4

Όρια και άπειρο

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, προσπάθησα να δείξω πώς μια μαθηματική απόδειξη μπορεί, θεωρητικά, να διατυπωθεί με απόλυτα τυπικό τρόπο. Αν ξεκινήσει κανείς με συγκεκριμένα αξιώματα, ακολουθήσει συγκεκριμένους κανόνες, και καταλήξει σε κάποια ενδιαφέρουσα μαθηματική πρόταση, τότε η πρόταση αυτή θα γίνει αποδεκτή ως θεώρημα· σε διαφορετική περίπτωση δεν θα γίνει. Αυτή η ιδέα, της συναγωγής ολοένα και πιο σύνθετων θεωρημάτων από λίγα μόνο αξιώματα, ανάγεται στον Ευκλείδη, ο οποίος χρησιμοποίησε μόλις πέντε αξιώματα για να οικοδομήσει μεγάλα τμήματα της γεωμετρίας. (Τα αξιώματά του μελετώνται στο Κεφάλαιο 6.) Γιατί τότε, ίσως αναρωτηθεί κανείς, χρειάστηκε να φτάσουμε μέχρι τον 21ο αιώνα για να συνειδητοποιήσουμε ότι αυτό θα μπορούσε να γίνει για όλα τα μαθηματικά;

Ο κύριος λόγος μπορεί να συνοψιστεί σε μία λέξη: «άπειρο». Με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, η έννοια του απείρου είναι αναντικατάστατη στα μαθηματικά, ωστόσο είναι πολύ δύσκολο να διατυπωθεί αυστηρά. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσω τρεις προτάσεις. Καθεμία τους φαίνεται εκ πρώτης όψεως αθώα, αλλά αν την εξετάσουμε προσεκτικότερα διαπιστώνουμε ότι ενέχει το άπειρο. Αυτό προκαλεί δυσκολίες, και στο μεγαλύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με το πώς τις αντιμετωπίζουμε.

1. Η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι περίπου 1,41421356

Πού κρύβεται το άπειρο σε μια απλή πρόταση σαν την παραπάνω, που λέει απλώς ότι ένας μικρούτσικος αριθμός ισούται κατά προσέγγιση με κάποιον άλλο; Η απάντηση βρίσκεται στη φράση «η τετραγωνική ρίζα του 2», με την οποία θεωρείται εμμέσως ότι το 2 *έχει* τετραγωνική ρίζα. Αν θέλουμε να κατανοήσουμε πλήρως την πρόταση, αυτή η φράση μάς υποχρεώνει να αναρωτηθούμε τι είδους αντικείμενο είναι η τετραγωνική ρίζα του 2. Και σε αυτό ακριβώς το σημείο υπεισέρχεται το άπειρο: η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι ένας απειροψήφιος δεκαδικός αριθμός.

Να σημειωθεί ότι στην ακόλουθη πολύ συναφή πρόταση δεν υπάρχει καμία εμπλοκή του απείρου: το τετράγωνο του 1,41421356 είναι κοντά στο 2. Αυτή η πρόταση είναι απολύτως πεπερασμένη, μολονότι φαίνεται να λέει χοντρικά το ίδιο πράγμα. Όπως θα δούμε αργότερα, αυτό είναι σημαντικό.

Τι εννοούμε όταν λέμε ότι υπάρχει ένας απειροψήφιος δεκαδικός αριθμός ο οποίος, αν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει 2; Στο σχολείο διδασκόμαστε πώς να πολλαπλασιάζουμε πεπερασμένους δεκαδικούς αριθμούς, αλλά όχι άπειρους – με κάποιο τρόπο γίνεται η παραδοχή ότι μπορούν να προστεθούν και να πολλαπλασιαστούν. Πώς μπορεί όμως να γίνει αυτό; Για να δούμε το είδος της δυσκολίας που μπορεί να ανακύψει, ας εξετάσουμε πρώτα την πρόσθεση. Όταν προσθέτουμε δύο πεπερασμένους δεκαδικούς, όπως, φέρ᾽ ειπείν, τους 2,3859 και 3,1405, γράφουμε τον έναν κάτω από τον άλλο και προσθέτουμε τα αντίστοιχα ψηφία, ξεκινώντας από δεξιά. Ξεκινάμε προσθέτοντας τα τελευταία ψηφία, το 9 και το 5. Προκύπτει 14, κι έτσι γράφουμε το 4 και μας μένει κρατούμενο 1. Στη συνέχεια προσθέτουμε τα προτελευταία ψηφία, το 5 και το 0, και το κρατούμενο 1, και προκύπτει 6. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, φτάνουμε στην απάντηση: 5,5264.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε δύο απειροψήφιους δεκαδικούς αριθμούς. Δεν μπορούμε να ξεκινήσουμε από δεξιά, διότι ένας απειροψήφιος αριθμός δεν έχει τελευταίο ψηφίο. Άρα πώς μπορούμε να τους προσθέσουμε; Υπάρχει μια προφανής απάντηση: Να ξεκινήσουμε από αριστερά. Αυτό έχει όμως ένα μειονέκτημα. Αν το επιχειρήσουμε με τους πεπερασμένους δεκαδικούς αριθμούς 2,3859 και 3,1405, για παράδειγμα, θα ξεκινήσουμε προσθέτοντας το 2 και το 3, οπότε θα προκύψει 5. Στη συνέχεια, μόλις βρεθούμε στα δεξιά της υποδιαστολής, θα προσθέσουμε το 3 και το 1 και θα λάβουμε 4, το οποίο είναι δυστυχώς λάθος.

Θα προτιμούσαμε να μην προέκυπτε αυτό το λάθος, αλλά αν διατηρήσουμε την ψυχραιμία μας και συνεχίσουμε δεν είναι καταστροφή. Τα επόμενα δύο ψηφία που πρέπει να προσθέσουμε είναι το 8 και το 4, και μπορούμε να τα χειριστούμε γράφοντας το 2 ως τρίτο ψηφίο και *διορθώνοντας* το δεύτερο ψηφίο από 4 σε 5. Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία γράφοντας ως τέταρτο ψηφίο του αποτελέσματος το 5, το οποίο στη συνέχεια θα διορθωθεί σε 6.

Παρατηρήστε ότι οι διορθώσεις μπορούν να συμβούν πολύ αργότερα αφότου γράψουμε κάποιο ψηφίο. Για παράδειγμα, αν προσθέτουμε το 1,35555555555555573 στο 2,54444444444444452, θα ξεκινήσουμε γράφοντας 3,89999999999999999, και θα πρέπει να διορθώσουμε όλα αυτά τα εννιάρια μόλις πάμε στο επόμενο βήμα, που είναι η πρόσθεση του 7 στο 5. Τότε, σαν μια σειρά από ντόμινο, τα εννιάρια θα μετατραπούν σε μηδενικά καθώς θα προσθέτουμε το κρατούμενο ένα ολοένα και πιο πίσω. Παρόλα αυτά, η συγκεκριμένη μέθοδος δουλεύει, δίνοντάς μας αποτέλεσμα 3,90000000000000025, και μας επιτρέπει να δώσουμε νόημα στην ιδέα της πρόσθεσης δύο απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών. Όπως μπορούμε να αντιληφθούμε σχετικά εύκολα, δεν θα χρειαστεί ποτέ να διορθώσουμε κάποιο ψηφίο περισσότερες από μία φορές, άρα αν έχουμε δύο απειροψήφιους δεκαδικούς αριθμούς, τότε, για παράδειγμα, το 53ο ψηφίο του αθροίσματός τους θα είναι αυτό που θα γράψουμε κατά το 53ο στάδιο της παραπάνω διαδικασίας, ή η διόρθωσή του, σε περίπτωση που χρειαστεί να το διορθώσουμε αργότερα.

Θα θέλαμε να κατανοήσουμε τον ισχυρισμό ότι υπάρχει ένας απειροψήφιος δεκαδικός αριθμός του οποίου το τετράγωνο είναι 2. Για τον σκοπό αυτό, θα πρέπει πρώτα να δούμε πώς παράγεται αυτός ο απειροψήφιος δεκαδικός αριθμός και κατόπιν να καταλάβουμε τι σημαίνει να τον πολλαπλασιάσουμε με τον εαυτό του. Όπως είναι αναμενόμενο, ο πολλαπλασιασμός απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών είναι πιο πολύπλοκος από την πρόσθεση.

Πρώτα, όμως, ας δούμε έναν φυσικό τρόπο να κατασκευάσουμε τον δεκαδικό αριθμό. Πρέπει να βρίσκεται μεταξύ του 1 και του 2, διότι $1^2 = 1$, το οποίο είναι μικρότερο από το 2, και $2^2 = 4$, το οποίο είναι μεγαλύτερο. Αν υπολογίσουμε τα $1{,}1^2$, $1{,}2^2$, $1{,}3^2$, και ούτω καθεξής μέχρι το $1{,}9^2$ βρίσκουμε ότι $1{,}4^2 = 1{,}96$, το οποίο είναι μικρότερο από το 2, και $1{,}5^2 = 2{,}25$, το οποίο είναι μεγαλύτερο. Άρα ο $\sqrt{2}$ θα πρέπει να βρίσκεται μεταξύ του 1,4 και του 1,5, και κατά συνέπεια το δεκαδικό του ανάπτυγμα θα πρέπει να ξεκινάει με 1,4. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε υπολογίσει με αυτό τον τρόπο ότι τα πρώτα οκτώ ψηφία του $\sqrt{2}$ είναι 1,4142135. Στη συνέχεια μπορούμε να κάνουμε τους παρακάτω υπολογισμούς, από τους οποίους προκύπτει ότι το επόμενο ψηφίο στη σειρά είναι το 6.

$$
\begin{aligned}
1{,}41421350^2 &= 1{,}9999998236822500\\
1{,}41421351^2 &= 1{,}9999998519665201\\
1{,}41421352^2 &= 1{,}9999998802507904\\
1{,}41421353^2 &= 1{,}9999999085350609\\
1{,}41421354^2 &= 1{,}9999999368193316\\
1{,}41421355^2 &= 1{,}9999999651036025\\
1{,}41421356^2 &= 1{,}9999999933878736\\
1{,}41421357^2 &= 2{,}0000000216721449
\end{aligned}
$$

Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία, μπορούμε να παραγάγουμε όσα ψηφία θέλουμε. Μολονότι δεν πρόκειται να τελειώσουμε ποτέ, διαθέτουμε τουλάχιστον έναν μονοσήμαντο τρόπο να ορίσουμε το n-οστό ψηφίο μετά την υποδιαστολή, για οποιαδήποτε τιμή του n: θα είναι το ίδιο με το τελευταίο ψηφίο του μεγαλύτερου δεκαδικού αριθμού του οποίου το τετράγωνο είναι μικρότερο από το 2 και ο οποίος έχει n δεκαδικά ψηφία μετά την υποδιαστολή. Για παράδειγμα, ο 1,41 είναι ο μεγαλύτερος δεκαδικός αριθμός που έχει τετράγωνο μικρότερο από το 2 και έχει δύο ψηφία μετά την υποδιαστολή, άρα η τετραγωνική ρίζα του 2 ξεκινάει με 1,41.

Ας ονομάσουμε τον απειροψήφιο δεκαδικό αριθμό που προκύπτει x. Τι μας κάνει να είμαστε τόσο σίγουροι ότι $x^2 = 2$; Μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 1{,}4^2 &= 1{,}96 \\ 1{,}41^2 &= 1{,}9881 \\ 1{,}414^2 &= 1{,}999396 \\ 1{,}4142^2 &= 1{,}99996164 \\ 1{,}41421^2 &= 1{,}9999899241 \\ 1{,}414213^2 &= 1{,}999998409469 \\ 1{,}4142135^2 &= 1{,}99999982368225 \\ 1{,}41421356^2 &= 1{,}9999999933878736 \end{aligned}$$

Όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα υπολογισμών, όσο περισσότερα ψηφία του δεκαδικού αναπτύγματος του $\sqrt{2}$ χρησιμοποιούμε, τότε περισσότερα εννιάρια παίρνουμε μετά την υποδιαστολή όταν πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό με τον εαυτό του. Επομένως, αν χρησιμοποιήσουμε ολόκληρο το άπειρο ανάπτυγμα του $\sqrt{2}$, θα πρέπει να πάρουμε άπειρα το πλήθος εννιάρια, και το 1,99999999 ... (ένα υποδιαστολή επαναλαμβανόμενα εννιάρια) ισούται με 2.

Αυτός ο συλλογισμός οδηγεί σε δύο δυσκολίες. Πρώτον, γιατί το «ένα υποδιαστολή επαναλαμβανόμενα εννιάρια» ισούται με δύο; Δεύτερον, και σοβαρότερο, τι σημαίνει να «χρησιμοποιήσουμε ολόκληρο το άπειρο ανάπτυγμα»; Μα αυτό ακριβώς προσπαθούμε να κατανοήσουμε εξαρχής.

Για να απαλλαγούμε από την πρώτη ένσταση, πρέπει για μια ακόμη φορά να παραμερίσουμε οποιοδήποτε πλατωνικό ένστικτο. Είναι μια αποδεκτή αλήθεια των μαθηματικών ότι «ένα υποδιαστολή επαναλαμβανόμενα εννιάρια» ισούται με δύο, αλλά η συγκεκριμένη αλήθεια δεν ανακαλύφθηκε μέσω κάποιας μεταφυσικής συλλογιστικής διαδικασίας. Πρόκειται για μια *σύμβαση*. Δεν πρόκειται όμως επ' ουδενί για μια αυθαίρετη σύμβαση, διότι η μη υιοθέτησή της μας υποχρεώνει είτε να επινοήσουμε παράξενα νέα αντικείμενα είτε να εγκαταλείψουμε κάποιους από τους γνώριμους κανόνες της αριθμητικής. Για παράδειγμα, αν ισχυριστούμε ότι το 1,99999999 … δεν ισούται με το 2, τότε με τι ισούται το $2 - 1{,}99999999$ …; Αν είναι μηδέν, τότε έχουμε εγκαταλείψει τον χρήσιμο κανόνα που λέει ότι οποτεδήποτε $x - y = 0$ το x πρέπει να ισούται με το y. Αν δεν είναι μηδέν, τότε δεν έχει κάποιο συμβατικό δεκαδικό ανάπτυγμα (διαφορετικά, αν το αφαιρέσουμε από το δύο δεν θα πάρουμε «ένα υποδιαστολή επαναλαμβανόμενα εννιάρια» αλλά κάτι μικρότερο), συνεπώς είμαστε υποχρεωμένοι να επινοήσουμε κάποιο καινούργιο αντικείμενο όπως «μηδέν ακολουθούμενο από μια υποδιαστολή, κατόπιν άπειρα το πλήθος μηδενικά, και *μετά* ένα». Αν το κάνουμε αυτό, βρισκόμαστε απλώς στην αρχή των δυσκολιών μας. Τι παίρνουμε όταν πολλαπλασιάζουμε αυτό τον μυστήριο αριθμό με τον εαυτό του; Άπειρα το πλήθος μηδενικά, κατόπιν ξανά άπειρα το πλήθος μηδενικά και *μετά* ένα; Και τι θα συμβεί αν τον πολλαπλασιάσουμε με το δέκα, αντί με τον εαυτό του; Θα πάρουμε «άπειρα μείον ένα» το πλήθος μηδενικά ακολουθούμενα από ένα; Ποιο είναι το δεκαδικό ανάπτυγμα του $1/3$; Ας πολλαπλασιάσουμε τώρα αυτό τον αριθμό με το 3. Είναι το αποτέλεσμα 1 ή 0,999999 …; Αν ακολουθήσουμε τη συνήθη σύμβαση, δεν ανακύπτουν τέτοιου είδους επικίνδυνα ερωτήματα. (Επικίνδυνα αλλά όχι αδύνατα: μια συνεπής έννοια «απειροστών» αριθμών επινοήθηκε από τον Abraham Robinson τη δεκαετία του 1960, αλλά η μη τυπική ανάλυση, όπως ονομάζεται η θεωρία του, δεν έχει ενταχθεί στον κυρίως κορμό των μαθηματικών που χρησιμοποιούνται σήμερα.)

Η δεύτερη δυσκολία είναι πιο πραγματική, αλλά μπορεί να παρακαμφθεί. Αντί να προσπαθήσουμε να φανταστούμε τι θα συνέβαινε στην πραγματικότητα αν εφαρμόζαμε κάποιου είδους μακρά πολλαπλασιαστική διαδικασία σε απειροψήφιους δεκαδικούς, δίνουμε στην πρόταση $x^2 = 2$ την ερμηνεία ότι όσο περισσότερα ψηφία του x πάρουμε, τόσο πλησιέστερα στο 2 θα είναι το τετράγωνο του αριθμού που προκύπτει, ακριβώς όπως παρατηρήσαμε. Για να είμαστε πιο ακριβείς, ας υποθέσουμε ότι επιμένουμε πως θέλουμε έναν αριθμό ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, να δίνει έναν αριθμό που ξεκινά με 1,9999 …. Θα προτείνω τον αριθμό 1,41421, που δίνεται από τα πρώτα ψηφία του x. Αφού το 1,41421 είναι πολύ κοντά στο 1,41422, περιμένω ότι και τα τετράγωνά τους θα είναι επίσης πολύ κοντά (και αυτό μπορεί να αποδειχθεί σχετικά εύκολα). Λόγω όμως του τρόπου με τον οποίο επιλέξαμε το x, το $1{,}41421^2$ είναι μικρότερο από το 2 και το $1{,}41422^2$ είναι μεγαλύτερο από το 2. Έπεται ότι και οι δύο αριθμοί είναι πολύ κοντά στο 2. Απλά για να το επιβεβαιώσουμε: $1{,}41421^2 = 1{,}9999899241$, άρα έχω βρει έναν αριθμό με την ιδιότητα που θέλαμε. Αν τώρα μου ζητηθεί ένας αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, να ξεκινά με

$$1{,}99999999999999999999999999999999999999999999999999\ldots,$$

μπορώ να χρησιμοποιήσω ακριβώς τον ίδιο συλλογισμό, αλλά με μερικά ακόμη ψηφία του x. (Αποδεικνύεται ότι αν θέλουμε n εννιάρια τότε $n + 1$ ψηφία μετά την υποδιαστολή θα είναι πάντα αρκετά.) Το γεγονός ότι αυτό μπορώ να το κάνω όσα εννιάρια και αν μου ζητηθούν είναι αυτό που εννοούμε όταν λέμε ότι ο απειροψήφιος δεκαδικός αριθμός x, πολλαπλασιασμένος με τον εαυτό του, ισούται με το 2.

Προσέξτε ότι αυτό που κάναμε ήταν να «δαμάσουμε» το άπειρο, ερμηνεύοντας μια πρόταση που περιλαμβάνει το άπειρο ως τίποτα περισσότερο από μια γλαφυρή συντομογραφία μιας πιο πολύπλοκης πρότασης που δεν το περιλαμβάνει. Η κομψή πρόταση που περιλαμβάνει το άπειρο είναι «το x είναι ένας απειροψήφιος δεκαδικός αριθμός που το τετράγωνό του είναι το 2». Η μετάφρασή της είναι κάτι του τύπου: «Υπάρχει ένας κανόνας που, για οποιοδήποτε n, καθορίζει μονοσήμαντα το n-οστό ψηφίο του x. Αυτό μας επιτρέπει να σχηματίζουμε δεκαδικούς αριθμούς οποιουδήποτε μήκους με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων, και μπορούμε να κάνουμε τα τετράγωνά τους να είναι οσοδήποτε κοντά στο 2 θέλουμε απλώς επιλέγοντάς τους να έχουν αρκετά μεγάλο μήκος.»

Μήπως αυτό που λέω είναι πως η πραγματική σημασία της φαινομενικά απλής πρότασης ότι $x^2 = 2$ είναι στην πραγματικότητα πολύ περίπλοκη; Κατά κάποιον τρόπο ναι –η πρόταση κρύβει πράγματι κάποια πολυπλοκότητα– αλλά κατά κάποιον πιο σημαντικό τρόπο όχι. Είναι δύσκολο να ορίσουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό απειροψήφιων δεκαδικών αριθμών χωρίς να αναφερθούμε στο άπειρο, και θα πρέπει να βεβαιωθούμε ότι οι πολύπλοκοι ορισμοί που προκύπτουν ακολουθούν τους κανόνες που ορίσαμε στο Κεφάλαιο 2, όπως τον αντιμεταθετικό και τον προσεταιριστικό νόμο. Από τη στιγμή που θα το κάνουμε όμως αυτό, είμαστε ελεύθεροι να σκεφτούμε και πάλι αφηρημένα. Αυτό που έχει σημασία για το x είναι ότι έχει τετράγωνο το δύο. Αυτό που έχει σημασία για τη φράση «έχει τετράγωνο» είναι ότι η σημασία του βασίζεται σε *κάποιον* ορισμό του πολλαπλασιασμού που υπακούει στους κατάλληλους κανόνες. Δεν έχει ιδιαίτερη σημασία ποιο είναι το τρισεκατομμυριοστό ψηφίο του x ούτε έχει ιδιαίτερη σημασία ότι ο ορισμός του πολλαπλασιασμού είναι κάπως περίπλοκος.

2. Φτάσαμε την ταχύτητα των 40 χλμ/ώρα ακριβώς καθώς περνούσαμε τον φανοστάτη

Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε σε ένα αυτοκίνητο που επιταχύνεται, και παρακολουθούμε το ταχύμετρο να κινείται σταθερά από τα 30 στα 50 χλμ/ώρα. Μπορεί κάλλιστα να μπούμε στον πειρασμό να πούμε ότι ακριβώς για μία στιγμή –ακριβώς τη στιγμή που ο δείκτης του ταχυμέτρου πέρασε το 40– το αυτοκίνητο κινούνταν με 40 χλμ/ώρα. Πριν από αυτό το σημείο πήγαινε πιο αργά και μετά πιο γρήγορα. Τι σημαίνει όμως ότι η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου είναι 40 χλμ/ώρα για μία μόνο στιγμή; Αν το αυτοκίνητο δεν επιταχύνεται, μπορούμε να μετρήσουμε πόσα χιλιόμετρα διανύει σε μία ώρα, και έτσι να βρούμε την ταχύτητά του. (Εναλλακτικά, και πιο πρακτικά, μπορούμε να δούμε πόση απόσταση διανύει σε 30 δευτερόλεπτα και να πολλαπλασιάσουμε με 120.) Είναι προφανές, όμως, ότι αν το αυτοκίνητο επιταχύνεται αυτή η μέθοδος δεν δουλεύει: αν μετρήσουμε την απόσταση που έχει διανύσει σε κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, το μόνο που μπορούμε να υπολογίσουμε είναι η *μέση* ταχύτητά του για το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, πράγμα που δεν μας δίνει την ταχύτητα σε οποιαδήποτε δεδομένη χρονική στιγμή.

Το πρόβλημα θα εξαφανιζόταν αν μπορούσαμε να μετρήσουμε πόση απόσταση διένυσε το αυτοκίνητο στη διάρκεια μιας *απείρως μικρής* χρονικής περιόδου, διότι σε αυτή την περίπτωση η ταχύτητα δεν θα προλάβαινε να μεταβληθεί. Αν η χρονική περίοδος διαρκούσε t ώρες, όπου t είναι κάποιος απείρως μικρός αριθμός, τότε θα μετρούσαμε πόσα χιλιόμετρα διένυσε το αυτοκίνητο στη διάρκεια αυτών των t ωρών, θα παίρναμε την απάντησή μας s, η οποία θα ήταν ασφαλώς επίσης απείρως μικρή, και θα τη διαιρούσαμε με το t ώστε να πάρουμε τη στιγμιαία ταχύτητα του αυτοκινήτου.

Αυτή η γελοία φαντασίωση οδηγεί σε προβλήματα πολύ παρόμοια με εκείνα που αντιμετωπίσαμε όταν μας πέρασε προς στιγμήν από το μυαλό ότι το «ένα υποδιαστολή επαναλαμβανόμενα εννιάρια» μπορεί να μην ισούται με το δύο. Είναι το t μηδέν; Αν ναι, τότε είναι μάλλον προφανές ότι πρέπει να είναι και το s (ένα αυτοκίνητο δεν μπορεί να διανύσει κάποια απόσταση σε καθόλου χρόνο). Αλλά δεν μπορούμε να διαιρέσουμε το μηδέν με το μηδέν και να πάρουμε μια μονοσήμαντη απάντηση. Από την άλλη, αν το t δεν είναι μηδέν, τότε το αυτοκίνητο επιταχύνεται κατά τη διάρκεια αυτών των t ωρών, άρα η μέτρηση είναι άκυρη.

Ο τρόπος να κατανοήσουμε τη στιγμιαία ταχύτητα είναι να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι όταν το t είναι πολύ μικρό – ας πούμε ένα εκατοστό του δευτερολέπτου– το αυτοκίνητο δεν έχει χρόνο να επιταχυνθεί *πάρα πολύ*. Ας υποθέσουμε προς στιγμήν ότι δεν προσπαθούμε να υπολογίσουμε ακριβώς την ταχύτητα, αλλά μας αρκεί μια καλή εκτίμηση. Σε αυτή την περίπτωση, αν οι συσκευές μέτρησής μας είναι ακριβείς, μπορούμε να δούμε πόση απόσταση διανύει το αυτοκίνητο σε ένα εκατοστό του δευτερολέπτου, και να πολλαπλασιάσουμε αυτή την απόσταση με το πλήθος των εκατοστών του δευτερολέπτου που περιέχει μία ώρα, δηλαδή με 360.000. Το αποτέλεσμα δεν θα είναι απολύτως σωστό, αλλά αφού το αυτοκίνητο δεν μπορεί να επιταχυνθεί πολύ σε ένα εκατοστό του δευτερολέπτου θα πάρουμε μια καλή προσέγγιση.

Η κατάσταση αυτή μας θυμίζει το γεγονός ότι το $1{,}4142135^2$ είναι μια καλή προσέγγιση του 2, και μας επιτρέπει να αποφύγουμε να ανησυχούμε για το άπειρο, ή στην προκειμένη περίπτωση για το απείρως μικρό, με πολύ παρόμοιο τρόπο. Ας υποθέσουμε ότι αντί να μετρήσουμε πόση απόσταση διένυσε το αυτοκίνητο σε ένα εκατοστό του δευτερολέπτου μετρούσαμε την απόσταση που διένυσε σε ένα χιλιοστό του δευτερολέπτου. Το αυτοκίνητο θα είχε επιταχυνθεί ακόμη λιγότερο σε αυτό το χρονικό διάστημα, και άρα η απάντησή μας θα ήταν ακόμα πιο ακριβής. Αυτή η παρατήρηση μας δίνει έναν τρόπο να μεταφράσουμε την πρόταση «Το αυτοκίνητο κινείται με 40 χλμ/ώρα … ΤΩΡΑ!» στην ακόλουθη πιο περίπλοκη αλλά πεπερασμένη πρόταση: «Αν καθοριστεί το περιθώριο σφάλματος που μου επιτρέπεται, τότε εφόσον το t είναι ένας αρκετά μικρός αριθμός ωρών (συνήθως πολύ μικρότερος από μία) μπορώ να δω πόσα χιλιόμετρα διανύει το αυτοκίνητο σε t ώρες, να διαιρέσω με το t και να πάρω ένα αποτέλεσμα που θα βρίσκεται τουλάχιστον τόσο κοντά στα 40 χλμ/ώρα όσο είναι το περιθώριο σφάλματος που μου επιτρέπεται.» Για παράδειγμα, αν το t είναι αρκετά μικρό, τότε μπορώ να εγγυηθώ ότι η εκτίμησή μου θα βρίσκεται μεταξύ 39,99 και 40,01. Αν ζητηθεί απάντηση με ακρίβεια 0,0001, τότε ίσως χρειαστεί να κάνω το t μικρότερο, αλλά εφόσον είναι αρκετά μικρό μπορώ να πετύχω την επιθυμητή ακρίβεια.

Για μία ακόμη φορά, βλέπουμε μια πρόταση που περιλαμβάνει το άπειρο σαν έναν βολικό τρόπο να εκφράσουμε μια πιο πολύπλοκη πρόταση που αφορά προσεγγίσεις. Μια άλλη λέξη, πιθανόν πιο περιγραφική, είναι το «όριο». Ένας απειροψήφιος δεκαδικός αριθμός είναι το όριο μιας ακολουθίας δεκαδικών αριθμών με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων, και η στιγμιαία ταχύτητα είναι το όριο των εκτιμήσεων που κάνουμε μετρώντας την απόσταση που διανύεται σε ολοένα μικρότερα χρονικά διαστήματα. Οι μαθηματικοί μιλούν συχνά για το τι συμβαίνει «στο όριο» ή «στο άπειρο», αλλά όταν το κάνουν αυτό γνωρίζουν ότι δεν μιλούν απολύτως σοβαρά. Αν πιεστούν να πουν ακριβώς τι εννοούν, θα αρχίσουν να μιλούν για προσεγγίσεις.

3. Το εμβαδόν ενός κύκλου ακτίνας r είναι πr^2

Η συνειδητοποίηση του γεγονότος ότι το άπειρο μπορεί να γίνει κατανοητό με βάση το πεπερασμένο αποτέλεσε μια από τις μεγαλύτερες επιτυχίες των μαθηματικών του 19ου αιώνα, μολονότι οι ρίζες της ανάγονται σε πολύ παλαιότερες εποχές. Αναπτύσσοντας το επόμενο παράδειγμα, που αφορά τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού ενός κύκλου, θα χρησιμοποιήσω έναν συλλογισμό που επινόησε ο Αρχιμήδης τον 3ο αιώνα π.Χ. Πριν κάνουμε αυτό τον υπολογισμό, όμως, θα πρέπει να αποφασίσουμε τι είναι αυτό που υπολογίζουμε, και αυτό δεν είναι τόσο εύκολο όσο θα νόμιζε ίσως κανείς. *Τι* είναι εμβαδόν; Ασφαλώς, είναι κατά κάποιο τρόπο η *ποσότητα ύλης* που υπάρχει μέσα στο σχήμα (διδιάστατης ύλης προφανώς), αλλά πώς μπορεί αυτό να εκφραστεί με ακρίβεια;

Ό,τι και να είναι, φαίνεται σίγουρα πως είναι εύκολο να το υπολογίσουμε για κάποια σχήματα. Για παράδειγμα, αν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκη πλευρών a και b, τότε το εμβαδόν του είναι ab. Κάθε ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να θεωρηθεί ότι προκύπτει από τη διαίρεση ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου σε δύο ίσα τμήματα κατά μήκος μίας από τις διαγωνίους του, επομένως το εμβαδόν του είναι το μισό από εκείνο του αντίστοιχου ορθογώνιου παραλληλογράμμου. Κάθε τρίγωνο μπορεί να διαιρεθεί σε δύο ορθογώνια τρίγωνα, και κάθε πολύγωνο μπορεί να διαιρεθεί σε τρίγωνα. Επομένως, δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός πολυγώνου. Αντί να μας απασχολεί τι ακριβώς είναι αυτό που υπολογίσαμε, μπορούμε απλώς να *ορίσουμε* το εμβαδόν ενός πολυγώνου ως το αποτέλεσμα αυτού του υπολογισμού (αφού πειστούμε ότι αν διαιρέσουμε ένα πολύγωνο σε τρίγωνα με δύο διαφορετικούς τρόπους δεν θα πάρουμε δύο διαφορετικά αποτελέσματα).

Τα προβλήματά μας ξεκινούν μόλις αρχίσουμε να εξετάζουμε σχήματα με καμπυλόγραμμα σύνορα. Δεν είναι δυνατόν να διαιρέσουμε έναν κύκλο σε τρίγωνα. Άρα τι ακριβώς εννοούμε όταν λέμε ότι το εμβαδόν του είναι πr^2;

Πρόκειται για ένα ακόμη παράδειγμα όπου η αφηρημένη προσέγγιση είναι πολύ χρήσιμη. Ας επικεντρωθούμε όχι στο τι *είναι* το εμβαδόν, αλλά στο τι *κάνει*. Αυτή η υπόδειξη χρειάζεται κάποια διευκρίνηση, αφού το εμβαδόν δεν φαίνεται να κάνει πολλά πράγματα – σίγουρα βρίσκεται απλώς εκεί. Αυτό που εννοώ είναι ότι θα πρέπει να επικεντρωθούμε στις ιδιότητες που πρέπει να έχει μια έννοια ώστε να μπορεί εύλογα να αποκληθεί εμβαδόν. Ιδού πέντε τέτοιες ιδιότητες.

Εμβ1 Αν μετατοπίσουμε ένα σχήμα, το εμβαδόν του δεν μεταβάλλεται. (Πιο αυστηρά: δύο ίσα σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.)

Εμβ2 Αν ένα σχήμα περιέχεται πλήρως σε κάποιο άλλο, το εμβαδόν του πρώτου δεν είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του δεύτερου.

Εμβ3 Το εμβαδόν ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου προκύπτει με πολλαπλασιασμό του μήκους των δύο πλευρών του.

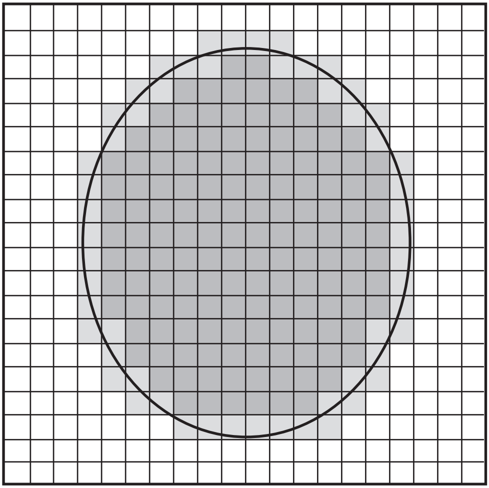
Εμβ4 Αν διαιρέσουμε ένα σχήμα σε διάφορα τμήματα, το άθροισμα των εμβαδών των διαφόρων τμημάτων ισούται με το εμβαδόν του αρχικού σχήματος.

Εμβ5 Αν επεκτείνουμε ένα σχήμα κατά τον παράγοντα 2 προς κάθε κατεύθυνση, το εμβαδόν του τετραπλασιάζεται.

Αν ανατρέξετε σε όσα αναφέραμε παραπάνω, θα διαπιστώσετε ότι για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός ορθογώνιου τριγώνου χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες **Εμβ1**, **Εμβ3** και **Εμβ4**. Η ιδιότητα **Εμβ2** μπορεί να φαίνεται τόσο προφανής ώστε να μην αξίζει να αναφερθεί, αλλά αυτό περιμένει κανείς από τα αξιώματα, και όπως θα δούμε αργότερα είναι πολύ χρήσιμη. Η ιδιότητα **Εμβ5**, καίτοι σημαντική, στην πραγματικότητα δεν χρειάζεται να διατυπωθεί ως αξίωμα διότι μπορεί να συναχθεί από τις υπόλοιπες.

Πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις ιδιότητες για να πούμε τι εννοούμε λέγοντας εμβαδόν ενός κύκλου; Το μήνυμα αυτού του κεφαλαίου μέχρι στιγμής είναι ότι ίσως είναι πρόσφορο να προσπαθήσουμε να *προσεγγίσουμε* το εμβαδόν, αντί να το ορίσουμε μια κι έξω. Αυτό μπορεί να γίνει αρκετά εύκολα ως εξής. Φανταστείτε ότι σχεδιάζουμε ένα σχήμα σε ένα κομμάτι τετραγωνισμένο χαρτί με ένα πλέγμα πολύ μικρών τετραγώνων. Από την ιδιότητα **Εμβ3** γνωρίζουμε το εμβαδόν αυτών των τετραγώνων (αφού το τετράγωνο είναι ειδική περίπτωση ορθογώνιου παραλληλογράμμου), και άρα θα μπορούσαμε να προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε το εμβαδόν του σχήματος μετρώντας πόσα τετράγωνα κείνται ολόκληρα στο εσωτερικό του. Αν, για παράδειγμα, το σχήμα περιέχει 144 τετράγωνα, τότε το εμβαδόν του σχήματος είναι τουλάχιστον 144 φορές το εμβαδόν κάθε τετραγώνου. Προσέξτε ότι αυτό που πραγματικά υπολογίσαμε είναι το εμβαδόν ενός σχήματος που αποτελείται από 144 τετράγωνα, το οποίο προσδιορίζεται εύκολα μέσω των ιδιοτήτων **Εμβ3** και **Εμβ4**.

Για το σχήμα του Σχήματος 18 η μέθοδος αυτή δεν δίνει το σωστό αποτέλεσμα, διότι υπάρχουν αρκετά τετράγωνα που βρίσκονται εν μέρει εντός του σχήματος και εν μέρει εκτός του, άρα δεν έχουμε λάβει



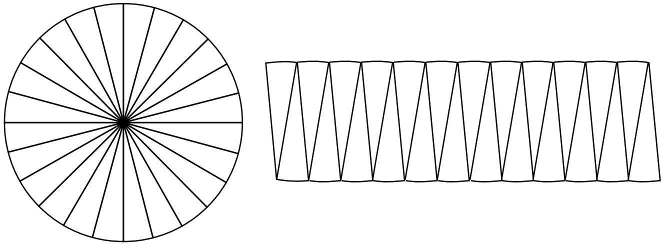
18. Προσέγγιση του εμβαδού ενός καμπυλόγραμμου σχήματος

υπόψη όλο το εμβαδόν του. Ωστόσο, υπάρχει ένας προφανής τρόπος να βελτιώσουμε την εκτίμηση, ο οποίος είναι να διαιρέσουμε κάθε τετράγωνο σε τέσσερα μικρότερα και να χρησιμοποιήσουμε αυτά αντί των προηγούμενων. Όπως προηγουμένως, κάποια από τα τετράγωνα θα βρίσκονται εν μέρει εντός και εν μέρει εκτός του σχήματος, αλλά θα έχουμε συμπεριλάβει λίγο μεγαλύτερο μέρος του σχήματος μέσω των τετραγώνων που βρίσκονται πλήρως εντός του. Εν γένει, όσο πιο λεπτό είναι το πλέγμα των τετραγώνων, τόσο μεγαλύτερο μέρος του αρχικού σχήματος λαμβάνουμε υπόψη στον υπολογισμό μας. Διαπιστώνουμε (και αυτό δεν είναι τόσο προφανές όσο φαίνεται) ότι καθώς παίρνουμε ολοένα και πιο λεπτά πλέγματα, με ολοένα και μικρότερα τετράγωνα, τα αποτελέσματα των υπολογισμών μας πλησιάζουν ολοένα και περισσότερο κάποιον αριθμό, ακριβώς όπως τα αποτελέσματα της ύψωσης στο τετράγωνο μιας ολοένα και καλύτερης προσέγγισης του $\sqrt{2}$ προσέγγιζαν ολοένα και περισσότερο το 2, και *ορίζουμε* αυτό τον αριθμό ως το εμβαδόν του σχήματος.

Επομένως, για τους αναγνώστες με κλίση στα μαθηματικά, η πρόταση ότι ένα σχήμα έχει εμβαδόν ένα τετραγωνικό μέτρο σημαίνει το εξής. Αν θεωρηθεί ανεκτό κάποιο ορισμένο περιθώριο σφάλματος, τότε, όσο μικρό και αν είναι αυτό, μπορούμε να επιλέξουμε ένα αρκετά λεπτό πλέγμα τετραγώνων, να κάνουμε τον προσεγγιστικό υπολογισμό προσθέτοντας τα εμβαδά των τετραγώνων που βρίσκονται στο εσωτερικό του σχήματος, και να καταλήξουμε σε ένα αποτέλεσμα που θα διαφέρει από το ένα τετραγωνικό μέτρο λιγότερο από αυτό το περιθώριο σφάλματος. (Κάπου στο πίσω μέρος του μυαλού μας, αλλά απωθημένη, μπορεί να βρίσκεται η ιδέα ότι «στο όριο» θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε απείρως πολλά απείρως μικρά τετράγωνα και να πάρουμε την ακριβή απάντηση.)

Ένας άλλος τρόπος να το θέσουμε, ίσως πιο ξεκάθαρος, είναι ο εξής. Αν ένα καμπυλόγραμμο σχήμα έχει εμβαδόν ακριβώς 12 τετραγωνικά εκατοστά, και μου ζητηθεί να το αποδείξω χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα τετραγώνων, τότε η εργασία που μου έχει ανατεθεί είναι αδύνατη – θα χρειαζόμουν άπειρα το πλήθος τετράγωνα. Αν, όμως, μου δοθεί οποιοσδήποτε αριθμός *εκτός* του 12, όπως, φερ’ ειπείν, το 11,9, τότε μπορώ χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα τετραγώνων να αποδείξω τελεσίδικα ότι το εμβαδόν του σχήματος *δεν* είναι ο συγκεκριμένος αριθμός: το μόνο που έχω να κάνω είναι να επιλέξω ένα πλέγμα αρκετά λεπτό ώστε το εμβαδόν που μένει εκτός να είναι μικρότερο από 0,1 τετραγωνικά εκατοστά. Με άλλα λόγια, μπορώ να τα καταφέρω και χωρίς το άπειρο αν, αντί να αποδείξω ότι το εμβαδόν είναι 12, αρκεστώ να αποδείξω ότι δεν είναι τίποτα άλλο. Το εμβαδόν του σχήματος είναι ο μοναδικός αυτός αριθμός που δεν μπορώ να αποδείξω ότι δεν είναι εμβαδόν του.

Οι ιδέες αυτές μάς δίνουν έναν ικανοποιητικό ορισμό του εμβαδού, αλλά δεν μας λύνουν το εξής πρόβλημα. Πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω διαδικασία για να εκτιμήσουμε το εμβαδόν ενός κύκλου ακτίνας r οι εκτιμήσεις μας θα πλησιάζουν ολοένα και περισσότερο την ποσότητα πr^2; Η απάντηση για τα περισσότερα σχήματα είναι ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ολοκληρωτικό λογισμό, με τον οποίο δεν θα ασχοληθούμε σε αυτό

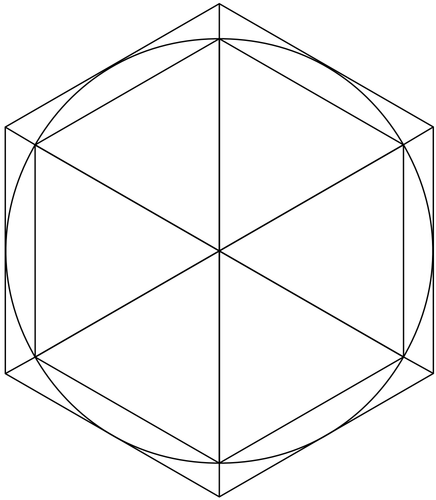


19. Η μέθοδος του Αρχιμήδη για την απόδειξη ότι το εμβαδόν ενός κύκλου είναι πr^2

το βιβλίο, αλλά για τον κύκλο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, όπως ανέφερα νωρίτερα, έναν ιδιοφυή συλλογισμό του Αρχιμήδη.

Στο Σχήμα 19 βλέπουμε έναν κύκλο κομμένο σε φέτες και ένα κατά προσέγγιση ορθογώνιο σχήμα που σχηματίζεται αν πάρουμε μία μία τις φέτες και τις συναρμολογήσουμε με διαφορετικό τρόπο. Επειδή οι φέτες είναι λεπτές, το ύψος του ορθογωνίου είναι κατά προσέγγιση η ακτίνα r του κύκλου. Και πάλι επειδή οι φέτες είναι λεπτές, η επάνω και η κάτω πλευρά του κατά προσέγγιση ορθογωνίου είναι κατά προσέγγιση ευθείες γραμμές. Αφού καθεμία από αυτές τις πλευρές χρησιμοποιεί το μισό της περιφέρειας του κύκλου, και βάσει του ορισμού του π το μήκος της περιφέρειας είναι $2\pi r$, το μήκος της κάθε πλευράς είναι κατά προσέγγιση πr. Επομένως, το εμβαδόν του κατά προσέγγιση ορθογωνίου είναι $r \times \pi r = \pi r^2$ – τουλάχιστον κατά προσέγγιση.

Βέβαια, στην πραγματικότητα είναι ακριβώς πr^2, αφού το μόνο που κάναμε ήταν να τεμαχίσουμε έναν κύκλο και να μετατοπίσουμε τα κομμάτια, αλλά αυτό δεν το γνωρίζουμε ακόμα. Ο μέχρι τώρα συλλογισμός πιθανόν να σας έχει ήδη πείσει, αλλά δεν έχει ολοκληρωθεί ακόμα, διότι πρέπει να αποδείξουμε ότι η παραπάνω προσέγγιση πλησιάζει ολοένα και περισσότερο το πr^2 καθώς το πλήθος των φετών γίνεται ολοένα και μεγαλύτερο. Πολύ συνοπτικά, ένας τρόπος να το δείξουμε αυτό είναι να πάρουμε δύο κανονικά πολύγωνα, ένα που μόλις να περιέχεται στον κύκλο και ένα που μόλις να τον περιέχει. Στο Σχήμα 20 απεικονίζεται αυτός ο τρόπος με χρήση εξαγώνων. Η περίμετρος του



20. Προσέγγιση ενός κύκλου με πολύγωνο

εσωτερικού πολυγώνου είναι μικρότερη από την περιφέρεια του κύκλου, ενώ η περίμετρος του εξωτερικού πολυγώνου είναι μεγαλύτερη. Μπορούμε να κόψουμε καθένα από τα δύο πολύγωνα σε τριγωνικές φέτες και να συναρμολογήσουμε τις φέτες ως παραλληλόγραμμα. Με εύκολους υπολογισμούς προκύπτει ότι το μικρότερο παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν μικρότερο από r επί το μισό της περιμέτρου του εσωτερικού πολυγώνου, και άρα μικρότερο από πr^2. Αντίστοιχα, το εμβαδόν του μεγαλύτερου πολυγώνου είναι μεγαλύτερο από πr^2. Ωστόσο, αν το πλήθος των φετών είναι αρκετά μεγάλο, η διαφορά των εμβαδών των δύο πολυγώνων μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε. Αφού ο κύκλος περιέχει πάντα το μικρότερο πολύγωνο και περιέχεται στο μεγαλύτερο, το εμβαδόν του πρέπει να είναι ακριβώς πr^2.