ΕΜΒΑΘΥΝΣΗ 11 **Ο τυχαίος βηματισμός**

Σκοπός μας εδώ είναι να παρουσιάσουμε τις λεπτομέρειες που οδήγησαν στην εξ. 16Γ.14 του βιβλίου

$$P(x,t)=\left(\frac{2\tau}{\pi t}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-x^2\tau/2td^2} \qquad (1)$$

Όπως και στο βιβλίο, υποθέτουμε ότι γίνονται N_R βήματα προς τα δεξιά και N_L προς τα αριστερά (με οποιαδήποτε σειρά), με τον συνολικό αριθμό βημάτων να είναι $N = N_\mathrm{L} + N_\mathrm{R}$. Η πιθανότητα να συμβεί αυτός ο συνδυασμός βημάτων είναι

$$P=\frac{W}{2^N}=\frac{N!}{(N-N_\mathrm{R})!N_\mathrm{R}!2^N}$$

Βήμα 1 *Εκφράζουμε την πιθανότητα ως λογάριθμο και χρησιμοποιούμε την προσέγγιση Stirling για να εκφράσουμε τα παραγοντικά*

Παίρνοντας τους (φυσικούς) λογαρίθμους και των δύο μελών, βρίσκουμε

$$\ln P=\ln N!-\{\ln(N-N_\mathrm{R})!+\ln N_\mathrm{R}!+\ln 2^N\}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την πιο ακριβή μορφή της προσέγγισης Stirling, που είναι η

$$\ln x!\approx\ln(2\pi)^{1/2}+(x+\tfrac{1}{2})\ln x-x$$

και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\ln P&=\ln(2\pi)^{1/2}+\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\ln N-N-\ln(2\pi)^{1/2}\\&\quad-\left(N-N_\mathrm{R}+\tfrac{1}{2}\right)\ln(N-N_\mathrm{R})+N-N_\mathrm{R}-\ln(2\pi)^{1/2}\\&\quad-\left(N_\mathrm{R}+\tfrac{1}{2}\right)\ln N_\mathrm{R}+N_\mathrm{R}-\ln 2^N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=-\ln(2\pi)^{1/2}2^N+\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\ln N\\&\quad-\left(N-N_\mathrm{R}+\tfrac{1}{2}\right)\ln(N-N_\mathrm{R})-\left(N_\mathrm{R}+\tfrac{1}{2}\right)\ln N_\mathrm{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=-\ln(2\pi)^{1/2}2^N+\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\ln\frac{N}{N-N_\mathrm{R}}\\&\quad+N_\mathrm{R}\ln\frac{N-N_\mathrm{R}}{N_\mathrm{R}}-\tfrac{1}{2}\ln N_\mathrm{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=-\ln(2\pi)^{1/2}2^N+\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\ln\frac{1}{1-N_\mathrm{R}/N}\\&\quad+N_\mathrm{R}\ln\frac{1-N_\mathrm{R}/N}{N_\mathrm{R}/N}-\tfrac{1}{2}\ln N_\mathrm{R}\end{aligned}$$

Βήμα 2 *Αναπτύσσουμε τους λογαρίθμους*

Εισάγουμε την παράμετρο μ:

$$\mu=\frac{N_\mathrm{R}}{N}-\tfrac{1}{2},\ \text{οπότε}\ \frac{N_\mathrm{R}}{N}=\mu+\tfrac{1}{2}\ \text{και}\ N_\mathrm{R}=N\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)$$

και παίρνουμε

$$\begin{aligned}\ln P&=-\ln(2\pi)^{1/2}2^N+\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\ln\frac{1}{\frac{1}{2}-\mu}\\&\quad+N\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)\ln\frac{\frac{1}{2}-\mu}{\mu+\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}\ln N\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=-\ln(2\pi)^{1/2}2^N-\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\ln\left(\tfrac{1}{2}-\mu\right)+N\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)\ln\left(\tfrac{1}{2}-\mu\right)\\&\quad-N\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)\ln\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\ln N\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Επειδή το πιθανότερο είναι να υπάρχει περίπου ίσος αριθμός βημάτων προς τα αριστερά και προς τα δεξιά, είναι $N_\mathrm{R}\approx\frac{1}{2}N$ και το μ είναι κοντά στο μηδέν. Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα

$$\ln\left(\tfrac{1}{2}\pm\mu\right)=-\ln 2\pm 2\mu-2\mu^2+\cdots$$

τερματίζοντάς το στον δευτεροβάθμιο ως προς μ όρο. Το αποτέλεσμα είναι

$$\begin{aligned}\ln P&=-\ln(2\pi N)^{1/2}2^N-\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\{-\ln 2-2\mu-2\mu^2\}\\&\quad+N\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)\{-\ln 2-2\mu-2\mu^2\}\\&\quad-N\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)\{-\ln 2+2\mu-2\mu^2\}-\tfrac{1}{2}\{-\ln 2+2\mu-2\mu^2\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=-\ln(2\pi N)^{1/2}2^N-\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\{-\ln 2-2\mu-2\mu^2\}\\&\quad-4N\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)\mu-\tfrac{1}{2}\{-\ln 2+2\mu-2\mu^2\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=-\ln(2\pi N)^{1/2}2^N-N\{-\ln 2-2\mu-2\mu^2\}\\&\quad-4N\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)\mu+\{\ln 2+2\mu^2\}\end{aligned}$$

$$=-\ln(2\pi N)^{1/2}2^N+(N+1)\ln 2-2(N-1)\mu^2$$

Βήμα 3 *Παίρνουμε τους αντίστροφους λογαρίθμους*

Τέλος, παίρνουμε τους αντίστροφους (φυσικούς) λογαρίθμους και των δύο μελών και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $N >> 1$:

$$P=\frac{2^{N+1}\mathrm{e}^{-2(N-1)\mu^2}}{2^N(2\pi N)^{1/2}}=\frac{2\mathrm{e}^{-2(N-1)\mu^2}}{(2\pi N)^{1/2}}\approx\frac{2\mathrm{e}^{-2N\mu^2}}{(2\pi N)^{1/2}}$$

Με $N = t/\tau$ και $N\mu^2=n^2/4N=\tau x^2/4td^2$, προκύπτει πλέον η εξ. 16Γ.14.