το r με τον άξονα x. Επειδή $y/x = \tan\phi$, προκύπτει

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} = |z| \qquad \phi = \arctan\frac{y}{x}$$



Σχέδιο 1

Μια από τις πιο χρήσιμες σχέσεις για τους μιγαδικούς αριθμούς είναι ο **τύπος του Euler**:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

από τον οποίον προκύπτει ότι η $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$z = re^{i\phi}$$

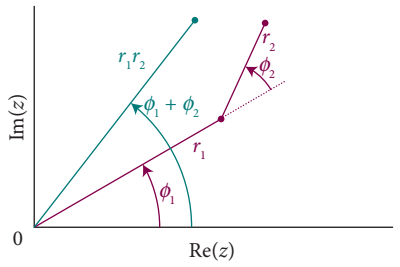
Δύο ακόμα χρήσιμες σχέσεις προκύπτουν αν σημειώσουμε ότι $e^{-i\phi} = \cos(-\phi) + i\sin(-\phi) = \cos\phi - i\sin\phi$. Τότε έπεται ότι

$$\cos\phi = \tfrac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \qquad \sin\phi = -\tfrac{1}{2}i(e^{i\phi} - e^{-i\phi})$$

Η πολική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού χρησιμοποιείται ευρέως για την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων. Παραδείγματος χάριν, το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών σε πολική μορφή είναι

$$z_1z_2 = (r_1e^{i\phi_1})(r_2e^{i\phi_2}) = r_1r_2e^{i(\phi_1+\phi_2)}$$

Ο πολλαπλασιασμός αυτός απεικονίζεται στο Σχέδιο 2.



Σχέδιο 2

Σύντομη εφαρμογή 16.1: Πολική αναπαράσταση

Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $z = 8 - 3i$. Από τη *Σύντομη εφαρμογή* 14.1, $r = |z| = 73^{1/2}$. Το όρισμα του z είναι:

$$\phi = \arctan\left(\frac{-3}{8}\right) = -0{,}359 \text{ rad, ή } -20{,}6°$$

Η πολική μορφή του αριθμού είναι επομένως

$$z = 73^{1/2}e^{-0{,}359i}$$

Σύντομη εφαρμογή 16.2: Ρίζες

Για να προσδιορίσουμε την πέμπτη ρίζα του $z = 8 - 3i$, σημειώνουμε ότι από τη *Σύντομη εφαρμογή* 16.1, γνωρίζουμε ότι η πολική του μορφή είναι

$$z = 73^{1/2}e^{-0{,}359i} = 8{,}544e^{-0{,}359i}$$

Η πέμπτη ρίζα είναι επομένως

$$z^{1/5} = (8{,}544e^{-0{,}359i})^{1/5} = 8{,}544^{1/5}e^{-0{,}359i/5} = 1{,}536e^{-0{,}0718i}$$

Έπεται ότι

$$x = 1{,}536\cos(-0{,}0718) = 1{,}532$$

και

$$y = 1{,}536\sin(-0{,}0718) = -0{,}110$$

(σημειώστε ότι τα ϕ είναι σε ακτίνια), έτσι

$$(8 - 3i)^{1/5} = 1{,}532 - 0{,}110i$$