Εισαγωγή στην ελληνική έκδοση

Владимир Игоревич Арнольд

Ο Vladimir Igorevich Arnold (Βλαντίμιρ Ίγκορεβιτς Άρνολντ) θεωρείται από τους ομότεχνούς του ένας γίγαντας των μαθηματικών, και σε τούτο το σύντομο σημείωμα θα προσπαθήσουμε να δικαιολογήσουμε αυτό τον χαρακτηρισμό χωρίς, ωστόσο, την παραμικρή φιλοδοξία να καλύψουμε όλες τις πτυχές του έργου του και της συνεισφοράς του στα μαθηματικά.

Ο V. I. Arnold γεννήθηκε στις 12 Ιουνίου του 1937 στην Οδησσό της Σοβιετικής Ένωσης και ήταν γιος μαθηματικού, ειδικού στη θεωρία αριθμών. Το ενδιαφέρον του για τα μαθηματικά ξεκινά ήδη από την ηλικία των πέντε ετών, καθώς στις ρωσικές οικογένειες δίνονται, παραδοσιακά, στα παιδιά μαθηματικά προβλήματα προς επίλυση. Ο ίδιος, μάλιστα, συγκέντρωσε τέτοια προβλήματα σε ένα μικρό βιβλίο με τον τίτλο *Προβλήματα για παιδιά από 5 έως 15 ετών*.[1]

Ο Arnold ενεγράφη στο Κρατικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας (Πανεπιστήμιο Λομονόσοφ) το 1954 ως προπτυχιακός φοιτητής στη Σχολή Μηχανικής και Μαθηματικών και με την πτυχιακή εργασία *Απεικονίσεις του κύκλου στον εαυτό του*, την οποία επέβλεψε ο Andrei Nikolaevich Kolmogorov, απέκτησε το πτυχίο του το 1959. Ήδη στο τρίτο έτος των προπτυχιακών σπουδών του παρακινήθηκε από τον Kolmogorov να ασχοληθεί με την υπέρθεση συναρτήσεων και το 13ο πρόβλημα του Hilbert, το οποίο έμελλε να αποτελέσει το θέμα της διδακτορικής του διατριβής και διατυπώνεται ως εξής: μπορεί η εβδόμου

[1] Задачи для детей от 5 до 15 лет. Στον σύνδεσμο https://imaginary.org/sites/default/files/taskbook_arnold_en_0.pdf μπορεί κανείς να βρει την αγγλική μετάφραση αυτών των προβλημάτων.

βαθμού εξίσωση $x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ να επιλυθεί χωρίς τη χρήση συναρτήσεων τριών μεταβλητών; Ο Kolmogorov είχε αποδείξει ότι για $n > 3$ οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση n μεταβλητών μπορεί να αναπαρασταθεί από μια υπέρθεση συναρτήσεων τριών μεταβλητών και κάποια στιγμή ανακοίνωσε στο σεμινάριο της σχολής ότι ο δεκαεννιάχρονος φοιτητής του είχε ολοκληρώσει την απόδειξη του 13ου προβλήματος του Hilbert. Ο Arnold απέδειξε ότι συναρτήσεις τριών μεταβλητών ανάγονται σε υπερθέσεις συναρτήσεων δύο μεταβλητών και έδωσε καταφατική απάντηση στο πρόβλημα του Hilbert. Παρουσίασε την απόδειξή του σε μια ομιλία δύο ωρών έχοντας μπροστά του ένα έκπληκτο ακροατήριο που δεν ήταν συνηθισμένο να του απευθύνεται ένας τόσο νεαρός ομιλητής. Συνέχισε τις σπουδές του, και έλαβε τον τίτλο του διδάκτορα το 1961.

Σε αυτό το σημείο θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε ότι ο Arnold φοίτησε στη Σχολή Μηχανικής και Μαθηματικών (ΜεχΜάτ, για τους οικείους της) κατά την περίοδο της χρυσής εποχής της. Τα σύγχρονα μαθηματικά της Μόσχας εγκαινιάστηκαν το 1912 από τον D. F. Egorov, ο οποίος εισήγαγε στη Ρωσία τις ιδέες των Cantor, Borel και Lebesgue. Μαθητής του Egorov υπήρξε ο N. N. Luzin, του οποίου μαθητής ήταν ο Kolmogorov. Μέχρι το 1954, έτος κατά το οποίο άρχισε ο Arnold τις σπουδές του, είχαν μεσολαβήσει δραματικά γεγονότα, με τον Egorov να κατηγορείται από τις σοβιετικές αρχές λόγω των θρησκευτικών του πεποιθήσεων, να φυλακίζεται και να πεθαίνει από απεργία πείνας το 1931. Η υπόθεση του Luzin είναι περισσότερο γνωστή λόγω της δίκης του 1936, ύστερα από κατηγορίες για αντεπαναστατική δράση, η οποία είχε ως αποτέλεσμα να χάσει ο Luzin όλες τις ακαδημαϊκές του θέσεις. Παρότι αυτοί οι δύο σπουδαίοι μαθηματικοί εξαφανίστηκαν από το προσκήνιο της ακαδημαϊκής ζωής της Μόσχας, σημαντικοί μαθηματικοί, όπως οι Lev Pontryagin, Izrael Gelfand, Ivan Petrovsky, Igor Shafarevich, Pavel Alexandrov, Alexander Gelfond, Aleksandr Khinchin, Pyotr Novikov, από κοινού με τον Kolmogorov, αποτελούσαν την παλιά γενιά της Σχολής Μηχανικής και Μαθηματικών, στην οποία ήρθαν να προστεθούν τα ονόματα των νέων διδακτόρων Dmitrii Anosov, Felix Berezin, Alexander Kirillov, Yuri Manin, Sergei Novikov, Yakov Sinai, και φυσικά εκείνο του Arnold. Εκείνη την εποχή, οι απόφοιτοι γυμνασίου στη Σοβιετική Ένωση γνώριζαν ότι η Σχολή Μηχανικής και Μαθηματικών ήταν μια από τις καλύτερες σχολές του κόσμου, ενώ οι δυτικοί μαθηματικοί έκαναν μαθήματα ρωσικής γλώσσας προκειμένου να μπορούν να διαβάζουν τις εργασίες των Σοβιετικών συναδέλφων τους εγκαίρως, πριν από τη μετάφρασή τους.

Το σοβιετικό σύστημα μεταπτυχιακών σπουδών περιλάμβανε, όπως και το ρωσικό σύστημα στις μέρες μας, μεταδιδακτορικές σπουδές ανάλογες της υφηγεσίας, οπότε ο Arnold, έχοντας ήδη διοριστεί βοηθός στη Σχολή Μηχανικής και Μαθηματικών, παρουσίασε, το 1963, την υφηγεσία του με τίτλο *Μικροί παρονομαστές και προβλήματα ευστάθειας στην κλασική και ουράνια μηχανική*. Ουσιαστικά, αυτή η διατριβή ήταν η συνεισφορά του στη θεωρία KAM (από τα αρχικά των επιθέτων των μαθηματικών Kolmogorov, Arnold και Moser), η οποία είναι η θεωρία που μελετά, μέσω της θεωρίας διαταραχών, ημιπεριοδικές κινήσεις σε σχεδόν ολοκληρώσιμα χαμιλτονιανά συστήματα. Στην κλασική μηχανική, όπου η ενέργεια διατηρείται, οι λύσεις κάποιες φορές έχουν ασυνήθιστα κανονική μορφή, όντας συνδυασμοί περιοδικών κινήσεων με διαφορετικές περιόδους. Ο Kolmogorov διατύπωσε το 1954 ένα θεώρημα σύμφωνα με το οποίο, όταν ένα σύστημα διαταράσσεται από μικρή διαταραχή, τέτοιου είδους κινήσεις διατηρούνται. Ο Moser το 1962 απέδειξε αυστηρά και επέκτεινε το θεώρημα αυτό, ενώ το 1963 ο Arnold παρουσίασε μια περαιτέρω επέκτασή του σε πιο περίπλοκες περιπτώσεις, όπως το ηλιακό σύστημα.

Το 1965, ο Arnold έγινε Καθηγητής στη Σχολή Μηχανικής και Μαθηματικών, θέση την οποία διατήρησε μέχρι το 1986, οπότε και αποφάσισε να παραιτηθεί και να μετακομίσει στο Ινστιτούτο Μαθηματικών Steklov, όπου πήρε θέση Κύριου Ερευνητή. Το 1991 συμμετείχε στην ομάδα των μαθηματικών, μελών της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών, που ίδρυσαν το Ανεξάρτητο Πανεπιστήμιο της Μόσχας. Το 1993 διορίστηκε Καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Paris-Dauphine, και μέχρι το 2005 μοίραζε τον χρόνο του μεταξύ Γαλλίας και Ρωσίας.

Ο Arnold εργάστηκε σε πολλές περιοχές των μαθηματικών και της φυσικής, στις οποίες περιλαμβάνονται τα δυναμικά συστήματα, οι διαφορικές εξισώσεις, η υδροδυναμική, η μαγνητοϋδροδυναμική, η κλασική και ουράνια μηχανική, η γεωμετρία, η τοπολογία, η αλγεβρική γεωμετρία, η συμπλεκτική γεωμετρία και η θεωρία ιδιομορφιών. Το έργο του τού χάρισε παγκόσμια αναγνώριση, ενώ ταυτόχρονα διαμόρφωσε την παρούσα κατάσταση κατανόησης και γνώσης σε πολλές από αυτές τις περιοχές. Ο Arnold συνεισέφερε επίσης στη διαμόρφωση της θεωρίας του χάους, εκείνου του κλάδου της μελέτης δυναμικών συστημάτων όπου σε μη στοχαστικές εξισώσεις προκύπτουν φαινομενικά στοχαστικές λύσεις. Πρότεινε ένα απλό παράδειγμα δυναμικού συστήματος που μοιάζει να είναι στοχαστικό, όταν το παρατηρούμε από οποιοδήποτε δεδομένο επίπεδο ακρίβειας. Μόνο με απείρως ακριβείς παρατηρήσεις μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το σύστημα δεν είναι στοχαστικό. Το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι γνωστό ως «η γάτα του Arnold», επειδή, προκειμένου να περιγράψει τη δυναμική του, το παρομοίωσε με την εξέλιξη της ζωγραφιάς που απεικονίζει μια γάτα.

Ο Arnold πρότεινε μια νέα μέθοδο στην υδροδυναμική, έχοντας δείξει ότι η εξίσωση του Euler για ένα ιδεατό ρευστό είναι εξίσωση γεωδαισιακών σε μια ομάδα διαφορομορφισμών που διατηρούν τον στοιχειώδη όγκο (ως προς τη δεξιά αναλλοίωτη μετρική που ορίζεται από την ενέργεια του ρευστού). Σε μία από τις εφαρμογές αυτής της προσέγγισης προκύπτει ότι είναι αδύνατο να υπάρχει αξιόπιστη μακροπρόθεσμη πρόβλεψη καιρικών φαινομένων.

Αν και ο Arnold τιμήθηκε με πολλά βραβεία και διακρίσεις,[1] δεν έλαβε το Μετάλλιο Fields, τη σπουδαιότερη διεθνή διάκριση για μαθηματικούς μέχρι 40 ετών. Στην πραγματικότητα, προτάθηκε για το Fields το 1974, αλλά η υποστήριξη της Σοβιετικής Ένωσης αποσύρθηκε, με τον Lev Pontryagin, τότε επικεφαλής της Εθνικής Σοβιετικής Επιτροπής Μαθηματικών, να δηλώνει: «Δεν γνωρίζω το έργο κάποιου τέτοιου μαθηματικού». Ένας λόγος φέρεται να είναι η υπογραφή του Arnold σε ένα αίτημα για την απελευθέρωση του μαθηματικού Alexander Yesenin-Volpin, γιου του ποιητή Sergei Yesenin, ο οποίος βρισκόταν έγκλειστος σε ψυχιατρείο με την κατηγορία της αντισοβιετικής προπαγάνδας.

Ο Arnold υπήρξε ιδιαίτερα παραγωγικός επιστήμονας έχοντας συγγράψει πάνω από 300 επιστημονικά άρθρα και περισσότερα από 20 βιβλία, στα οποία συγκαταλέγονται τα *Ordinary Differential Equations*, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations* και *Topological Methods in Hydrodynamics* (το τελευταίο από κοινού με τον πρώην φοιτητή του B. A. Khesin), που αποτελούν παγκοσμίως αναπόσπαστο κομμάτι της

[1]Young Mathematicians Prize της Μαθηματικής Εταιρείας της Μόσχας (1958), Βραβείο Λένιν (από κοινού με τον Andrei Kolmogorov) (1965), Βραβείο Crafoord της Σουηδικής Ακαδημίας Επιστημών (από κοινού με τον Louis Nirenberg) (1982), Βραβείο Lobachevsky της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών (1992), Βραβείο Harvey, Technion, Haifa, Israel (1994), Μετάλλιο Pyotr L. Kapitsa της Ρωσικής Ακαδημίας Φυσικών Επιστημών (1997), Βραβείο Dannie Heineman στη Μαθηματική Φυσική (2001), Βραβείο του Αμερικανικού Ινστιτούτου Φυσικής (2001), Βραβείο Wolf στα Μαθηματικά (2001), Κρατικό Βραβείο της Ρωσικής Ομοσπονδίας (2007), Βραβείο Shaw (2008) (από κοινού με τον Ludwig Faddeev).

εκπαίδευσης στα μαθηματικά και τη μαθηματική φυσική. Εκτός όμως από το συγγραφικό του έργο, ο Arnold είχε να επιδείξει και εξαιρετικό ταλέντο ως δάσκαλος. Στις διαλέξεις του καθιστούσε σαφείς και απλές τις δυσκολότερες σύγχρονες θεωρίες, και είχε το χάρισμα να βρίσκει πανέμορφα προβλήματα ώστε να προκαλεί το ενδιαφέρον και τη συμμετοχή των φοιτητών του.[1] Επέβλεψε περίπου 40 διδακτορικές διατριβές και 5 υφηγεσίες, αν και το πλήθος των μαθηματικών που είτε τον θεωρούν δάσκαλό τους, είτε έκαναν τα πρώτα τους βήματα στην επιστήμη σε εταιρείες και σεμινάρια που διηύθυνε εκείνος, είτε του είναι υπόχρεοι επειδή οι ιδέες του επηρέασαν το επιστημονικό τους έργο, είναι πολύ μεγαλύτερο.

Ο Arnold διατηρούσε ισχυρή την πεποίθηση ότι είναι σημαντικό τα μαθηματικά να βρίσκουν εφαρμογές και είχε έρθει σε έντονη αντιπαράθεση με την αφηρημένη προσέγγιση που ακολουθούσε η σχολή των Bourbaki στη Γαλλία. Σε αυτήν ακριβώς την πεποίθησή του εστιάζει το περιεχόμενο του παρόντος βιβλίου, όπου ο Arnold, παρουσιάζοντας προβλήματα της καθημερινής ζωής, της φύσης που μας περιβάλλει, αναδεικνύει τον πλούτο των μαθηματικών που απαιτούνται, καθώς και τη δυσκολία πλήρους μελέτης ακόμη και του πιο απλού, φαινομενικά, προβλήματος. Από τη γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφούν οι κινητήρες ενός αεροπλάνου ως προς την άτρακτο προκειμένου να μην αναφλεγεί το ουραίο πτέρωμα, πρόβλημα που γίνεται κατανοητό από κάποιον που γνωρίζει στοιχειώδη τριγωνομετρία, μέχρι την ασυμπτωτική συμπεριφορά λύσεων διαφορικών εξισώσεων, όπου συνυφαίνονται η επίλυση διαφορικών εξισώσεων, οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες, η προβολική γεωμετρία, η τοπολογία, η κοσμολογία και, εν τέλει, η μελέτη του ίδιου του σύμπαντος, όλα έχουν θέση σε αυτόν τον μικρό τόμο, τον οποίο με ιδιαίτερη χαρά παρουσιάζουμε στο ελληνικό κοινό που ενδιαφέρεται, είτε ερασιτεχνικά είτε επαγγελματικά, για τα μαθηματικά.[2]

---

[1] Τα προβλήματα που έθετε στο σεμινάριό του *Περί της θεωρίας ιδιομορφιών διαφορίσιμων απεικονίσεων*, το οποίο έδινε δύο φορές τον χρόνο στην αρχή κάθε εξαμήνου, στη Σχολή Μηχανικής και Μαθηματικών, έχουν συγκεντρωθεί σε έναν τόμο με τον τίτλο *Arnold's Problems* (Vladimir I. Arnold [επιμ.], Springer-Verlag, 2005).

[2] Στα ελληνικά κυκλοφορεί το βιβλίο του Arnold *Θεωρία Καταστροφών*, μτφρ. Θάνος Β. Χριστακόπουλος, Εκδόσεις Gutenberg – Γιώργος & Κώστας Δαρδανός, 1993. Επίσης, το ελληνικό κοινό μπορεί να δει άλλα δείγματα γραφής του Arnold σε κάποια από τα τεύχη του περιοδικού *Quantum*, που κυκλοφορούσε στα ελληνικά, από τις Εκδόσεις Κάτοπτρο, από το 1994 έως το 2001, ως μετάφραση του αμερικανικού *Quantum*, του «αδελφού περιοδικού» του ρωσικού *Квант* (https://ph403.edu.physics.uoc.gr/quantum.php).

Ο V. I. Arnold πέθανε στις 3 Ιουνίου του 2010 στο Παρίσι και τάφηκε στο Κοιμητήριο Νοβοντέβιτσι στη Μόσχα, τόπο τελευταίας κατοικίας πολλών επιφανών Ρώσων. Έκτοτε, τα μαθηματικά συνεχίζουν την εξελικτική τους πορεία έχοντας χάσει έναν σύγχρονο θρύλο.

Ανδρομάχη Σπανού
Απρίλιος 2020

Πηγές

- D. B. Anosov *et al.* «Vladimir Igorevich Arnold (on his sixtieth birthday)», *Russian Math. Surveys* 52:5, 1117-1139, 1997.
- Boris Khesin & Serge Tabachnikov (επιμ.), «Tribute to Vladimir Arnold», *Notices of the AMS*, https://www.ams.org/notices/201203/rtx120300378p.pdf
- Boris Khesin & Serge Tabachnikov (επιμ.), «Memories of Vladimir Arnold», *Notices of the AMS*, https://www.ams.org/notices/201204/rtx120400482p.pdf
- Sergei Lando, «Mathematical Education in Universities in the Soviet Union and Modern Russia», *HERB, From Russia with Math*, τχ. 4(6), Χειμώνας 2015.
- G. G. Lorentz, «Mathematics and Politics in the Soviet Union from 1928 to 1953», *Journal of Approximation Theory* 116, 169–223, 2002.

Πρόλογος

Στη νεαρή ηλικία των έντεκα ετών, ο συγγραφέας αυτού του βιβλίου συμμετείχε στην «Παιδική Επιστημονική Εταιρεία», την οποία ίδρυσε στην πατρίδα του ο διακεκριμένος Ρώσος μαθηματικός και ειδικός στην επιστήμη των υπολογιστών A. A. Lyapunov (το ακρωνύμιο της εταιρείας στα ρωσικά είναι ДНО,[1] που σημαίνει «πυθμένας», και η ονομασία της εταιρείας μπορεί επίσης να ερμηνευθεί ως «Εθελοντική Επιστημονική Εταιρεία»[2]). Σε μια συνέντευξή του στο *Kvant* (1990),[3] ο Arnold θυμάται:

> Το πρόγραμμα των μαθημάτων περιελάμβανε μαθηματικά και φυσική, μαζί με χημεία και βιολογία, συμπεριλαμβανομένης της γενετικής, η οποία μόλις πρόσφατα είχε απαγορευτεί (ο γιος ενός από τους καλύτερους γενετιστές ήταν συμμαθητής μου, και σε ένα ερωτηματολόγιο έγραψε: «η μητέρα μου ασχολείται με τα οικιακά και ο πατέρας μου ασχολείται με τα οικιακά»).

Η Natalia Lyapunova, κόρη του A. A. Lyapunov, θυμάται:[4]

> ...Και δείτε ποια ήταν τα θέματα των ομιλιών: «Η δομή του ηλιακού συστήματος», «Περί κομητών», «Μοριακές δυνάμεις». . . Κανείς δεν μπορεί να ξεχάσει την ομιλία «Κύματα» του Dima Arnold. Είχαμε ένα τεράστιο τραπέζι, που αποτελούνταν από 6 κομμάτια [διατεταγμένα έτσι ώστε να υπάρ-

[1]Σ.τ.Μ.: Детское Научное Общество.

[2]Σ.τ.Μ.: Добровольное Научное Общество.

[3]http://kvant.mccme.ru/1990/07/intervyu_s_viarnoldom.htm, στα ρωσικά.

[4]http://oso.rcsz.ru/inf/pp/177, στα ρωσικά.

> χει κενό στη μέση]. Το τραπέζι είχε απλωθεί, είχε τοποθετηθεί στην τρύπα ένα ενυδρείο με νερό, και κάτω από το ενυδρείο είχε τοποθετηθεί ένας προβολέας διαφανειών. Εκείνη την εποχή κανείς δεν είχε τέτοιον προβολέα, αλλά ο μπαμπάς μου βρήκε κάπου έναν. Το φως περνούσε μέσα από το νερό του οποίου η επιφάνεια προβαλλόταν στο ταβάνι, ενώ μέσα στο ενυδρείο επέπλεαν δύο φελλοί. Το μόνο που χρειάστηκε ήταν κάποιος να τους δώσει μια ώθηση και σχηματίστηκαν κύματα: κυκλικά, αλληλοαναιρούμενα, σε συμβολή! Και όλα αυτά να προβάλλονται στο ταβάνι! Ο Dima να δίνει ομιλία και η οπτική επίδειξη να ακολουθεί... Ήμουν τότε στην 4η τάξη...

Το παρόν βιβλίο είναι γραμμένο στο πνεύμα της «Παιδικής Επιστημονικής Εταιρείας» και απευθύνεται σε «νεαρούς μαθηματικούς όλων των ηλικιών».[1]

Το επίπεδο της πολυπλοκότητας αυτών των κεφαλαίων ποικίλλει σημαντικά: από ζητήματα προσιτά σε μαθητές γυμνασίου μέχρι σοβαρές προκλήσεις για έμπειρους ερευνητές. Κατά τη γνώμη μου, αυτό είναι το προσόν του βιβλίου: να ανήκει, εξίσου καλά, τόσο σε μια σχολική βιβλιοθήκη όσο και στο αναγνωστήριο μιας πανεπιστημιακής σχολής.

Η φιλοσοφία του συγγραφέα είναι πασιφανής:

> Τα μαθηματικά αποτελούν μέρος της φυσικής. Η φυσική είναι πειραματική επιστήμη, μέρος των φυσικών επιστημών. Τα μαθηματικά είναι το κομμάτι της φυσικής όπου τα πειράματα είναι φτηνά».[2]

Ένας εκλαϊκευτής των Μαθηματικών βρίσκεται μεταξύ Σκύλλας και Χάρυβδης. Σύμφωνα με τον Michael Faraday (έναν από τους σπουδαιότερους εκλαϊκευτές της επιστήμης),

> Οι διαλέξεις που πραγματικά διδάσκουν δεν θα γίνουν ποτέ δημοφιλείς, ενώ οι διαλέξεις που είναι δημοφιλείς δεν θα διδάξουν ποτέ.

---

[1] Στις αναμνήσεις του για τον Vladimir Rokhlin, ο Arnold παραθέτει από τον Courant: «...ένας μαθηματικός οφείλει να θεωρείται νεαρός για όσο διάστημα έχει την τάση να συζητάει μαθηματικά θέματα στις πιο ακατάλληλες στιγμές».

[2] V. Arnold, «On teaching mathematics». [Σ.τ.Μ.: Η ομιλία *On teaching Mathematics* δόθηκε στο Palais de Découverte στο Παρίσι, στις 7 Μαρτίου του 1997.]

Το παρόν βιβλίο αποτελεί (σπάνιο) αντιπαράδειγμα του αποφθέγματος του Faraday: είναι αποκαλυπτικό, δεν έχει τέλος και δεν γίνεται ποτέ βαρετό.

Στην εισαγωγή του, ο Arnold λέει:

> Τα παραδείγματα διδάσκουν όσο και οι κανόνες, ενώ τα λάθη είναι πιο διδακτικά από τις σωστές αλλά στρυφνές αποδείξεις.

Υπάρχει, πράγματι, ένα λάθος στο κεφάλαιο «Ποια δύναμη ωθεί ένα ποδήλατο προς τα εμπρός;» και ο αναγνώστης ενθαρρύνεται να βρει τι συμβαίνει.[1]

Υπάρχει ένα ακόμη ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτού του βιβλίου που πρέπει να σχολιάσω, και αυτό είναι το προκλητικό ύφος του. Ο Arnold υπήρξε σταυροφόρος εναντίον μιας τυποποιημένης προσέγγισης των μαθηματικών, ή, όπως έλεγε ο ίδιος, «μιας εγκληματικής μπουρμπακοποίησης». Σε αυτή τη μάχη, δεν θα έπαιρνε αιχμαλώτους – λάβετε υπόψη, φέρ' ειπείν, τη διάσημη «μαθηματική μονομαχία» του με τον J.-P. Serre σχετικά με τους Bourbaki στο Ινστιτούτο Henri Poincaré στις 13 Μαρτίου του 2001.

Εξίσου παθιασμένα, ο Arnold μαχόταν κατά του να αποδίδονται τα εύσημα μαθηματικών αποτελεσμάτων σε λάθος ανθρώπους. Δεν μπορώ παρά να παραθέσω από την ιστοσελίδα του Michael Berry:[2]

> Οι τρεις νόμοι της ανακάλυψης
>
> 1. Ο νόμος του Arnold (που συνάγεται από τοποθετήσεις στις πολλές επιστολές του όπου αμφισβητεί την προτεραιότητα, συνήθως αντιδρώντας σε μια κατάσταση που θεωρεί ως αγνόηση των Ρώσων μαθηματικών):
> *Οι ανακαλύψεις σπάνια αποδίδονται στον σωστό άνθρωπο.*
> (Βεβαίως, ο νόμος του Arnold είναι αυτοαναφορικός.)
>
> 2. Ο νόμος του Berry (που συνάγεται από την παρατήρηση ότι η ακολουθία των προγόνων βάσει του νόμου 1 μοιάζει ατελείωτη):
> *Τίποτε δεν ανακαλύπτεται για πρώτη φορά.*

[1] Δείτε την πρόσφατη αναμέτρηση του G. Hart με αυτό το πρόβλημα στην ιστοσελίδα http://www.simonsfoundation.org/multimedia/mathematical-impressions-multimedia/the-bicycle-pulling-puzzle/

[2] http://michaelberryphysics.wordpress.com/quotations/

> 3. Ο νόμος του Whitehead (που παρατίθεται από τον Max Dresden στην αρχή της βιογραφίας του για τον Kramers): *Καθετί σημαντικό έχει ειπωθεί νωρίτερα από κάποιον που δεν το ανακάλυψε.*

Υποπτεύομαι ότι ο Arnold χρησιμοποιούσε υπερβολές και μεγαλοποιούσε τις απόψεις του σκόπιμα. Θα συνιστούσαμε στον αναγνώστη να μην πάρει τους πιο ακραίους ισχυρισμούς του τοις μετρητοίς.

Τα περισσότερα κεφάλαια αυτού του μικρού βιβλίου είναι αρκετά σύντομα. Συνεπώς, δεν είναι πρέπον αυτός ο πρόλογος να γίνει πιο μακροσκελής. Επιτρέψτε μου να τον ολοκληρώσω με μία ακόμη παράθεση από τη συνέντευξη του Arnold στο *Kvant* η οποία, κατά τη γνώμη μου, αντιπροσωπεύει το πνεύμα τόσο του βιβλίου όσο και του συγγραφέα:

> Η λέξη «μαθηματικά» σημαίνει επιστήμη περί της αλήθειας. Μου φαίνεται ότι η σύγχρονη επιστήμη (δηλαδή η θεωρητική φυσική μαζί με τα μαθηματικά) είναι μια νέα θρησκεία, μια λατρεία της αλήθειας, που θεμελιώθηκε από τον Νεύτωνα πριν από 300 χρόνια.

Serge Tabachnikov
Μάιος 2014

Εισαγωγή

Η έρευνα ενός φόνου οδήγησε έναν σκηνοθέτη (πρόκειται για τον ήρωα ενός αστυνομικού μυθιστορήματος της Victoriya Tokareva[1]) στο συμπέρασμα: «Τα μαθηματικά είναι αυτό που μπορεί να εξηγηθεί».

Η κύρια συνεισφορά των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες δεν έγκειται στους τυπικούς υπολογισμούς (ή σε άλλες εφαρμογές ήδη συντελεσμένων μαθηματικών επιτευγμάτων), αλλά στην εξέταση εκείνων των μη τυπικών προβλημάτων όπου η ακριβής διατύπωση του ερωτήματος (τι είναι αυτό που αναζητούμε και ποια συγκεκριμένα μοντέλα πρέπει να χρησιμοποιηθούν) είναι συνήθως το ήμισυ του παντός.

Τα 39 κεφάλαια που ακολουθούν έχουν τον ίδιο σκοπό: να διδάξουν στον αναγνώστη όχι μόνο να πολλαπλασιάζει μεγάλους αριθμούς (πράγμα που κάποιες φορές πρέπει να γίνεται), αλλά να μαντεύει αναπάντεχους συσχετισμούς μεταξύ φαινομενικά ασύνδετων φαινομένων και γεγονότων, τα οποία ορισμένες φορές προέρχονται από διαφορετικούς κλάδους των φυσικών και άλλων επιστημών.

Τα παραδείγματα διδάσκουν όσο και οι κανόνες, ενώ τα λάθη είναι πιο διδακτικά από τις σωστές αλλά στρυφνές αποδείξεις. Κοιτώντας τα σχήματα αυτού του βιβλίου, ο αναγνώστης θα κατανοήσει περισσότερα από το να μάθει απ᾽ έξω δεκάδες αξιώματα (έστω μαζί με τις συνέπειές τους σχετικά με το σε ποια θάλασσα εκβάλλει ο Βόλγας ή τι τρώνε τα άλογα).

Ο Boris Pasternak έγραψε ότι «το ερώτημα περί της χρησιμότητας της ποίησης εγείρεται μόνο σε περιόδους παρακμής της, ενώ σε περιόδους άνθησής της ουδείς αμφισβητεί την απόλυτη χρησιμότητά της».

[1]Σοβιετική και Ρωσίδα σεναριογράφος και διηγηματογράφος.

Τα μαθηματικά δεν είναι ακριβώς ποίηση, αλλά σ' αυτά προσπαθώ να αποφύγω το αίσθημα της παρακμής που κηρύσσουν οι εχθροί όλων των φυσικών επιστημών.

Επιτρέψτε μου να προσθέσω επίσης ότι ο Niels Bohr κατέτασσε τις αληθείς δηλώσεις σε δύο κατηγορίες: τις τετριμμένες και τις ιδιοφυείς. Ειδικότερα, αντιμετώπιζε μια αληθή δήλωση ως τετριμμένη όταν η αντίθετη δήλωση είναι προφανώς ψευδής, ενώ μια αληθή δήλωση ως ιδιοφυή όταν η αντίθετη δήλωση είναι απλώς τόσο μη προφανής όσο και η αρχική, και έτσι το ερώτημα περί της αλήθειας της αντίθετης δήλωσης είναι ενδιαφέρον και αξίζει να μελετηθεί.

Δράττομαι της ευκαιρίας να ευχαριστήσω τον N. N. Andreev, ο οποίος με υποχρέωσε να γράψω αυτό το βιβλίο.

Από τους εκδότες

Ο Vladimir Arnold απεβίωσε στις 3 Ιουνίου του 2010. Συμμετείχε στην προετοιμασία της δεύτερης έκδοσης του βιβλίου, αλλά δεν είδε τις διορθώσεις (στις οποίες οι μοναδικές αλλαγές ήταν στα κεφάλαια των σελίδων 33–35 και 49–51).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η εκκεντρότητα της κεπλεριανής τροχιάς του Άρη

Στα ακόλουθα προβλήματα αντιστοιχεί το ίδιο μαθηματικό μοντέλο:

Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα μήκους 1 m, *ενώ η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος* 10 cm. *Να βρεθεί το μήκος της άλλης κάθετης πλευράς.*

Η μαθηματική «λύση»

$$\sqrt{1-(1/10)^2}\ \mathrm{m}$$

που δίνεται από το πυθαγόρειο θεώρημα δεν είναι ικανοποιητική. Το πρόβλημα έγκειται στο ότι, εφόσον ισχύει

$$(1-a)^2 = 1-2a + a^2 \approx 1-2a$$

(με πολύ μικρό σφάλμα a^2, υπό την προϋπόθεση ότι το a είναι μικρό), έπεται ότι

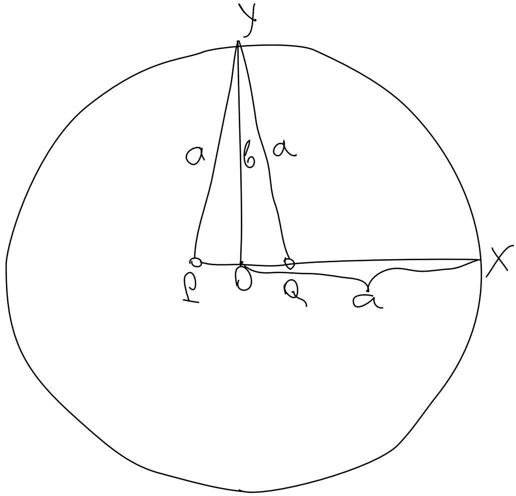
$$\sqrt{1-A} \approx 1-A/2.$$

Για $A = 1/100$, έχουμε $1-1/200$ m, δηλαδή, 99,5 cm: Το μήκος της μεγαλύτερης κάθετης πλευράς δεν μπορεί να διακριθεί με γυμνό μάτι από την υποτείνουσα, διότι η διαφορά τού 0,5% είναι ανεπαίσθητη, παρότι η μικρή γωνία του τριγώνου δεν είναι και τόσο μικρή (περίπου $6°$).

Η εκκεντρότητα της κεπλεριανής έλλειψης του Άρη είναι περίπου 0,1. Όταν ο Kepler σχεδίασε[1] *την τροχιά του Άρη, τη θεώρησε κύκλο με τον Ήλιο εκτός κέντρου. Γιατί έκανε τέτοιο λάθος;*

Λύση. Έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων του επιπέδου για τα οποία το άθροισμα των αποστάσεών τους από δύο σταθερά σημεία P και Q (τα οποία ονομάζονται εστίες) είναι σταθερό. Ας συμβολίσουμε αυτό το άθροισμα των αποστάσεων με $2a$. Τότε, για μια έλλειψη με κέντρο το σημείο O (το μέσο της απόστασης μεταξύ των εστιών) και ημιάξονες OX και OY, έχουμε

$|OX| = a$ (επειδή $|PX| + |QX| = 2a$),
$|QY| = a$ (επειδή $|PY| = |QY|$ και $|PY| + |YQ| = 2a$), και
$|OQ| = ea$ (αυτός είναι ο ορισμός της εκκεντρότητας e).



Από το ορθογώνιο τρίγωνο OYQ, έχουμε

$$|OY| = \sqrt{|QY|^2 - |OQ|^2} = \sqrt{a^2 - a^2e^2} = a\sqrt{1-e^2} \approx a(1-e^2/2).$$

[1]Ο Kepler βασίστηκε σε οπτικές παρατηρήσεις που διεξήγαγε για πολλές δεκαετίες ο δάσκαλός του, Tycho Brahe, στο αστεροσκοπείο Ουράνιμποργκ το οποίο βρισκόταν στο ιδιόκτητο νησί του Tycho Brahe μεταξύ Ελσινόρης και Κοπεγχάγης. Αργότερα, ο Νεύτωνας έστειλε σε αυτό το αστεροσκοπείο τον Halley με ένα τηλεσκόπιο, προκειμένου να αποδείξει ότι οι τηλεσκοπικές παρατηρήσεις μπορούσαν να είναι εξίσου ακριβείς με εκείνες του Tycho Brahe.

Για εκκεντρότητα $e = 0{,}1$, η απόσταση από κάθε εστία μέχρι το κέντρο είναι το 10% του μεγάλου ημιάξονα, $|OX| = a$, ενώ ο μικρός άξονας είναι μικρότερος από τον μεγάλο μόνο κατά $0{,}5\%$ (ο Kepler στην αρχή δεν πρόσεξε μια τόσο μικρή διαφορά).[1]

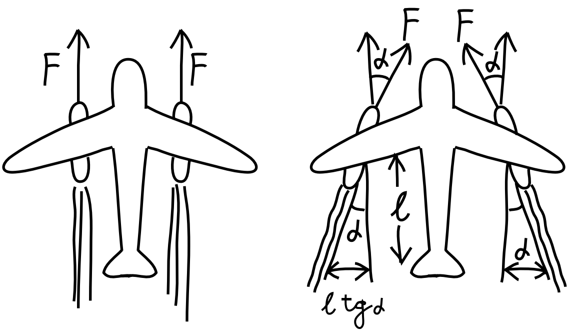
[1]Σ.τ.Ε.: Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται, χωρίς να αναφέρεται ρητά, η *θεωρία προσεγγίσεων* και συγκεκριμένα ο τύπος του Taylor. Εκφράσεις, όπως οι $\sqrt{10001}$, $\sin 89°, \ldots$ αν και από μαθηματική άποψη έχουν νόημα, η φυσική τους σημασία εν τούτοις φαίνεται μόνο μετά από τον προσεγγιστικό υπολογισμό τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η διάσωση του ουραίου πτερώματος

Το ρεύμα καυσαερίων από τον κινητήρα των πρώτων αεριωθούμενων έκαιγε το ουραίο πτέρωμα του σκάφους. Οι μηχανικοί πρότειναν την ελαφρά στροφή των κινητήρων (κατά μικρή γωνία α). Το καυσαέριο έπαψε να καίει το ουραίο πτέρωμα (μετακινήθηκε στο πλάι κατά $l\tan\alpha$, όπου l η απόσταση μέχρι το ουραίο πτέρωμα).

Ποιο κλάσμα της ωστικής δύναμης $2F$ χρειάστηκε να θυσιαστεί για να επιτευχθεί ο σκοπός αυτός;



Λύση. Η προκύπτουσα ωστική δύναμη είναι

$$2F\cos\alpha \approx 2F(1-\alpha^2/2).$$

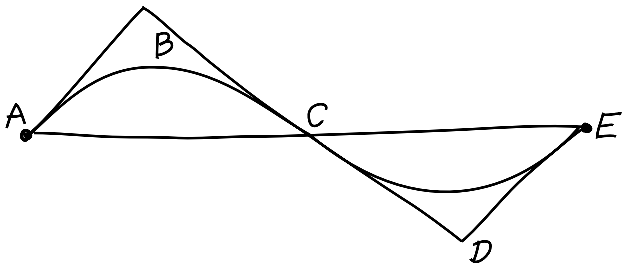
Για την αρκετά αισθητή απόκλιση των 3°, έχουμε $\alpha \approx 1/20$ ακτίνια. Άρα, η απώλεια $\alpha^2/2$ ισούται με το $1/800$ της ωστικής δύναμης και είναι αμελητέα (ενώ η απόκλιση του ρεύματος καυσαερίων $l \tan\alpha \approx l/20$ είναι τελικά «σημαντική»).[1]

[1]Σ.τ.Ε.: Και εδώ, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, γίνεται χρήση του τύπου του Taylor λόγω της παραδοχής ότι η γωνία α είναι μικρή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ημιτονοειδής επιστροφή

Κατά την επιστροφή του στο σπίτι, ένας μεθυσμένος που κινείται ημιτονοειδώς επιμηκύνει τη διαδρομή του. Κατά πόσο;



Λύση. Κατά περίπου 20%. Οι περισσότεροι άνθρωποι θεωρούν ότι μια ημιτονοειδής καμπύλη είναι δύο φορές ή τουλάχιστον μιάμιση φορά μεγαλύτερη από την ευθεία γραμμή. Όμως, στην πραγματικότητα, ακόμη και η πριονωτή διαδρομή $ABCDE$ είναι μεγαλύτερη από την ευθύγραμμη (AE) μόνο κατά έναν παράγοντα $\sqrt{2}$, δηλαδή κατά περίπου 40%.

Η ημιτονοειδής διαδρομή είναι πολύ μικρότερη. Αυτό οφείλεται στο ότι το τμήμα της ημιτονοειδούς καμπύλης που σχηματίζει με το ευθύγραμμο τμήμα AE γωνία α είναι μεγαλύτερο από την προβολή του στο AE κατά έναν παράγοντα περίπου $\sqrt{1+\alpha^2} \approx 1+\alpha^2/2$. Συνεπώς, ακόμη και εκείνα τα τμήματα της ημιτονοειδούς καμπύλης που σχηματίζουν με το ευθύγραμμο τμήμα γωνία 20° είναι μεγαλύτερα από τις προβολές τους μόλις κατά $(1/3)^2/2 \approx 1/20$ φορές το μήκος τους (5%).

Μόνο τα τμήματα της διαδρομής κοντά στα σημεία καμπής (A, C και E) έχουν επιμηκυνθεί σημαντικά. Επειδή, όμως, αυτά τα τμήματα έχουν μικρό μήκος, η συνολική επιμήκυνση της διαδρομής είναι μικρή. Επομένως, η επιμήκυνση του μεγαλύτερου μέρους της ημιτονοειδούς διαδρομής δεν είναι ιδιαίτερα αισθητή.[1]

[1]Σ.τ.Ε.: Μια εναλλακτική προσέγγιση: Αν το σημείο A είναι η αρχή των αξόνων $(0,0)$ και το E είναι το σημείο $(2\pi,0)$, η ημιτονοειδής καμπύλη $\gamma(t)=(t,\sin t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, θα έχει μήκος:

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt<\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{\cos^2 t}{2}\right)dt=2\pi+\frac{\pi}{2}.$$

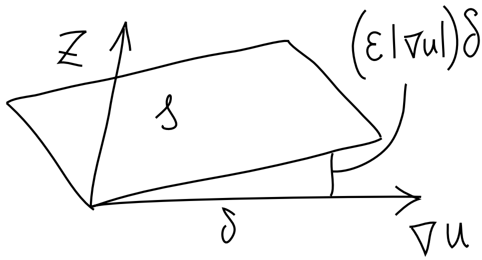
Άρα το $\dfrac{l}{AE}$ είναι μικρότερο του $1+\dfrac{1}{4}=125\%$. Το μήκος l εκφράζεται μέσω ελλειπτικού ολοκληρώματος που δεν υπολογίζεται επακριβώς, αλλά υπάρχουν διάφοροι προσεγγιστικοί τύποι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Το ολοκλήρωμα Dirichlet και ο τελεστής Laplace

Η μεμβράνη $z = 0$ *κάμφθηκε ελαφρώς (στον τριδιάστατο χώρο με καρτεσιανές συντεταγμένες* (x, y, z)*) έτσι ώστε να αποτελεί τη γραφική παράσταση μιας μικρής συνάρτησης* $z = \varepsilon u(x, y)$ *(όπου το* ε *είναι μικρό).*

Κατά πόσο το εμβαδόν της μεμβράνης που κάμφθηκε είναι μεγαλύτερο από εκείνο της αρχικής επίπεδης μεμβράνης;



Λύση. Στην πρώτη (μη μηδενική) προσέγγιση, κοντά σε κάθε σημείο, η μεμβράνη έχει εκταθεί κατά μήκος της βαθμίδας[1] grad u της συνάρτησης u (κατά τον ίδιο λόγο με τον λόγο της υποτείνουσας ενός ορθογώνιου τριγώνου στο οποίο η εφαπτομένη της μικρότερης γωνίας είναι $\varepsilon|\text{grad}\, u|$ προς τη μεγαλύτερη κάθετη πλευρά). Συνεπώς, με ακρίβεια ε^2,

[1]Σ.τ.Μ.: Ως *βαθμίδα* αποδίδεται ο αγγλικός όρος «gradient», ο οποίος στην ελληνική βιβλιογραφία απαντά και ως *κλίση*.

η αύξηση του στοιχειώδους εμβαδού s είναι ανάλογη της τετραγωνικής απόκλισης:

$$\delta s = \frac{1}{2}\varepsilon^2|\nabla u|^2 = \frac{\varepsilon^2}{2}\Big(\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big).$$

Με άλλα λόγια, η αύξηση του εμβαδού ολόκληρης της μεμβράνης είναι το ολοκλήρωμα (Dirichlet)[1]

$$\delta S = \frac{\varepsilon^2}{2}\iint \Big(\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big)\,dx\,dy + o(\varepsilon^2).$$

Σημείωση. Μπορεί να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα Dirichlet δεν εκφράζει μόνο την αύξηση του εμβαδού μιας μεμβράνης, αλλά και τη δυναμική της ενέργεια, δηλαδή το έργο που απαιτείται για να κάμψει η δύναμη τη μεμβράνη από την κατάσταση $z=0$ στην κατάσταση $z=\varepsilon u(x,y)$.

Μια απόδειξη αυτού του (μη προφανούς) αποτελέσματος παρατίθεται, π.χ., στο βιβλίο В. И. Арнольд, *Лекции об уравнениях с частными производными* (Фазис, 1997, σ. 68-70).[2]

Εκεί αποδεικνύεται επίσης ότι η δύναμη κάμψης (και έκτασης) της μεμβράνης είναι ανάλογη της λαπλασιανής Δu της συνάρτησης u (όπου $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$) και, επιπλέον, ότι

$$\iint_M (\nabla u)^2\,dx\,dy = -\iint_M u\Delta u\,dx\,dy$$

αν $u=0$ στο σύνορο της M.

Ο τελεστής Δ, ο οποίος όταν δρα σε μια συνάρτηση u δίνει Δu, εκφράζεται (στις καρτεσιανές συντεταγμένες x_i του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$) ως

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}. \qquad (*)$$

[1]Σ.τ.Ε.: Αν η κάμψη γίνεται επί του συμπαγούς χωρίου M (και άρα η u μηδενίζεται στο σύνορο του M), το αντίστοιχο εμβαδόν είναι ίσο με $\iint\limits_M \sqrt{1+\varepsilon^2|\nabla u|^2}dxdy$, οπότε η προσέγγιση της διαφοράς από το εμβαδόν του M βρίσκεται μέσω της σχέσης $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$ (βλ. Κεφάλαιο 1).

[2]Vladimir I. Arnold, *Lectures on Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg and PHASIS, Μόσχα, 2004, σ. 57-59.

Σε άλλα συστήματα συντεταγμένων στον ευκλείδειο χώρο, η έκφραση είναι διαφορετική. Παραδείγματος χάριν, στις πολικές συντεταγμένες (r, φ) στο επίπεδο ($x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$), η δράση του τελεστή Laplace στη u εκφράζεται ως εξής:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Αυτός ο τελεστής δρα σε συναρτήσεις u σε οποιαδήποτε πολλαπλότητα Riemann[1] ως $\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u$. Η φυσική σημασία αυτών των εκφράσεων είναι ίδια όπως και στο πιο πάνω παράδειγμα με το ολοκλήρωμα Dirichlet, όπου μελετήσαμε την αύξηση του εμβαδού.

Οι εχθροί της φυσικής ορίζουν τον τελεστή Laplace στα μαθηματικά εγχειρίδια μέσω της σχέσης $(*)$, η οποία στερεί από αυτό το φυσικό αντικείμενο το σχετικιστικό του νόημα (ο τελεστής [για αυτούς] δεν εξαρτάται μόνο από τη συνάρτηση στην οποία εφαρμόζεται, αλλά και από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων). Όμως, οι τελεστές div, grad, rot και Δ εξαρτώνται μόνο από τη μετρική Riemann και δεν εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων.

[1]Σ.τ.Ε.: Γενικά, η δράση της λαπλασιανής σε μια πολλαπλότητα Riemann με μετρική (g_{ij}) ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων (x_i) (μπορεί να είναι και ο ευκλείδειος χώρος με ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων) δίνεται από τον τύπο:

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

όπου (g^{ij}) ο αντίστροφος πίνακας του (g_{ij}) και g η ορίζουσα του (g_{ij}). Εδώ επίσης τονίζεται η σημασία του αναλλοίωτου (δηλαδή, ανεξάρτητου του συστήματος συντεταγμένων) ορισμού της λαπλασιανής ως div grad.