ΕΡΓΑΛΕΙΟΘΗΚΗ ΤΟΥ ΧΗΜΙΚΟΥ 12 **Αναπτύγματα σε σειρές**

Μια συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της τιμής της στη γειτονιά του $x = a$ με χρήση της **σειράς Taylor**

$$f(x) = f(a) + \left(\frac{df}{dx}\right)_a (x-a) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_a (x-a)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{d^nf}{dx^n}\right)_a (x-a)^n \qquad \text{Σειρά Taylor}$$

όπου το σύμβολο $(\ldots)_a$ σημαίνει ότι η παράγωγος υπολογίζεται στο $x = a$ και το $n!$ δηλώνει το **παραγοντικό** που ορίζεται ως

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1, \quad 0! \equiv 1 \qquad \text{Παραγοντικό}$$

Η **σειρά Maclaurin** για μια συνάρτηση είναι ειδική περίπτωση της σειράς Taylor για $a = 0$. Οι ακόλουθες σειρές Maclaurin χρησιμοποιούνται σε διάφορα σημεία στο βιβλίο:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Τα αναπτύγματα σε σειρές χρησιμοποιούνται για την απλούστευση υπολογισμών, διότι όταν $|x| \ll 1$ είναι δυνατόν, σε ικανοποιητική προσέγγιση, να τερματίσουμε τη σειρά μετά από έναν ή δύο όρους. Έτσι, υπό την προϋπόθεση ότι $|x| \ll 1$,

$$(1 + x)^{-1} \approx 1 - x$$

$$e^x \approx 1 + x$$

$$\ln(1 + x) \approx x$$

Λέμε ότι μια σειρά **συγκλίνει** αν το άθροισμα τείνει σε μια πεπερασμένη, ορισμένη τιμή καθώς το n τείνει στο άπειρο. Αν όχι, λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει**. Έτσι, το ανάπτυγμα σε σειρά του $(1+x)^{-1}$ συγκλίνει για $|x| < 1$ και αποκλίνει για $|x| \geq 1$. Τα κριτήρια σύγκλισης μελετώνται σε βιβλία μαθηματικών.