ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Το εγγράμματο διάγραμμα

ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ο ρόλος των διαγραμμάτων στα Ελληνικά Μαθηματικά είναι πολύ σημαντικός, κι αυτό ναι μεν αναφέρεται στη σύγχρονη βιβλιογραφία, αλλά λίγο εξετάζεται. Η βιβλιογραφία εστιάζει στη λεκτική πλευρά των Μαθηματικών. Δεν θα ισχυριστώ ότι γνωρίζω πώς σχετίζεται αυτό με τον ρόλο του λεκτικού και του οπτικού στον πολιτισμό μας. Γι' αυτό είναι απαραίτητη μια περιγραφή των πρακτικών που σχετίζονται με τα ελληνικά μαθηματικά διαγράμματα. Θα αποδειχτεί χρήσιμη στο θέμα που μας απασχολεί, δηλαδή στη διαμόρφωση της παραγωγικής μεθόδου.

Η δομή αυτού του κεφαλαίου έχει ως εξής: αρχικά, θα εξετάσουμε εν συντομία τον τρόπο υλοποίησης των διαγραμμάτων στην ενότητα 1. Θα περιγράψουμε ορισμένες πρακτικές στην ενότητα 2. Βασικοί ισχυρισμοί μου θα είναι ότι (α) το διάγραμμα είναι απαραίτητο στοιχείο στην ανάγνωση του κειμένου και (β) το διάγραμμα είναι η μετωνυμία των μαθηματικών. Θα ολοκληρώσω την ενότητα αυτή με την εξέταση της σημειολογίας των εγγράμματων διαγραμμάτων. Στην ενότητα 3 θα δώσω το ιστορικό πλαίσιο του εγγράμματου διαγράμματος. Η ενότητα 4 ανακεφαλαιώνει όσα προαναφέρθηκαν.

Στο παρόν κεφάλαιο καταφεύγω σ' ένα τέχνασμα. Μιλώ για ένα κενό, ένα απόν αντικείμενο, διότι τα μεν διαγράμματα της αρχαιότητας δεν έχουν διασωθεί, τα δε μεσαιωνικά διαγράμματα δεν έχουν μελετηθεί ποτέ ως τέτοια.[1] Ωστόσο, δεν έχουν χαθεί

1 Η πιο χρήσιμη ως προς τα αρχαία διαγράμματα κριτική έκδοση είναι του Mogenet (1950). Ορισμένες πληροφορίες υπάρχουν και αλλού – λόγου χάριν, η έκδοση Teubner των *Δεδομένων* είναι πολύ ολοκληρωμένη όσον αφορά την εισαγωγή γραμμάτων στα διαγράμματα· η έκδοση του Πάππου από τον Jones και της λατινικής παράδοσης

όλες οι ελπίδες. Τα κείμενα –για τη διάδοση των οποίων έχουμε καταλάβει αρκετά πράγματα– αναφέρονται στα διαγράμματα με διάφορους τρόπους. Βάσει αυτών των αναφορών μπορούν να γίνουν παρατηρήσεις που αφορούν τις πρακτικές των διαγραμμάτων. Έτσι λοιπόν ξεκινώ από το κείμενο, και από αυτή τη βάση μελετώ τα διαγράμματα.

1
Η ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Υπάρχουν τρία ερωτήματα που σχετίζονται με την υλοποίηση των διαγραμμάτων: πρώτον, το πλαίσιο μέσα στο οποίο χρησιμοποιούνταν τα διαγράμματα· δεύτερον, τα διαθέσιμα μέσα σχεδιασμού τους· τέλος, υπάρχει το ερώτημα της τεχνικής που εφαρμοζόταν στη σχεδίαση των διαγραμμάτων – και, αντιστρόφως, της τεχνικής που απαιτούνταν για την παρατήρηση των διαγραμμάτων (διότι αυτή είναι μια τεχνική που πρέπει να αποκτηθεί ξεχωριστά).

Θα πρέπει κανείς να συνυπολογίσει τη χρονική απόσταση ανάμεσα στην αρχική έμπνευση, όταν κάποιος μαθηματικός μπορεί απλώς να φαντάστηκε ένα διάγραμμα, και στα πρώτα εκτεταμένα ευρήματα, τους περγαμηνούς κώδικες. Στο ενδιάμεσο διάστημα υπήρξαν στιγμές επικοινωνίας. Ποιο ήταν το ακροατήριο;

Πρώτον, το μοναχικό –«solitaire»– ακροατήριο, ο μαθηματικός επί το έργον, όπως κάποιος που παίζει πασιέντζα. Εικόνες της Αρχαιότητας τον απεικονίζουν να εργάζεται με κάποιο διάγραμμα.[2] Θα δούμε ότι τα διαγράμματα υπήρξαν σήμα κατατεθέν της μαθηματικής δραστηριότητας και, φυσικά, ένας μαθηματικός θα

του Αρχιμήδη από τον Clagett είναι υποδειγματικές, του δε Janus στο *Musici Graeci* είναι σύντομη αλλά κατατοπιστική. Γενικά, ωστόσο, τα κριτικά υπομνήματα δεν προσφέρουν ουσιαστικές ενδείξεις όσον αφορά την κατάσταση των διαγραμμάτων στα χειρόγραφα.

2 Αυτός είναι ο πυρήνας του μύθου γύρω από τον θάνατο του Αρχιμήδη στις διάφορες εκδοχές του (βλ. Dijksterhuis (1938) 30 κ.εξ.). Σχετική είναι επίσης και η αναφορά του Κικέρωνα, που ανακαλεί στη μνήμη του τον Αρχιμήδη «με μια γραφίδα να κάνει σχέδια πάνω στη λεπτή άμμο» (*Tusc*. V.64). Ιδιαίτερα αποκαλυπτικά είναι και τα περί του τάφου του Αρχιμήδη, που αναφέρονται στο ίδιο κείμενο. Ποιο είναι το σύμβολο του Αϊνστάιν; Μάλλον το «$E = Mc^2$» Το σύμβολο του Αρχιμήδη ήταν ένα διάγραμμα: «*sphaerae figura et cylindri*» (στο ίδιο V.65).

προτιμούσε να έχει ένα διάγραμμα μπροστά του αντί να παίζει το παιχνίδι νοητικά. Επομένως, είναι πολύ πιθανό ότι η διαδικασία της ανακάλυψης υποβοηθούνταν από τα διαγράμματα.

Το γενικότερο πλαίσιο κοινοποίησης των μαθηματικών αποτελεσμάτων πρέπει να ήταν ποικιλόμορφο, αλλά ένα σταθερό χαρακτηριστικό του θα πρέπει να ήταν ο μικρός αριθμός εμπλεκομένων.[3] Αυτό σημαίνει ότι πολύ συχνά κυριαρχούσε η γραπτή μορφή επικοινωνίας, απλώς και μόνο επειδή οι άλλοι μαθηματικοί δεν ζούσαν σε κοντινές περιοχές. Πολλά ελληνικά μαθηματικά έργα γράφτηκαν αρχικά με τη μορφή επιστολών. Αυτό μπορεί να είναι ένα στοιχείο επουσιώδες που αφορά τον τρόπο της επικοινωνίας, αλλά από την άλλη μπορεί να είναι και σημαντικό. Σε τελευταία ανάλυση, οι παραλήπτες των μαθηματικών έργων, με εξαίρεση τον *Ψαμμίτη*,[4] δεν ήταν οι τυπικοί αποδέκτες επιστολών, όπως οι βασιλείς, οι φίλοι ή οι συγγενείς. Φαίνεται ότι ήταν μαθηματικοί με γνήσιο ενδιαφέρον και, επομένως, η συμπερίληψη μαθηματικών σε μια επιστολή θα μπορούσε να αποτελεί ένδειξη ότι τα έργα κυκλοφόρησαν αρχικά ως επιστολές.[5]

Δεν γνωρίζουμε πολλά περισσότερα, αλλά η ακόλουθη παρατήρηση ίσως μας βοηθήσει να σχηματίσουμε ορισμένα a priori συμπεράσματα. Στα Ελληνικά Μαθηματικά, το εγγράμματο διάγραμμα δεν είναι απλώς ένα χαρακτηριστικό – είναι ένα κυρίαρχο χαρακτηριστικό. Στα χειρόγραφα δεν υπάρχουν ενδείξεις για εναλλακτικά διαγράμματα, όπως ας πούμε κάποιο μη εγγράμματο διάγραμμα.[6] Υπάρχει μόνο μία εξαίρεση στη χρήση των διαγραμμάτων – η *δι᾽ ἀριθμῶν* μέθοδος. Παρόλο που, γενικά στα Ελληνικά Μαθηματικά, τα αριθμητικά προβλήματα αποδεικνύονται με γεωμετρικό τρόπο, με τη χρήση διαγράμματος, υπάρχουν

3 Βλ. την πραγμάτευση του θέματος παρακάτω στο Κεφάλαιο 7, υποενότητα 2.2 (σ. 363 κ.εξ.).

4 Καθώς και το απόσπασμα του Ερατοσθένη που διασώζει ο Ευτόκιος.

5 Λιγότερο εύκολο είναι να ταυτιστούν οι αποδέκτες του Πάππου, αλλά η Πανδροσίων, στην οποία αφιερώνεται το Βιβλίο III, παραδείγματος χάριν, φαίνεται ότι ήταν δασκάλα μαθηματικών· βλ. Cuomo (1994) για σχετική πραγμάτευση του θέματος.

6 Θα εξαιρέσω το απόσπασμα του Ιπποκράτη του Χίου, που μπορεί φυσικά να αντανακλά ένα πολύ πρώιμο στάδιο. Επίσης, θα αγνοήσω προς το παρόν τα παπυρολογικά ευρήματα. Θα επανέλθω σε αυτά παρακάτω στη σημ. 32.

φορές που τα αριθμητικά προβλήματα αντιμετωπίζονται ως αριθμητικά. Και είναι ενδεικτικό ότι ακόμη κι αυτό θεωρείται ρητά εξαίρεση σε έναν καλά ορισμένο κανόνα – τη *διὰ γραμμῶν* μέθοδο.[7] Το διάγραμμα θεωρείται ο κανόνας από τον οποίο μπορεί (πολύ σπάνια) να υπάρχουν αποκλίσεις.

Ως εκ τούτου, είναι ασφαλές να συμπεράνουμε ότι οι συζητήσεις των Ελληνικών Μαθηματικών συνοδεύονταν, κατά κανόνα, από κάτι όπως το εγγράμματο διάγραμμα. Έτσι, μια αποκλειστικά προφορική παρουσίαση (δηλαδή, που να μην περιλαμβάνει το διάγραμμα) πρακτικά αποκλείεται. Δύο μέθοδοι επικοινωνίας πρέπει να χρησιμοποιήθηκαν: η αποκλειστικά γραπτή μορφή, η οποία απευθυνόταν σε μαθηματικούς που βρίσκονταν σε άλλα μέρη, και (υποθετικά) μια ημιπροφορική μορφή, με κάποιο διάγραμμα, για παρουσίαση σε μια μικρή ομάδα άλλων μαθηματικών στην ίδια πόλη.

1.1 *Τα διαθέσιμα μέσα για τα διαγράμματα*

Θα ήταν ίσως χρήσιμο να ξεκινήσουμε εξετάζοντας τα μέσα που εμείς διαθέτουμε. Τα σημαντικότερα είναι μολύβι/χαρτί, κιμωλία/μαυροπίνακας και (κάτι που αποκτά όλο και μεγαλύτερη σημασία) ηλεκτρονικός υπολογιστής/εκτυπωτής. Όλα αυτά έχουν κοινά χαρακτηριστικά: απλή χρήση, υψηλή ανάλυση, ευκολία να σβήσεις και να ξαναγράψεις. Τα περισσότερα από τα μέσα που διέθεταν οι αρχαίοι Έλληνες δεν είχαν αυτά τα χαρακτηριστικά, και κανένα τους δεν τους παρείχε τη δυνατότητα να σβήσουν και να ξαναγράψουν.

Συχνά λέγεται για τους Έλληνες μαθηματικούς ότι σχεδίαζαν τα διαγράμματά τους στην άμμο.[8] Παραλλαγή αυτής της ιστορίας

7 Θα επανέλθω στη διάκριση αυτή παρακάτω, σημ. 63.

8 Η άμμος ίσως υποδηλώνεται στο μάθημα γεωμετρίας στον *Μένωνα*, αν και δεν αναφέρεται ρητά. Αν η τετμημένη γραμμή στην *Πολιτεία* χαράσσεται στην άμμο, τότε το σπίτι του Κέφαλου δεν πρέπει να ήταν σε καλή κατάσταση. Ο Αριστοτέλης αναφέρεται στη χάραξη διαγράμματος στη *γῆ* – π.χ. *Μ.τ.Φ.* 1078a20· μπορεί κάλλιστα να έχει κατά νου τον *Μένωνα*. Ο Κικέρων, *de Rep.* 1.28-9, και ο Βιτρούβιος VI.I.I αναφέρουν την ακόλουθη ιστορία: ένας φιλόσοφος που έχει ναυαγήσει συμπεραίνει την ύπαρξη ζωής στο νησί στις ακτές του οποίου ξεβράστηκε από *geometrica schemata descripta* (κατά την έκφραση του Βι-

είναι η καλυμμένη με λεπτή άμμο επιφάνεια. Αυτό τεκμηριώνεται σε πολύ πρώιμη εποχή, συγκεκριμένα στις *Νεφέλες* του Αριστοφάνη.[9] Ο Δημήτριος, ένας πολύ μεταγενέστερος συγγραφέας, δεν θυμόταν καλά το αστείο, και νόμισε ότι επρόκειτο για κηρωμένη πινακίδα[10] – υποδηλώνοντας ποιο ήταν το τυπικό μέσο γραφής της εποχής. Και πράγματι, η άμμος ή η επιφάνεια με άμμο είναι μια εξαιρετικά δύσχρηστη λύση. Το ὄστρακον[11] ή η κηρωμένη πινακίδα θα ήταν επαρκή για το πιθανό μέγεθος του ακροατηρίου· μια μεγαλύτερη ομάδα θα περιοριζόταν από την οριζόντια θέση της αμμώδους επιφάνειας. Και δεν θα πρέπει να θεωρούμε ότι η άμμος μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως έχει. Έπρεπε πρώτα να την βρέξουν και να την πατήσουν πριν από τη χρήση, διαδικασία που συνεπάγεται κόπο (και ακαταστασία).[12] Πιθανόν τη σκληρή δουλειά να την έκαναν οι δούλοι του Ευκλείδη, ωστόσο είναι σημαντικό να έχουμε κατά νου την ανάγκη *προετοιμασίας* πριν από κάθε σχέδιο. Η άμμος είναι ένα πολύ φθηνό υποκατάστατο της σχεδίασης σε ξύλο (για την οποία βλ. παρακάτω), αλλά στην ουσία δεν είναι διαφορετική. Απαιτεί ανάλογη προετοιμασία. Δεν έχει καμία σχέση με τον πίνακα, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί και να σβηστεί αμέσως.

Θα πρέπει να εξετάσουμε την πιθανότητα κοινοποίησης σε μεγάλη κλίμακα, κι αυτό θα ρίξει περισσότερο φως στην πιο συνηθισμένη μικρής κλίμακας κοινοποίηση. Υπάρχουν κάποιες ενδείξεις για τις μορφές παρουσίασης σε σχετικά πολυπληθές ακροατήριο.

τρούβιου) – μπορεί κανείς να φανταστεί την υγρή άμμο στην ακτή ως πιθανό μέσο. Η προμετωπίδα στην έκδοση των *Κωνικών* του Halley, που αναπαράγεται στο εξώφυλλο του Lloyd (1991), είναι μια ευφυέστατη *απαγωγή εις άτοπον* αυτής της ιστορίας.

9 Έριξε στο τραπέζι λεπτή τέφρα [*κατὰ τῆς τραπέζης καταπάσας λεπτὴν τέφραν* (Σ.τ.Μ.)]: Αριστοφάνης, *Νεφ.* 177. Σε αυτό μπορεί να προστεθούν μεταγενέστερα κείμενα, π.χ. Κικέρων, *Tusc. V.*64· *ND II.*48.

10 *Δημήτριος, Ερμ.* 152.

11 Ο όρος *ὄστρακον* υποδηλώνει γενικά κάθε κυρτό αντικείμενο, ειδικότερα όμως κάθε τεμάχιο ή θραύσμα πήλινου αγγείου. (Σ.τ.Ε.)

12 Οφείλω την τεχνική λεπτομέρεια στον T. Riehl. Τα δικά μου πειράματα με άμμο και τέφρα, σε υγρή ή στεγνή μορφή, ήταν ολοκληρωτική καταστροφή – και τούτο πάλι δείχνει ότι οι επιφάνειες αυτές δεν είναι τόσο άμεσα εύχρηστες, όπως οι περισσότερες σύγχρονες εναλλακτικές.

Πρόκειται για τις ενδείξεις που αφορούν τον Αριστοτέλη και τους μαθητές του στην Περιπατητική Σχολή.

Ο Αριστοτέλης χρησιμοποιούσε το εγγράμματο διάγραμμα στις διαλέξεις του. Τα γράμματα στο κείμενο έχουν νόημα, αν αναφέρονται σε διαγράμματα – κι αυτό επιβεβαιώνεται σε ορισμένα σημεία.[13] Επιπλέον, στη διαθήκη του Θεόφραστου αναφέρονται χάρτες σε *πίνακες* (για τους οποίους βλ. παρακάτω) ως μέρος της ιδιοκτησίας της σχολής.[14] Τέλος, ο Αριστοτέλης αναφέρεται στις *ανατομές* (*ἀνατομαί*), βιβλία δηλαδή που περιέχουν σχέδια ανατομίας, ως απαραίτητο συμπλήρωμα των διαλέξεων για τους μαθητές του.[15]

Τι μέσο χρησιμοποίησε ο Αριστοτέλης για τα μαθηματικά και τα ημι-μαθηματικά διαγράμματά του; Πιθανόν να χρησιμοποίησε κάποιο είδος προετοιμασμένων πινάκων, των οποίων το υλικό μέσο δεν διευκρινίζεται πουθενά.[16] Εφόσον οι πίνακες αυτοί ήταν προφανώς φορητοί, δεν μπορεί να επρόκειτο για χαράγματα πάνω στους τοίχους του Λυκείου. Είναι απαραίτητη κάποια ειδική επιφάνεια, και η μόνη πρακτική επιλογή ήταν το ξύλο, που είναι η φυσική συνεκδοχή της λέξης *πίναξ*. Για να είναι πιο ευανάγνωστη η γραφή, η επιφάνεια θα έπρεπε να βαφτεί με λευκό χρώμα, εξού και η ονομασία *λεύκωμα* – η αγγλική μετάφραση της οποίας, whiteboard, είναι παραπλανητική. Τα γραφόμενα στον «ασπροπίνακα», σε αντίθεση με τον «μαυροπίνακα», ήταν δύσκολο να σβηστούν.[17]

Δύο αιώνες μετά τον Αριστοτέλη, κάποια μαθηματικά –και, πιο συγκεκριμένα, αστρονομικά– λευκώματα αφιερώθηκαν σε ναό της Δήλου.[18] Αυτό προσθέτει ένα ακόμη ψήγμα πιθανότητας στην

---

13 Παραδείγματος χάριν, *Μετ.* 363a25-6, Αν. Πρ. 41b14. Σύμφωνα με τη γενική θέση του Einarson (1936), ο συλλογισμός δινόταν σε μαθηματική μορφή και περιελάμβανε διαγράμματα. Ενώ πολλά από τα επιχειρήματά του χρήζουν αναθεώρησης, η υπόθεση είναι βάσιμη.

14 Δ.Λ. V.51-2.

15 Βλ. Heitz (1865) 70-6.

16 Στον Jackson (1920) 193 υπάρχει η αναφορά και η εικασία ότι ο Αριστοτέλης χρησιμοποιούσε *λεύκωμα*, πράγμα που είναι πιθανό. Η αυθεντία όμως του Jackson δεν πρέπει να συσκοτίζει το γεγονός ότι αυτό δεν είναι παρά μια εικασία.

17 Βλ. Gardthausen (1911) 32-9.

18 *ID* 3 1426 όψη Β. στ. II50 κ.εξ.· 3. 1442 όψη Β. στ. II40 κ.εξ.· 3. 1443 όψη Β. στ. II.108 κ.εξ.

υπόθεση ότι η ευρύτερη διάδοση των μαθηματικών διαγραμμάτων γινόταν μέσω αυτών των λευκών πινάκων.[19] Από την άλλη, οι *ανατομές* μας υπενθυμίζουν ότι στην ίδια την Περιπατητική Σχολή χρησιμοποιούσαν τα απλά διαγράμματα σε πάπυρο (όπως είναι εύλογο), αντί για τα μεγάλης κλίμακας λευκώματα.

Τον 3ο π.Χ. αιώνα, ο Ερατοσθένης έφτιαξε μια μαθηματική στήλη, που ήταν πολύ κοντά στη φύση των αστρονομικών πινάκων της Δήλου: ένα όργανο κάτω από το οποίο βρισκόταν η σύνοψη μιας απόδειξης, μετά ένα διάγραμμα και, τέλος, ένα επίγραμμα.[20] Το διάγραμμα αυτό προφανώς ήταν χαραγμένο σε πέτρα ή μάρμαρο. Όμως, η συγκεκριμένη παρουσίαση ίσως να υπήρξε και η μοναδική του είδους της στην Αρχαιότητα.[21]

Η πορεία που φανταστήκαμε νωρίτερα, από τον μεμονωμένο μαθηματικό που σκέφτεται μόνος του έως τον περγαμηνό κώδικα, δεν είναι παρά μικρής κλίμακας ενέργειες με σκοπό την κοινοποίηση, οι οποίες αναγκαστικά περιορίζονται σε ένα μικρό σύνολο μέσων – από την επιφάνεια με άμμο στις κηρωμένες πινακίδες, τα όστρακα και τους παπύρους, μέχρι το λεύκωμα. Κανένα από αυτά δεν διαφέρει ουσιαστικά από κάποιο διάγραμμα έτσι όπως εμφανίζεται σ' ένα βιβλίο. Τα διαγράμματα, κατά κανόνα, δεν σχεδιάζονταν επιτόπου. Αντιθέτως, οι περιορισμοί των διαθέσιμων μέσων υποδηλώνουν την προετοιμασία του διαγράμματος πριν από την επικοινωνιακή πράξη – διότι δεν υπήρχε η δυνατότητα σβησίματος.

---

19 Είναι επίσης χρήσιμο να δούμε ότι γενικά το ξύλο ήταν σημαντικό υλικό στη στοιχειώδη μαθηματική εκπαίδευση, όπως δείχνουν τα αρχαιολογικά ευρήματα: ο Fowler (1987) 271-9 παρουσιάζει 69 αντικείμενα, από τα οποία τα ακόλουθα είναι ξύλινοι πίνακες: 14, 16, 18, 24, 25, 39, 42, 44, 45, 59.

20 Ευτόκιος, *Εις Σφ. Κυλ.* ΙΙ.94.8-14.

21 Ας μου επιτραπεί μια εικασία: στη χειρόγραφη παράδοση, ο *Ψαμμίτης* του Αρχιμήδη δεν περιλαμβάνει διαγράμματα. Φυσικά, τα διαγράμματα υπήρχαν με κάποια μορφή στο πρωτότυπο (που χρησιμοποιεί τη σύμβαση της εισαγωγής γραμμάτων για την αναφορά σε αντικείμενα). Πώς χάθηκαν λοιπόν τα διαγράμματα; Το έργο απευθυνόταν σε έναν βασιλιά, άρα επρόκειτο αναμφίβολα για ένα πολυτελές προϊόν. Μήπως λοιπόν τα διαγράμματα βρίσκονταν αρχικά σε ξεχωριστούς πίνακες, σχεδιασμένα σαν να ήταν έργα τέχνης από μόνα τους;

1.2 *Σχεδιασμός και εποπτεία*

Όσον αφορά την οπτική πολυπλοκότητα, υπάρχουν τέσσερις τύποι αντικειμένων στα αρχαία Μαθηματικά.

1. Απλά διδιάστατα σχήματα, που απαρτίζονται αποκλειστικά από ευθείες γραμμές και τόξα.
2. Διδιάστατα σχήματα που απαιτούν πιο σύνθετες γραμμές, οι σημαντικότερες από τις οποίες είναι οι κωνικές τομές (έλλειψη, παραβολή και υπερβολή).
3. Τριδιάστατα αντικείμενα, εξαιρουμένων:
4. Καταστάσεων που προκύπτουν στη σφαιρική γεωμετρία («σφαιρικά»).

Οι Έλληνες προφανώς είχαν μεγάλη ευχέρεια στα σχήματα της πρώτης κατηγορίας. Υπάρχουν σχετικά επαρκή παπυρολογικά ευρήματα που δείχνουν τη χρήση κανόνα στον σχεδιασμό διαγραμμάτων.[22] Και είναι αυταπόδεικτο το συμπέρασμα ότι χρησιμοποιούσαν διαβήτη (που από πολύ νωρίς τον χρησιμοποιούσαν στην αγγειογραφία).[23]

Από την άλλη, στα πολύ μεταγενέστερα χειρόγραφα δεν υπάρχει καμία τεχνική για τον σχεδιασμό μη κυκλικών καμπύλων γραμμών, οι οποίες σχεδιάζονται σαν να αποτελούνται από κυκλικά τόξα.[24] Αυτή η χρήση των τόξων πιθανόν να υπήρξε χαρακτηριστικό και των αρχαίων διαγραμμάτων.

Τα τριδιάστατα αντικείμενα δεν απαιτούν προοπτική με την αυστηρή έννοια, αλλά περισσότερο την τεχνική της προοπτικής βράχυνσης μεμονωμένων αντικειμένων.[25] Ορισμένοι Έλληνες ζωγράφοι του 5ου π.Χ. αιώνα είχαν κατακτήσει τη συγκεκριμένη

22 Βλ. Fowler (1987), ένθετες εικόνες μεταξύ σελ. 202 και 203 – κάτι που όλοι πρέπει να κάνουμε από καιρό σε καιρό. Γι' αυτό το συγκεκριμένο σημείο, βλ. ειδικότερα τα προσωπικά σχόλια του Turner για το *PFay* 9, σ. 213.

23 Βλ. π.χ., Noble (1988) 104-5 (με μια πολύ ενδιαφέρουσα αναπαραγωγή στη σελ. 105).

24 Toomer (1990) lxxxv.

25 Στην πραγματικότητα –όπως μου υπέδειξε ο M. Burnyeat– διαγράμματα με αυστηρή προοπτική θα ήταν λιγότερο χρήσιμα. Ένα χρήσιμο διάγραμμα είναι κάπως σχηματικό, υποδηλώνει αντικειμενικές γεωμετρικές σχέσεις και όχι υποκειμενικές οπτικές εντυπώσεις.

τεχνική,[26] και το επίτευγμα αυτό δεν διέφυγε της προσοχής των Ελλήνων μαθηματικών.[27]

Ωστόσο, η προοπτική βράχυνση δεν βοηθά πολύ στην αποσαφήνιση των σφαιρικών καταστάσεων. Η συμμετρία των σφαιρών δεν επιτρέπει στο μάτι να σταθεί κάπου ώστε να στηρίξει μια προοπτική «ανάγνωση». Στην πραγματικότητα, κάποια διαγράμματα σφαιρικών καταστάσεων είναι ριζικά διαφορετικά από άλλα, «κανονικά» διαγράμματα. Αντί να δίνουν μια άμεση οπτική παράσταση, χρησιμοποιούν ένα ημισυμβολικό σύστημα στο οποίο, για παράδειγμα, αντί να έχουμε έναν κύκλο γύρω από μια σφαίρα, το «κρυμμένο» τμήμα του παρουσιάζεται έξω από τη σφαίρα.[28] Υποψιάζομαι ότι μεγάλο μέρος της οπτικοποίησης, σε αυτό το ιδιαίτερο πλαίσιο, έγινε με την παρατήρηση πλανηταρίων – θέμα στο οποίο θα επανέλθω παρακάτω, στην υποενότητα 3.2.2. Όμως αυτό που πρέπει να τονιστεί είναι η ιδιοτυπία των σφαιρικών. Τα περισσότερα τριδιάστατα αντικείμενα θα μπορούσαν να σχεδιαστούν και να «διαβαστούν» από το σχέδιο με έναν πιο άμεσο, εικονογραφικό τρόπο.[29]

---

26 White (1956), πρώτο μέρος.

27 Στην πρόταση 36 των *Οπτικών* του Ευκλείδη αποδεικνύεται ότι οι τροχοί των αρμάτων φαίνονται ενίοτε κυκλικοί και ενίοτε επιμήκεις. Όπως επισημαίνεται από τον White (1956: 20), οι Έλληνες ζωγράφοι ενδιαφέρονταν ιδιαίτερα για την προοπτική αναπαράσταση των αρμάτων, των ιστίων και των ασπίδων. Είναι άραγε βάσιμη η εικασία ότι ο συγγραφέας του ευκλείδειου θεωρήματος έχει κατά νου όχι τόσο τους τροχούς όσο τις αναπαραστάσεις των τροχών; Ο Knorr (1992) συμφωνεί, ενώ επιμένει ότι πρόκειται πράγματι για ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα.

28 Mogenet (1950). Χάρη στο έργο του Mogenet, μπορούμε –κατά τρόπο μοναδικό– να διατυπώσουμε μια υπόθεση που αφορά τη γένεση αυτών των διαγραμμάτων. Είναι δύσκολο να φανταστούμε ότι ένα τέτοιο σύστημα θα μπορούσε να επινοηθεί από γραφείς που δεν ήταν μαθηματικοί. Ακόμη κι αν δεν επρόκειτο για σχέδιο του ίδιου του Αυτόλυκου, πρέπει να αντιπροσωπεύει κάποιο αρχαίο μαθηματικό σύστημα.

29 Ενώ η προοπτική βράχυνση δεν έχει σχέση με τις σφαίρες, η σκίαση έχει. Και μάλιστα, στη ρωμαϊκή ζωγραφική, η σκίαση χρησιμοποιείται συστηματικά για τη δημιουργία της εντύπωσης του βάθους, όταν για παράδειγμα έχουμε κίονες, δηλαδή κυλίνδρους. Επομένως, η παρουσία «περίεργων» παραστάσεων σφαιρών δείχνει μια σκόπιμη αποφυγή της πρακτικής της σκίασης. Αυτό νομίζω ότι σχετίζεται με όσα θα υποστηρίξω στη συνέχεια του κεφαλαίου, ότι δηλαδή τα ελληνικά διαγράμματα είναι –από μια ορισμένη άποψη– «γραφήματα» με τη

Όμως δεν θα πρέπει να υποθέσουμε ότι τα διαγράμματα, με εξαίρεση τα σφαιρικά, ήταν «εικόνες». Ο Kurt Weitzman διατυπώνει μια θεωρία –που υπερβαίνει κατά πολύ το μαθηματικό πλαίσιο– στην οποία υποστηρίζει το αντίθετο. Ο Weitzman (1971, Κεφ. 2) δείχνει ότι τα πρωτότυπα ελληνικά σχηματικά, πρόχειρα διαγράμματα (π.χ. με περιορισμένη απόδοση του βάθους και των λεπτομερειών) μετασχηματίζονται, σε ορισμένες αραβικές παραδόσεις, σε ζωγραφικές παραστάσεις. Η υπόθεσή του είναι ότι, γενικά, οι ελληνικές τεχνικές πραγματείες χρησιμοποίησαν σχηματικά μη ζωγραφικά διαγράμματα.

Επαναλαμβάνω ότι η χειρόγραφη παράδοση των ελληνικών μαθηματικών διαγραμμάτων δεν έχει μελετηθεί συστηματικά. Όμως κάποιες επιφανειακές παρατηρήσεις ενισχύουν τη θεωρία του Weitzman. Ακόμη κι αν το βάθος δηλώνεται μερικές φορές με προοπτική βράχυνση, είναι βέβαιο ότι δεν γίνεται καμία προσπάθεια ζωγραφικής απόδοσης, όπως θα γινόταν, για παράδειγμα, με τη χρήση σκίασης.[30] Το σημαντικότερο ερώτημα από μαθηματική άποψη είναι εάν υπήρχε η πρόθεση δημιουργίας *μετρικού* διαγράμματος: εάν υπήρχε η πρόθεση αντιστοίχισης των ποσοτικών σχέσεων εντός διαγράμματος με παρόμοιες σχέσεις μεταξύ των απεικονιζόμενων αντικειμένων. Η εναλλακτική εκδοχή είναι ένα πολύ πιο σχηματικό διάγραμμα, που αντιπροσωπεύει μόνο τις ποιοτικές σχέσεις της γεωμετρικής διάταξης. Και πάλι, από τη δική μου εξοικείωση με τα χειρόγραφα, πολύ συχνά φαίνεται να είναι σχηματικό και από αυτή την άποψη.[31]

Συνοψίζοντας: Όταν τα μαθηματικά αποτελέσματα δεν παρουσιάζονταν σε ανεπίσημο ιδιωτικό περιβάλλον, χρησιμοποιούνταν εγγράμματα διαγράμματα. Η προετοιμασία τους γινόταν κατά κανόνα πριν από τον μαθηματικό συλλογισμό.[32] Πιθανόν να

μαθηματική έννοια. Δεν είναι σχέδια με τη ζωγραφική έννοια.

30 Τεχνικές που *όντως* εμφανίζονται στις πρώτες εκδόσεις – αλλά επίσης και σε κάποιες σύγχρονες.

31 Πρβλ. Jones (1986) 1.76 για τα διαγράμματα του Πάππου: «Η πιο προφανής ... σύμβαση είναι μια έκδηλη προτίμηση για συμμετρία και κανονικοποίηση ... που εισάγει [π.χ.] ισότητες εκεί που οι ποσότητες δεν απαιτείται να είναι ίσες». Τέτοιες πρακτικές (τις οποίες έχω δει συχνά σε άλλα χειρόγραφα, πέρα από εκείνα του Πάππου) παραπέμπουν στο ότι το διάγραμμα δεν πρέπει να διαβαστεί ποσοτικά.

32 Ο *P. Berol*. 17469, που παρουσιάζεται στον Brashear (1994), είναι μια

γινόταν χρήση κανόνα και διαβήτη. Γενικά μιλώντας, ο Έλληνας θεατής διάβαζε άμεσα τα απεικονιζόμενα σε αυτά αντικείμενα – αν και κάτι τέτοιο θα απαιτούσε φαντασία (και, πιθανόν, αυτό που έβλεπε να ήταν απλώς η σχηματική διάταξη)· αλλά και πάλι, κάθε είδους θέαση απαιτεί φαντασία.

2
ΟΙ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΤΟΥ ΕΓΓΡΑΜΜΑΤΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

2.1 *Αμοιβαία εξάρτηση κειμένου και διαγράμματος*

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι αλληλεξάρτησης μεταξύ διαγράμματος και κειμένου. Ο σημαντικότερος είναι αυτό που ονομάζω «παγίωση αναφοράς» (fixation of reference) ή «καθορισμός» (specification).[33]

Μια ελληνική μαθηματική πρόταση, εάν την πάρουμε τοις μετρητοίς, είναι μια συζήτηση περί γραμμάτων: άλφα, βήτα κ.λπ. Λέει πράγματα όπως «το ΑΒ διχοτομείται στο Γ». Θα πρέπει να υπάρχει κάποια διαδικασία παγίωσης της αναφοράς, διά της οποίας τα γράμματα αυτά σχετίζονται με αντικείμενα. Υποστηρίζω δε ότι, σε αυτή τη διαδικασία, το διάγραμμα είναι απολύτως

απόδειξη αυτού του ισχυρισμού. Ο συγκεκριμένος πάπυρος –σπάραγμα του 2ου μ.Χ. αιώνα άγνωστης προέλευσης– περιλαμβάνει την πρόταση 9, με ελάχιστα κατάλοιπα των προτάσεων 8 και 10, από το Βιβλίο Ι των *Στοιχείων*. Σε κάθε πρόταση έχει τη διατύπωση μαζί με ένα μη εγγράμματο διάγραμμα, και τίποτε άλλο. Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι ο αρχικός πάπυρος περιείχε περισσότερες προτάσεις, που παρουσιάζονταν με τον ίδιο τρόπο. Εικάζω ότι επρόκειτο για υπόμνημα ή επιτομή, για το Βιβλίο Ι των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Εάν ενδιαφερόταν κάποιος να προχωρήσει στην απόδειξη, τα γράμματα θα εμφανίζονταν σε κάποιο αντίγραφο, για παράδειγμα σε μια κηρωμένη πινακίδα. (Το ίδιο, σύμφωνα με τον Fowler (1987) 211-12, μπορούμε να πούμε για τον *POxy* i.29). Προοικονομώντας, να πω ότι στο Κεφάλαιο 2 θα περιγράψω τις πρακτικές που αφορούν την απόδοση γραμμάτων σε σημεία, και θα υποστηρίξω ότι υπήρχε μια ημιπροφορική τελική δοκιμή, στη διάρκεια της οποίας έθεταν γράμματα σε σημεία. Αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με τα παπυρολογικά ευρήματα.

33 Η λέξη «specification» είναι χρήσιμη, στον βαθμό που είναι σαφές ότι δεν σχετίζεται με τη σημασία που της δίνει ο Morrow στη μετάφραση του Πρόκλου (αποδίδοντας την αρχαιοελληνική λέξη *διορισμός*). Εξηγώ στη συνέχεια τη σημασία που της αποδίδω.

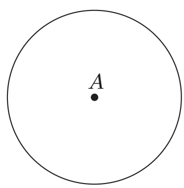
απαραίτητο. Το απροσδόκητο αποτέλεσμα αυτού είναι ότι το διάγραμμα δεν μπορεί να ανακτηθεί άμεσα από το κείμενο.

Από αυτή τη βασική ιδιότητα προκύπτουν και άλλοι τρόποι αλληλεξάρτησης μεταξύ κειμένου και διαγράμματος. Πρώτον, υπάρχουν ισχυρισμοί που συνάγονται άμεσα από το διάγραμμα. Αυτό είναι μια ισχυρή απόφανση, καθώς φαίνεται να απειλεί τη λογική εγκυρότητα του μαθηματικού έργου. Θα προσπαθήσω να δείξω ότι πρόκειται περί απατηλής απειλής. Έπειτα, υπάρχει ένα μεγάλο και ασαφές πεδίο ισχυρισμών οι οποίοι «μεσολαβούνται», ούτως ειπείν, από το διάγραμμα. Θα προσπαθήσω να αποσαφηνίσω αυτή την έννοια, και κατόπιν να δείξω πώς προκύπτουν αυτές οι «μεσολαβήσεις».

2.1.1 *Παγίωση της αναφοράς*

Ας υποθέσουμε ότι λέμε (σχ. 1.1):

Ας αναγραφεί ένας κύκλος, του οποίου κέντρο είναι το *A*.

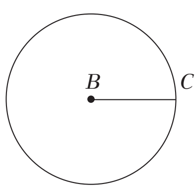


Σχημα 1.1

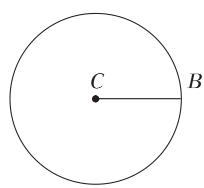
Το *A*, ως εκ τούτου, είναι απολύτως καθορισμένο, επειδή ένας κύκλος μπορεί να έχει μόνο ένα κέντρο.

Μια άλλη πιθανή περίπτωση είναι (σχ. 1.2α, 1.2β):

Ας αναγραφεί ένας κύκλος, του οποίου ακτίνα είναι η *BC*.



Σχημα 1.2α



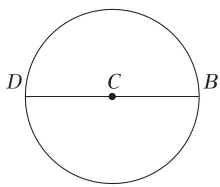
Σχημα 1.2β

Αυτή η περίπτωση είναι πιο σύνθετη. Δεν στέκομαι στο ότι ένας κύκλος μπορεί να έχει πολλές ακτίνες. Μπορεί κάλλιστα για τους σκοπούς της απόδειξης να μην έχει σημασία ποια ακτίνα παίρνουμε, κι έτσι από αυτή την άποψη, «μια ακτίνα» μπορεί να μας δίνει απολύτως τον καθορισμό που χρειαζόμαστε. Εν ολίγοις, λέγοντας «καθορισμός» εννοώ τον «καθορισμό για τις ανάγκες της απόδειξης».

Όμως ακόμη και με αυτό ως δεδομένο, εξακολουθεί να υπάρχει μια πραγματική απροσδιοριστία, διότι εδώ δεν μπορούμε να πούμε για το *BC ποιο είναι ποιο*: ποιο είναι το κέντρο και ποιο βρίσκεται στην περιφέρεια. Το κείμενο στο παράδειγμα ισχύει και για τα δύο σχήματα 1.2α και 1.2β. Επομένως, το *B* και το *C* είναι μη επαρκώς καθορισμένα στο κείμενο.

Τέλος, ας φανταστούμε ότι το παραπάνω παράδειγμα συνεχίζει με τον ακόλουθο τρόπο (σχ. 1.3):

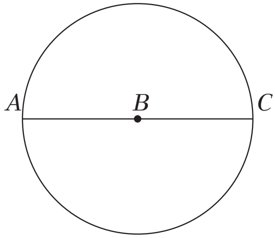
Ας αναγραφεί κύκλος με ακτίνα *BC*. Λέγω ότι το *DB* είναι διπλάσιο του *BC*.



Σχημα 1.3

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το *D* δεν είναι ούτε καθορισμένο ούτε μη επαρκώς καθορισμένο. Εδώ έχουμε ένα γράμμα που δεν έχει κανέναν καθορισμό στο κείμενο, και απλώς εμφανίζεται από το πουθενά. Αυτό είναι ένα απολύτως μη καθορισμένο γράμμα.

Είδαμε λοιπόν τρεις κατηγορίες: απολύτως καθορισμένα, μη επαρκώς καθορισμένα και απολύτως μη καθορισμένα. Άλλη μία τελευταία κατηγορία είναι τα γράμματα που η φύση τους αλλάζει στη διάρκεια της πρότασης. Μπορεί αρχικά να εμφανίζονται απολύτως μη καθορισμένα και στη συνέχεια να γίνονται τουλάχιστον μη επαρκώς καθορισμένα· ή μπορεί αρχικά να εμφανίζονται μη επαρκώς καθορισμένα και αργότερα να γίνονται πλήρως καθορισμένα. Αυτή είναι η βασική ταξινόμηση σε τέσσερις κατηγορίες. Μελέτησα όλα τα γράμματα στο Βιβλίο I των *Κωνικών* του



Σχημα 1.4

Απολλώνιου και στο Βιβλίο XIII των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, και μέτρησα πόσα ανήκουν σε κάθε κατηγορία. Όμως προτού παρουσιάσω τα αποτελέσματα, ας δούμε κάποιες λογικές περιπλοκές.

Πρώτον, τι μετράει ως πιθανή στιγμή καθορισμού; Ας πάρουμε την ακόλουθη περίπτωση. Δεδομένου του σχήματος 1.4, διατυπώνεται ο ισχυρισμός: «και άρα το *AB* είναι ίσο με το *BC*». Ας υποθέσουμε ότι τίποτα στην πρόταση μέχρι τώρα δεν καθόρισε το *B* ως το κέντρο του κύκλου. Καθορίζει λοιπόν ο ισχυρισμός αυτός το *B* ως κέντρο; Φυσικά και όχι, λόγω της λέξης «άρα» στον ισχυρισμό. Υποτίθεται ότι ο ισχυρισμός είναι συναγωγή, η δε μεταβολή της σε καθορισμό θα τη μετέτρεπε σε ορισμό, και θα είχαμε μια κενή συναγωγή. Επομένως, τέτοιου είδους ισχυρισμοί δεν μπορεί να συνιστούν καθορισμούς. Γενικά μιλώντας, οι καθορισμοί εμφανίζονται στην προστακτική στα αρχαία ελληνικά και όχι στην οριστική: «έστω ότι έχει ληφθεί το κέντρο του κύκλου, το *B*» κ.λπ.

Δεύτερον, τα γράμματα καθορίζονται από άλλα γράμματα. Υπάρχει περίπτωση αυτά τα άλλα γράμματα να είναι και τα ίδια μη επαρκώς καθορισμένα. Δεν έχω λάβει υπόψη αυτή την πιθανότητα. Είμαι σαν τον επιεική δάσκαλο, που πάντοτε δίνει στους μαθητές του μια ευκαιρία να συμμορφωθούν. Θεωρώ ότι, ανά πάσα στιγμή, όλα τα γράμματα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν, τη στιγμή του καθορισμού τους, απολύτως καθορισμένα τα ίδια. Επικεντρώθηκα στον σχετικό καθορισμό, στον καθορισμό ενός γράμματος σε σχέση με τα προηγούμενα γράμματα. Αυτό έχει προφανή πλεονεκτήματα, κυρίως επειδή τα στατιστικά αποτελέσματα παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Διαφορετικά, όλα τα γράμματα πρακτικά θα κατέληγαν μη επαρκώς καθορισμένα, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο.

Τρίτο και σημαντικότερο, ένα σημείο που ο Grattan-Guinness μου επεσήμανε πολύ επιτακτικά: πρέπει πάντοτε να θυμόμαστε όχι μόνο τι καθορίζεται από το κείμενο αλλά και τι απαιτεί η μαθηματική αίσθηση. Έχω ήδη δώσει ένα παράδειγμα: «Παίρνουμε μια ακτίνα». Αν η μαθηματική αίσθηση απαιτεί να πάρουμε οποιαδήποτε ακτίνα, τότε, ακόμη κι αν το κείμενο δεν καθορίζει ποια ακτίνα να πάρουμε, η περίπτωση εξακολουθεί να μην συνιστά μη επαρκή καθορισμό. Αυτό φαίνεται καθαρότερα με περιπτώσεις όπως: «έστω ότι έχει ληφθεί κάποιο σημείο στον κύκλο, το *Α*». Όποτε παίρνουμε ένα σημείο με αυτόν τον τρόπο, αναγκαστικά καθορίζεται απολύτως από το κείμενο. Το κείμενο απλώς δεν μπορεί να δώσει καλύτερο καθορισμό από αυτόν. Έτσι λοιπόν, τονίζω το εξής: Ως «μη επαρκώς καθορισμένα γράμματα» δεν εννοώ σε καμία περίπτωση «μεταβλητά γράμματα». Αντιθέτως, τα μεταβλητά σημεία πρέπει να είναι απολύτως καθορισμένα. Αυτό που εννοώ είναι γράμματα για τα οποία το κείμενο αφήνει μια αοριστία – δεν τα καθορίζει πλήρως, με δεδομένους τους μαθηματικούς στόχους.

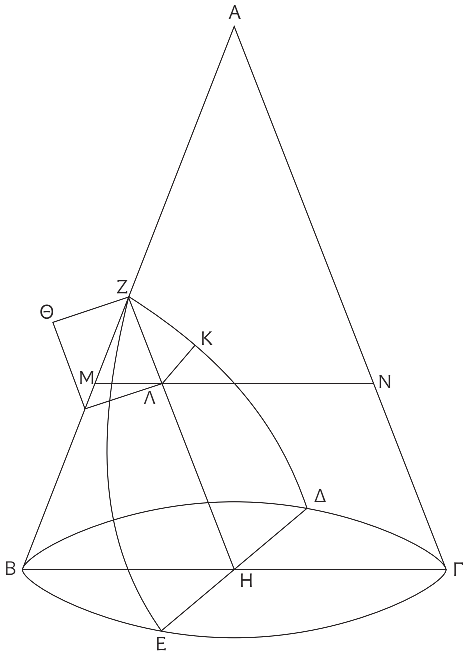
Πάμε τώρα στα αποτελέσματα.[34] Στο Βιβλίο XIII των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, περίπου το 47% των γραμμάτων είναι απολύτως καθορισμένα, περίπου το 8% μη επαρκώς καθορισμένα, περίπου το 19% απολύτως μη καθορισμένα και περίπου το 25% ξεκινούν ως απολύτως μη καθορισμένα ή μη επαρκώς καθορισμένα και στη συνέχεια αυξάνεται ο βαθμός καθορισμού. Στο Βιβλίο I των *Κωνικών* του Απολλώνιου, περίπου το 42% είναι απολύτως καθορισμένα, περίπου το 37% μη επαρκώς καθορισμένα, περίπου το 4% είναι απολύτως μη καθορισμένα και περίπου το 16% ξεκινούν ως απολύτως μη καθορισμένα ή μη επαρκώς καθορισμένα και, στη συνέχεια, ο βαθμός καθορισμού αυξάνεται. Ο συνολικός αριθμός των γραμμάτων και στις δύο έρευνες είναι 838.

Πολύ συχνά –τις περισσότερες φορές– τα γράμματα δεν είναι απολύτως καθορισμένα. Πώς ξέρουμε λοιπόν τι αντιπροσωπεύουν; Πολύ απλά – το βλέπουμε στο διάγραμμα.

Στην πραγματικότητα, το δύσκολο είναι να «κλείσεις τα μάτια» στο διάγραμμα, να μάθεις να το αγνοείς και να φαντάζεσαι

---

34 Οι πλήρεις πίνακες, με μια πιο τεχνική ανάλυση της σημειωτικής του καθορισμού, θα δημοσιευτούν στον Netz (υπό δημοσίευση). [Σ.τ.Ε.: Το άρθρο, εν τω μεταξύ, δημοσιεύτηκε: Reviel Netz, «The Limits of Text in Greek Mathematics» στο *History of Science, History of Text*, ed. Karine Chemla, σ. 161-176].



Σχημα 1.5 Απολλώνιος, *Κωνικά* I.II.

ότι η μόνη πληροφορία που υπάρχει δίνεται από το κείμενο. Η οπτική πληροφορία είναι από μόνη της πειστική με τρόπο διακριτικό. Εδώ, ο εξομολογητικός τόνος ίσως βοηθήσει στη μεταστροφή των αναγνωστών μου: μου πήρε πολύ καιρό μέχρι να συνειδητοποιήσω πόσο διαδεδομένη είναι η έλλειψη καθορισμού. Το ακόλουθο παράδειγμα ήταν για μένα ένα σοκ – και μάλιστα πρόκειται για μια πολύ τυπική περίπτωση.

Ας δούμε την πρόταση 11 στο Βιβλίο I των *Κωνικών* του Απολλώνιου (σχ. 1.5). Ο καθορισμός του γράμματος Λ γίνεται στο 38.26, όπου βεβαιώνεται ότι βρίσκεται σε μια παράλληλη της ΔΕ, η οποία διέρχεται από το Κ. Άρα, το Λ βρίσκεται σε μια ορισμένη ευθεία. Αλλά, όσον αφορά το κείμενο, δεν υπάρχει τρόπος να γνωρίζουμε ότι το Λ είναι ένα πολύ συγκεκριμένο σημείο σε αυτή την ευθεία – εκείνο στο οποίο τέμνεται με την ευθεία ΖΗ. Δεν είχα ποτέ σκεφτεί καν αυτή την ανεπάρκεια του κειμένου – πάντοτε διάβαζα το διάγραμμα στο κείμενο. Αυτό το σοκ αποτέλεσε για μένα την αρχή της έρευνας. Με την ολοκλήρωση της έρευνας, θα πρέπει να εξεταστούν τα συμπεράσματά της.

Πρώτον, γιατί υπάρχουν τόσες πολλές περιπτώσεις που υπολείπονται του πλήρους καθορισμού; Προτού απαντήσω αυτό το ερώτημα, πρέπει να αποσαφηνίσω ότι τα αποτελέσματά μου έχουν μικρή ποσοτική σημασία. Είναι σαφές ότι ο τρόπος με τον οποίο τα γράμματα δεν αποκτούν πλήρη καθορισμό στον Απολλώνιο είναι διαφορετικός από εκείνον στον Ευκλείδη. Αναμένω ότι υπάρχει έντονη μεταβλητότητα ακόμη και μεταξύ των έργων του ίδιου συγγραφέα. Ο τρόπος μη πλήρους καθορισμού των γραμμάτων εξαρτάται από το μαθηματικό πλαίσιο. Ο Ευκλείδης, για παράδειγμα, στο Βιβλίο XIII, μπορεί να κατασκευάζει έναν κύκλο, π.χ. τον ΑΒΓΔΕ, και μετά να κατασκευάζει ένα πεντάγωνο μέσα στον ίδιο κύκλο, έτσι ώστε οι κορυφές του να είναι τα ίδια σημεία ΑΒΓΔΕ. Εδώ έχουμε μια μετατόπιση από τον μη επαρκή καθορισμό στον πλήρη καθορισμό, και αυτό απαιτεί το αντικείμενο με το οποίο ασχολείται στο βιβλίο του. Στα *Κωνικά*, οι κοινές κατασκευές είναι παράλληλες ευθείες και τεταγμένες, και τα γράμματα σε αυτές είναι συχνά μη επαρκώς καθορισμένα (βασικά, είναι παρόμοια με το «*BC*» στα σχ. 1.2α και 1.2β παραπάνω).

Εκείνο που μοιάζει πιο σταθερό είναι το ποσοστό των πλήρως καθορισμένων γραμμάτων. Λιγότερα από τα μισά γράμματα καθορίζονται πλήρως – αλλά όχι πολύ λιγότερα από τα μισά. Είναι λες και οι συγγραφείς δεν ενδιαφέρονταν εάν ένα γράμμα είναι καθορισμένο ή όχι, και ο πλήρης καθορισμός έμεινε ως τυχαίο αποτέλεσμα.

Και αυτό ακριβώς ισχυρίζομαι ότι ισχύει. Πουθενά στα Ελληνικά Μαθηματικά δεν βρίσκουμε μια στιγμή καθορισμού per se, μια στιγμή που σκοπός της είναι να διασφαλίσει ότι η απόδοση των γραμμάτων μέσα στο κείμενο είναι καθορισμένη. Στα σύγχρονα μαθηματικά, τέτοιες στιγμές είναι πολύ συνηθισμένες, τουλάχιστον από την εποχή του Καρτέσιου.[35] Όμως, στα Ελληνικά

35 Στον Καρτέσιο, το ίδιο πράγμα είναι ταυτόχρονα και γεωμετρικό και αλγεβρικό: είναι και ένα ευθύγραμμο τμήμα (που ονομάζεται *AB*), αλλά και μια αλγεβρική μεταβλητή (που ονομάζεται a). Όταν εξετάζεται η γεωμετρική διάταξη, χρησιμοποιείται το «*AB*»· όταν δίνεται η αλγεβρική σχέση, χρησιμοποιείται το «a». Το τετράγωνο επί της ευθείας είναι «το τετράγωνο επί της *AB*» (αν το δούμε γεωμετρικά) ή το a^2 (αν το δούμε αλγεβρικά). Ο Καρτέσιος, για να κάνει αυτό το δι-

Μαθηματικά, οι καθορισμοί γίνονται, κυριολεκτικά, ambulando. Η ουσία του αρχαιοελληνικού «προστακτικού» στοιχείου στα Ελληνικά Μαθηματικά –«έστω ότι έχει αχθεί ευθεία ...» κ.λπ.– είναι να κάνει κάποια δουλειά στον γεωμετρικό χώρο, να βάλει τα πράγματα να κινηθούν εκεί. Όταν μια γραμμή άγεται από ένα σημείο σε ένα άλλο, τα γράμματα που αντιστοιχούν στην αρχική και την τελική θέση της κίνησης θα πρέπει να αναφέρονται. Αλλά δεν είναι απαραίτητο να είναι προσεκτικά διαφοροποιημένα· δεν χρειάζεται να γνωρίζει κάποιος επακριβώς ποια είναι η αρχή και ποιο το τέλος – και τα δύο κάνουν την ίδια δουλειά, παράγουν την ίδια γραμμή (εξού και ο μη επαρκής καθορισμός)· και τα σημεία που διατρέχει κανείς με αυτή την κίνηση μπορούν να μην αναφερθούν καθόλου (εξού και ο πλήρης μη καθορισμός).

Με δυο λόγια, αυτό που βλέπουμε είναι ότι ενόσω μελετάται το κείμενο, το διάγραμμα θεωρείται ότι υπάρχει. Το κείμενο θεωρεί δεδομένο το διάγραμμα. Αυτό κατοπτρίζεται στην υλοποίηση που είδαμε πιο πάνω. Στην πραγματικότητα, είναι η απλή εξήγηση της χρήσης προστακτικών παρακειμένου[36] στις αναφορές που γίνονται στην *έκθεση*. Και δεν αντανακλά παρά το γεγονός ότι, τη στιγμή που φτάνει κανείς να μελετήσει το διάγραμμα, αυτό έχει ήδη σχεδιαστεί.[37]

Το επόμενο επιχείρημα είναι ότι, αντιστρόφως, το κείμενο δεν είναι ανακτήσιμο από το διάγραμμα. Φυσικά, το διάγραμμα δεν μας λέει τι υποστηρίζει η πρόταση. Θεωρητικά, θα μπορούσε να το κάνει με τη βοήθεια κάποιου συμβολικού μηχανισμού – δεν το κάνει όμως. Επιπλέον, το διάγραμμα δεν καθορίζει από μόνο του όλα τα αντικείμενα. Σε τελική ανάλυση, τουλάχιστον στην περί-

---

πλό αφηγηματικό σύστημα να δουλέψει, πρέπει να εισαγάγει σαφείς καθορισμούς per se, προσδιορίζοντας *σύμβολα*. Αυτό συμβαίνει για πρώτη φορά στον Καρτέσιο (1637) 300, και κάλλιστα μπορεί να είναι η πρώτη στιγμή καθορισμού per se στην ιστορία των μαθηματικών.

36 *ἀναγεγράφθω, ἐκβεβλήσθω, τετμήσθω, ἤχθω.* (Σ.τ.Μ.)

37 Ως εκ τούτου, η αναφορά στον Lachterman (1989) 65-7 ότι οι παρελθοντικές προστατικές εκφράζουν ένα συγκεκριμένο horror operandi στερείται κινήτρων, πέραν του ότι στηρίζεται στην πολύ αβάσιμη μεθοδολογία συναγωγής από γλωσσικές πρακτικές μιας εμπεριστατωμένης φιλοσοφίας, την οποία υποτίθεται ότι συμμερίζονταν όλοι οι αρχαίοι μαθηματικοί. Η μεθοδολογία που υιοθετώ στο έργο μου σκοπό έχει να εξηγήσει κοινές γλωσσικές πρακτικές μέσα από κοινές επικοινωνιακές καταστάσεις.

πτωση της σφαιρικής γεωμετρίας, δεν μοιάζει καν με το αντικείμενό του. Όταν το διάγραμμα είναι «πυκνό», κορεσμένο από πληροφορία, ακόμη και η απόδοση γραμμάτων σε σημεία μπορεί να μην είναι προφανής στο διάγραμμα, και τουλάχιστον οι σημερινοί αναγνώστες, που διαβάζουν τα σύγχρονα διαγράμματα, χρησιμοποιούν σε κάποιο βαθμό το κείμενο, προκειμένου να διευκρινίσουν τι λέει το διάγραμμα. Η έμφαση σε αυτή την ενότητα βρίσκεται στην αλληλεξάρτηση. Δεν προσπαθώ απλώς να ανατρέψω την παραδοσιακή ισορροπία μεταξύ κειμένου και διαγράμματος· προσπαθώ να δείξω ότι δεν μπορούν να διαχωριστούν, ότι κανένα τους δεν έχει νόημα, όταν το άλλο απουσιάζει.

2.1.2 *Ο ρόλος κειμένου και διαγράμματος στις συναγωγές*

Γενικά, ισχυρισμοί μπορεί να προκύπτουν συμπερασματικά μόνο από το κείμενο, μόνο από το διάγραμμα ή από τον συνδυασμό τους. Στο Κεφάλαιο 5 πραγματεύομαι λεπτομερέστερα τα ερείσματα των ισχυρισμών. Αυτό που παρουσιάζω εδώ είναι μια εισαγωγή.

Πρώτον, ορισμένοι ισχυρισμοί όντως συνάγονται μόνο από το κείμενο. Ας πάρουμε, λόγου χάριν, το ακόλουθο:[38]

> Όπως η ΒΕ είναι προς την ΕΔ, έτσι είναι τέσσερις φορές το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΒΕ, ΕΑ προς τέσσερις φορές το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΑΕ, ΕΔ.

Εδώ μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει κάθε είδους δεδομένο, όπως για παράδειγμα τις σχέσεις μεταξύ ορθογωνίων και πλευρών, καθώς και κάποια βασική αριθμητική. Μετά βίας μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει το διάγραμμα, διότι στην πραγματικότητα «ορθογώνια» αυτού του τύπου συχνά περιλαμβάνουν ευθείες που δεν σχηματίζουν ορθή γωνία μεταξύ τους· οι ευθείες συχνά δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.[39]

---

38 Απολλώνιος, *Κωνικά* I.33, 100.7-8. Το ελληνικό κείμενο είναι πιο ελλειπτικό από τη δική μου μετάφραση. [*ἀλλ' ὡς ἡ ΒΕ πρὸς ΕΔ, τὸ τετράκις ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΕΔ*].

39 Εδώ οι αναφερόμενες γραμμές όντως έχουν κοινό σημείο, αλλά δεν σχηματίζουν ορθές γωνίες μεταξύ τους. Βλ., λόγου χάριν, *Κωνικά* I.34,

Αυτός λοιπόν είναι ένας τύπος ισχυρισμών – ισχυρισμοί που μπορεί να θεωρηθούν λεκτικοί και όχι οπτικοί.[40] Μια άλλη κατηγορία είναι οι ισχυρισμοί που βασίζονται μόνο στο οπτικό. Το να πούμε ότι υπάρχουν τέτοιοι ισχυρισμοί σημαίνει ότι το κείμενο κρύβει υπόρρητες παραδοχές που περιέχονται στο διάγραμμα.

Το ότι απαντούν τέτοιες περιπτώσεις στα Ελληνικά Μαθηματικά βρίσκεται, φυσικά, στην καρδιά του γεωμετρικού προγράμματος του Hilbert. Ο Hilbert, ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του 20ού αιώνα, ο οποίος διαρκώς επέστρεφε σε θεμελιώδη ζητήματα, επιχείρησε στο Hilbert (1899) να ξαναγράψει τη γεωμετρία έτσι ώστε να μην περιέχει λεκτικές παραδοχές. Οποιαδήποτε παραδοχή εμφανίζεται στο κείμενο του Hilbert (1899) είτε αποδεικνύει είτε ρητά τίθεται ως αξίωμα. Αυτό δεν είχε γίνει ποτέ πριν από τον Hilbert, κυρίως επειδή μεγάλο μέρος της πληροφορίας προερχόταν από το διάγραμμα. Όπως πολύ καλά γνωρίζουμε, ήδη η πρώτη πρόταση των *Στοιχείων* του Ευκλείδη περιέχει μια υπόρρητη παραδοχή που στηρίζεται στο διάγραμμα – ότι οι κύκλοι της πρότασης τέμνονται (σχ. 1.6).[41]

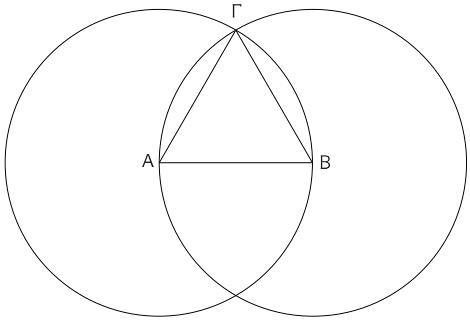
Υπάρχει ένα ολόκληρο σύνολο παραδοχών αυτού του είδους, που ενίοτε ονομάζονται «αξιώματα Pasch».[42] «Μία ευθεία που

104.3, το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΚΒ, ΑΝ – ευθείες που δεν έχουν κοινό σημείο.

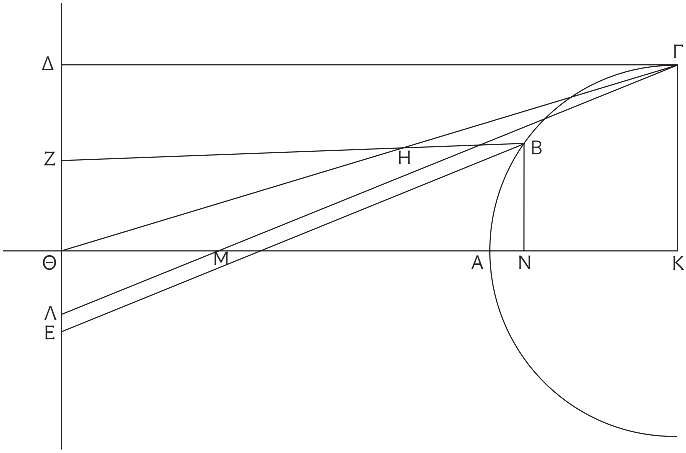
40 Αυτός ο τύπος δεν εξαντλείται με παραδείγματα όπως το παραπάνω (την αποκαλούμενη «γεωμετρική άλγεβρα»). Λόγου χάριν, κανένας υπολογισμός, όπως π.χ. στο *Περί Μεγεθών και Αποστημάτων* του Αρίσταρχου, δεν οφείλει κάτι στο διάγραμμα. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ακόμη και η «γεωμετρική άλγεβρα» εξακολουθεί να είναι «γεωμετρική». Το κείμενο δεν μιλάει για πολλαπλασιασμούς, αλλά για ορθογώνια. Αυτό φυσικά συνηγορεί υπέρ της πρωτοκαθεδρίας του οπτικού έναντι του λεκτικού. Γενικά, βλ. Unguru (1975, 1979· ελλ. μτφρ. 2006), Unguru and Rowe (1981-2), Unguru and Fried (2001), Høyrup (1990a), για μια λεπτομερή κριτική σε κάθε ερμηνεία της «γεωμετρικής άλγεβρας» που δεν λαμβάνει υπόψη το κίνητρο της οπτικοποίησής της. Ο ίδιος ο όρος είναι παραπλανητικός, αλλά μας βοηθάει να προσδιορίσουμε μια πολύ γνωστή ομάδα προτάσεων, ως εκ τούτου τον χρησιμοποιώ με τα ανάλογα εισαγωγικά.

41 Παραπέμπω στον Russell (1903) 404 κ.εξ., όπου πολύ επικριτικά και, κατά μία έννοια, δίκαια ασκείται κριτική στον Ευκλείδη για τέτοιες λογικές παραλείψεις.

42 Για την απουσία αξιωμάτων Pasch στα Ελληνικά Μαθηματικά, βλ. Klein (1939) 201-2.



Σχημα 1.6 Ευκλείδης, *Στοιχεία* Ι.1

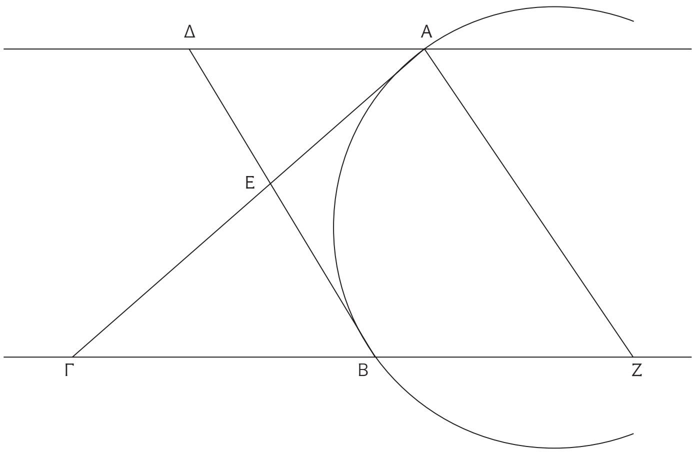


Σχημα 1.7 Απολλώνιος, *Κωνικά* ΙΙΙ.1 (περίπτωση παραβολής)

τέμνει ένα τρίγωνο και περνάει στο εσωτερικό του τέμνει αυτό το τρίγωνο σε δύο σημεία» – πριν από τον 19ο αιώνα τέτοιες παραδοχές γενικά θεωρούνταν διαγραμματικά προφανείς.

Πολλοί ισχυρισμοί εξαρτώνται αποκλειστικά από το διάγραμμα και όμως δεν περιλαμβάνουν κάτι τόσο ισχυρό όσο τα «αξιώματα Pasch». Λόγου χάριν, στην πρόταση ΙΙΙ. 1 των *Κωνικών* του Απολλώνιου (σχ. 1.7):[43] Το επιχείρημα είναι ότι το ΑΔΒΖ ισούται με το ΑΓΖ και, άρα, εάν αφαιρέσουμε το κοινό ΑΕΒΖ, το

43 318.15-18.



Σχημα 1.8 Απολλώνιος, *Κωνικά* III.1 (περίπτωση παραβολής)

ΑΔΕ που απομένει ισούται με το ΓΒΕ. Αν κανείς υιοθετήσει μια πολύ μεγαλεπήβολη οπτική, θα μπορούσε να πει ότι αυτό περιλαμβάνει παραδοχές για την πρόσθεση, ή κάτι παρόμοιο. Αυτό εν μέρει μπορεί να ισχύει, αλλά το ουσιαστικό έρεισμα του ισχυρισμού είναι η αναγνώριση των αντικειμένων στο διάγραμμα.

Το δικό μου επιχείρημα, περί αλληλεξάρτησης μεταξύ κειμένου και διαγράμματος, σημαίνει ότι πολλοί ισχυρισμοί πηγάζουν από τον συνδυασμό αυτών των δύο. Φυσικά, τέτοιες περιπτώσεις, ενώ υπάρχουν παντού, είναι δύσκολο να εντοπιστούν με ακρίβεια. Ας πάρουμε, παραδείγματος χάριν, την πρόταση I.45 των *Κωνικών* του Απολλώνιου (σχ. 1.8). Υποστηρίζεται –δεν δίνονται ιδιαίτεροι λόγοι– ότι ΜΚ:ΚΓ::ΓΔ:ΔΛ.[44] Το υπόρρητο έρεισμα αυτού είναι η ομοιότητα των τριγώνων ΜΚΓ, ΓΔΛ. Τώρα, τα διαγράμματα δεν μπορούν από μόνα τους να δείξουν με τρόπο ικανοποιητικό την ομοιότητα των τριγώνων. Όμως τα διαγράμματα μπορεί να είναι βοηθητικά με άλλους τρόπους, διότι στην πραγματικότητα η ομοιότητα των αντίστοιχων τριγώνων δεν βεβαιώνεται σε αυτή την πρόταση. Για να δούμε αυτή την ομοιότητα, πρέπει να συγκεντρώσουμε ορισμένα υπαινικτικά στοιχεία: η ΓΔ είναι παράλληλη προς την ΚΘ (στο 136.27)· το Μ βρίσκεται στην ΚΘ (δεν καθορί-

44 138.10-11.

ζεται επαρκώς από το κείμενο)· η ΓΚ είναι παράλληλη προς τη ΔΘ (στο 138.6)· το Λ βρίσκεται στη ΔΘ (δεν καθορίζεται επαρκώς από το κείμενο)· το Μ βρίσκεται στη ΓΛ (στο 136.26). Εάν τα συνδυάσουμε όλα αυτά μαζί, μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα δύο τρίγωνα είναι όμοια. Κατά μία έννοια, όντως συνδυάζουμε μεταξύ τους αυτά τα υπαινικτικά στοιχεία. Όμως υποτίθεται ότι πρέπει να είμαστε σε θέση να το κάνουμε με μια ματιά (σημαντική φράση!). Πώς το κάνουμε λοιπόν; Οργανώνουμε τα διάφορα δεδομένα που έχουμε, και τα οργανώνουμε εύκολα, επειδή βρίσκονται όλα ταυτόχρονα διαθέσιμα στο διάγραμμα. Το διάγραμμα είναι συνοπτικό.

Προσοχή: δεν ισχύει ότι το διάγραμμα διαβεβαιώνει κάποια πληροφορία του τύπου «η ΓΚ είναι παράλληλη προς τη ΔΘ». Τέτοιου είδους ισχυρισμοί δεν μπορεί να αποδειχτούν αληθείς σε ένα διάγραμμα. Όμως από τη στιγμή που το κείμενο διασφαλίζει την παραλληλία των γραμμών, αυτή η γνώση μπορεί να κωδικοποιηθεί από τον αναγνώστη στην απεικόνιση του διαγράμματος. Όταν είναι απαραίτητο, αυτού του είδους η γνώση μπορεί να επιστρατευτεί για να παραγάγει, ως ενιαίο σύνολο, περαιτέρω αποτελέσματα.

2.1.3 *Το διάγραμμα οργανώνει το κείμενο*

Ακόμη και σε αυστηρά γλωσσικό επίπεδο είναι δυνατό να εντοπιστεί η παρουσία διαγράμματος. Εντυπωσιακό παράδειγμα είναι το ακόλουθο (σχ. 1.9):[45]

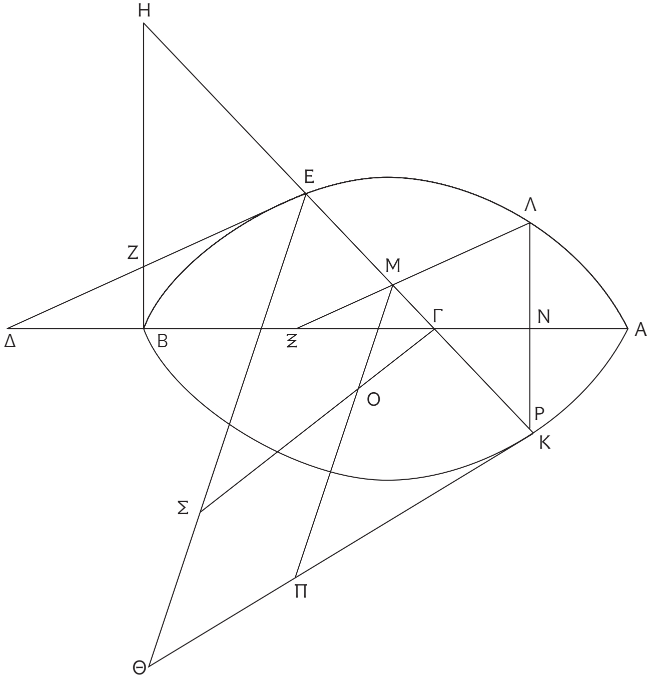
> Και ας ληφθεί ένα σημείο στην τομή, το Λ, και, από αυτό, ας αχθεί η ΛΜΞ παράλληλη προς την ΕΔ, η ΛΡΝ προς τη ΒΗ και η ΜΠ προς την ΕΘ.

Από συντακτική άποψη, η πρόταση εννοεί ότι η ΜΠ περνάει από το Λ – το οποίο δεν συμβαίνει. Το διάγραμμα μας αναγκάζει να μεταφέρουμε το Λ σε ένα τμήμα της πρότασης και σε ένα άλλο τμήμα μας αναγκάζει να σταματήσουμε να το μεταφέρουμε.[46]

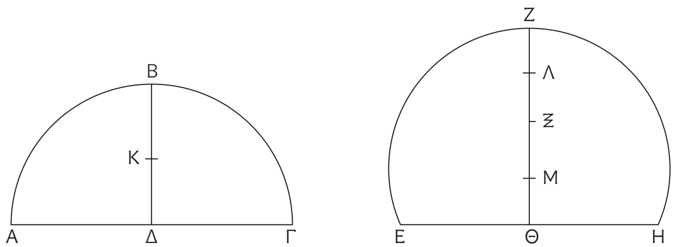
---

45 Απολλώνιος, *Κωνικά* I.50, 150.23-5: *καὶ εἰλήφθω τι ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ* Λ, *καὶ δι᾽ αὐτοῦ τῇ* ΕΔ *παράλληλος ἤχθω ἡ* ΛΜΞ, *τῇ δὲ* ΒΗ *ἡ* ΛΡΝ, *τῇ δὲ* ΕΘ *ἡ* ΜΠ.

46 Πρβλ. επίσης, στο ίδιο έργο, την πρόταση 31 στο 94.2-3: Συντακτικά φαίνεται να υπονοεί ότι η ΔΘ περνάει από το Ε – το οποίο δεν ισχύει.



Σχημα 1.9 Απολλώνιος, *Κωνικά* I.50 (περίπτωση έλλειψης)



Σχημα 1.10 Αρχιμήδης, *Επ. Ισορ.* II.7

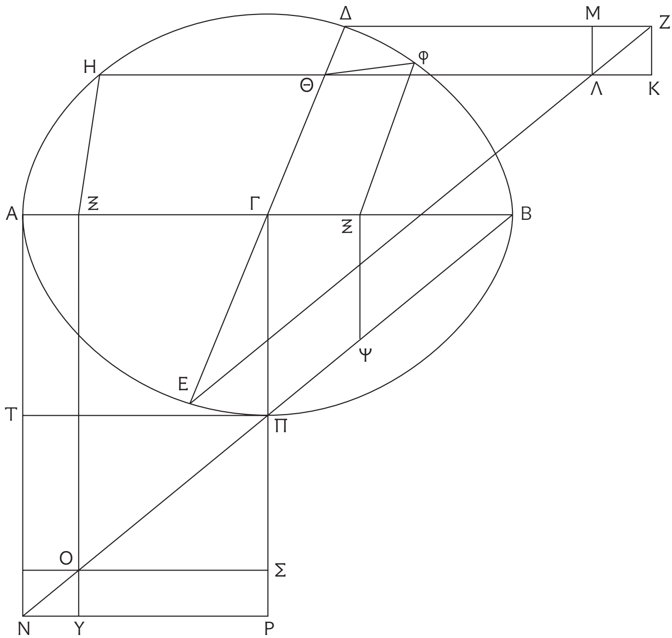
Στην ίδια πρόταση, 92.23-4: πού είναι το Γ, στην υπερβολή ή στη διάμετρο; Η σύνταξη, αν μη τι άλλο, ευνοεί την υπερβολή· το διάγραμμα το τοποθετεί πάνω στη διάμετρο – δύο τυχαία παραδείγματα από μια τυχούσα μαθηματική πρόταση.

Τα πραγματολογικά στοιχεία του κειμένου παρέχονται από το διάγραμμα. Το διάγραμμα είναι το πλαίσιο, το σύνολο των προϋποθέσεων που διέπουν τη συζήτηση.

Ένας ιδιαίτερος και σημαντικός τρόπος με τον οποίο το διάγραμμα οργανώνει το κείμενο είναι η διάταξη των περιπτώσεων. Αυτό είναι αποτέλεσμα της διαγραμματικής παγίωσης της αναφοράς. Ας δούμε την πρόταση Βιβλίου ΙΙ.7 του *Επ. Ισορ.* του Αρχιμήδη: Οι ΕΖΗ και ΑΒΓ είναι δύο όμοιες τομές και οι ΖΘ, ΒΔ είναι οι αντίστοιχες διάμετροι· τα Λ και Κ είναι τα αντίστοιχα κέντρα βάρους τους (σχ. 1.10). Η πρόταση αποδεικνύει δι' απαγωγής ότι ΖΛ:ΛΘ::ΒΚ:ΚΔ. Πώς; Θεωρώντας ότι ένα άλλο σημείο Μ πληροί τη σχέση ΖΜ:ΜΘ::ΒΚ:ΚΔ. Το Μ θα μπορούσε να βρίσκεται είτε πάνω είτε κάτω από το Λ. Οι περιπτώσεις δεν είναι συμμετρικές. Επομένως, πρόκειται για δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Ο Αρχιμήδης, ωστόσο, δεν κάνει διάκριση των περιπτώσεων στο κείμενο. Μόνο το διάγραμμα μπορεί να απαντήσει στο ερώτημα ποια περίπτωση προτίμησε να συζητήσει.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να φανεί ότι η κατευθυντήρια αρχή κατά την ανάπτυξη της απόδειξης είναι χωρική και όχι λογική. Ας πάρουμε, λόγου χάριν, την πρόταση Βιβλίο Ι.15 των *Κωνικών* του Απολλώνιου (σχ. 1.11). Η πρόταση ασχολείται με μια κατασκευή που βασίζεται σε μια έλλειψη. Αυτή η κατασκευή έχει δύο «πτέρυγες», ας πούμε. Η ανάπτυξη της απόδειξης είναι η ακόλουθη: πρώτον, κάτι γίνεται στην κατώτερη πτέρυγα· μετά, γίνεται επανεπεξεργασία των αποτελεσμάτων στην ίδια την έλλειψη· τέλος, τα αποτελέσματα μεταφέρονται στην ανώτερη πτέρυγα. Θεωρητικά, θα μπορούσε κανείς να προχωρήσει διαφορετικά, συλλέγοντας αποτελέσματα από ολόκληρο το σχήμα ταυτόχρονα. Ο Απολλώνιος επέλεξε να προχωρήσει χωρικά.[47] Υπάρχουν διάφορα πλαίσια όπου μπορεί να φανεί ο ρόλος της χωρικής οπτικοποίησης, βάσει των πρακτικών που συνδέονται με την απόδοση γραμμάτων σε αντικείμενα – θα επανέλθω στο θέμα αυτό λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 2. Η σημαντική γενική παρατήρηση είναι ότι το διάγραμμα εδραιώνει έναν

47 Για το πρώτο μέρος βλ. 60.5-19, για το δεύτερο βλ. 60.19-29, για το τρίτο βλ. 60.29-62.13. Το ότι το δεύτερο μέρος ρίχνει μια σύντομη ματιά –επτά λέξεις– στην κατώτερη πτέρυγα καταδεικνύει την ενδεχομενικότητα αυτής της χωρικής οργάνωσης.

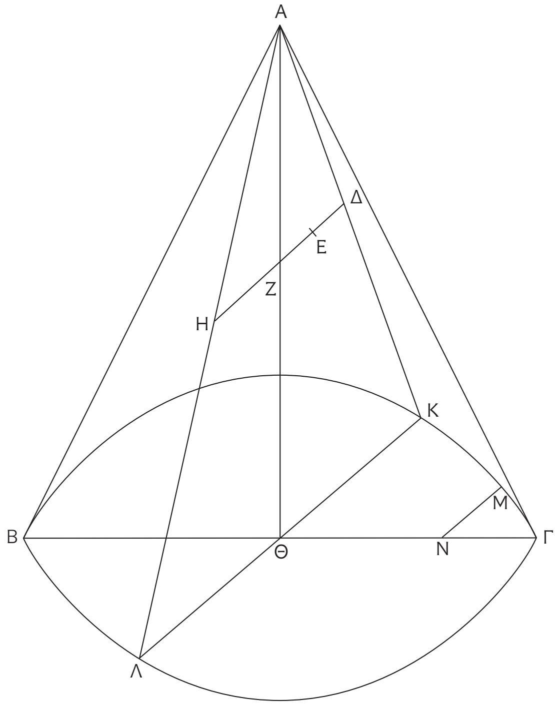


Σχημα 1.11 Απολλώνιος, *Κωνικά* Ι.50

κόσμο αναφοράς, που οριοθετεί το κείμενο. Και πάλι αυτό είναι αποτέλεσμα του ρόλου του διαγράμματος κατά τη διαδικασία παγίωσης της αναφοράς. Ας εξετάσουμε μια πολύ τυπική περίπτωση, το Λ στην πρόταση Ι.6 των *Κωνικών* του Απολλώνιου. Ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο (σχ. 1.12):[48] «Από το Κ, ας αχθεί κάθετη στη ΒΓ (συγκεκριμένα) η ΚΘΛ». Ο τόπος που έχει δημιουργηθεί για το Λ είναι μια γραμμή. Πώς ξέρουμε ότι βρίσκεται στο όριο αυτής της γραμμής, στον κύκλο ΓΚΒ; Επειδή το Λ είναι το τελικό σημείο της δράσης της χάραξης της γραμμής ΚΘΛ – και επειδή η δράση αυτή πρέπει να περατωθεί πάνω σε αυτόν τον κύκλο, *διότι αυτός ο κύκλος είναι το όριο του σύμπαντος αυτής της πρότασης*. Απλούστατα, δεν υπάρχουν σημεία έξω από αυτόν τον κύκλο.

Οι ελληνικές γεωμετρικές προτάσεις δεν αφορούν τον καθολικό, άπειρο χώρο. Όπως γνωρίζουμε, οι γραμμές και τα επίπεδα

48 22.3.



Σχημα 1.12 Απολλώνιος, *Κωνικά* I.6 (μία από τις περιπτώσεις)

στα Ελληνικά Μαθηματικά είναι πάντοτε πεπερασμένα τμήματα της άπειρης γραμμής και του άπειρου επιπέδου τα οποία *εμείς* προβάλλουμε. Είναι πράγματι απείρως επεκτάσιμα, ωστόσο είναι πεπερασμένα. Κάθε γεωμετρική πρόταση θέτει το δικό της σύμπαν, που είναι το διάγραμμά της.

2.1.4 *Η αμοιβαία εξάρτηση κειμένου και διαγράμματος: σύνοψη*

Οι υποενότητες 2.1.1-2.1.3 δείχνουν συνολικά ότι το διάγραμμα χρησιμοποιείται ως όχημα λογικής. Αυτό θα μπορούσε να θεωρηθεί ένα θαύμα. Δεν είναι τα διαγράμματα στην ουσία τους παραπλανητικά βοηθήματα, που πρέπει να τα χρησιμοποιούμε με προσοχή;

Ο Mueller, αφού επεσήμανε τις ελληνικές υπόρρητες παραδοχές, πήγε ένα βήμα παραπέρα προσθέτοντας ότι αυτές δεν ακυρώνουν τα Ελληνικά Μαθηματικά, διότι είναι *αληθείς*.[49] Πρόκειται για έναν αναπάντεχο ισχυρισμό από κάποιον όπως ο Mueller, ο οποίος έχει εντρυφήσει στη σύγχρονη φιλοσοφία των μαθηματικών, όπου η αλήθεια συχνά θεωρείται σχετική προς ένα σώμα παραδοχών. Ωστόσο, ο ισχυρισμός του είναι σωστός.

Ας αρχίσουμε λέγοντας ότι ένα διάγραμμα μπορεί πάντοτε να είναι «αληθές», με την έννοια ότι βρίσκεται εκεί. Και η πιο αφηρημένη σύγχρονη άλγεβρα χρησιμοποιεί συχνά διαγράμματα ως απεικονίσεις λογικών σχέσεων.[50] Τα διαγράμματα, όπως και οι λέξεις, ίσως να είναι ένας τρόπος κωδικοποίησης πληροφορίας. Αν λοιπόν δούμε τα διαγράμματα μ' αυτόν τον τρόπο, το να ρωτήσουμε «πώς μπορεί τα διαγράμματα να είναι αληθή;» είναι σαν να ρωτάμε «πώς μπορεί η γλώσσα να είναι αληθής;» – ερώτημα που δεν στερείται νοήματος, αλλά είναι σαφέστατα διαφορετικό από εκείνο με το οποίο ξεκινήσαμε.

Δεν είναι όμως μόνο αυτό. Το πρόβλημα, βεβαίως, είναι ότι το διάγραμμα, ως φυσικό αντικείμενο, *δεν* προτυποποιεί τους ισχυρισμούς που το αφορούν. Το διάγραμμα ως φυσικό αντικείμενο και το γραπτό κείμενο συχνά αντίκεινται: στο κείμενο, οι γραμμές είναι παράλληλες· στο διάγραμμα, δεν είναι. Μόνο εάν αντιληφθούμε το διάγραμμα με συγκεκριμένο τρόπο μπορεί αυτό να λειτουργήσει μαζί με το κείμενο. Όμως αυτή η προειδοποίηση είναι στην πραγματικότητα πολύ λιγότερο σημαντική απ' όσο ακούγεται, αφού κάθε τι αντιληπτό το αντιλαμβανόμαστε με συγκεκριμένο τρόπο και όχι στην ολότητα της φυσικής του παρουσίας. Επομένως, η λογική χρησιμότητα του διαγράμματος *ως ψυχολογικού αντικειμένου* δεν δημιουργεί προβλήματα – σημαντική προϋπόθεση είναι ότι πρέπει να αντιληφθούμε το διάγραμμα με έναν διϋποκειμενικά συνεπή τρόπο.

Ο Poincaré –που αναμφίβολα είχε τα δικά του ζητήματα να επιλύσει– έδωσε την ακόλουθη ερμηνεία για το διάγραμμα:[51] «Συχνά λέγεται ότι η γεωμετρία είναι η τέχνη του ορθού συλλογι-

49 Mueller (1981) 5.

50 Βλ. π.χ. Maclane and Birkhoff (1968), *σποράδην* (εξήγηση της διαγραμματικής τεχνικής στη σ. 5 κ.εξ.)

51 Παραθέτω από την αγγλική μετάφραση, Poincaré (1963) 26.

σμού για κακοφτιαγμένα σχήματα. Αυτό δεν είναι χαριτολόγημα, αλλά μια αλήθεια που αξίζει να τη στοχαστούμε. Τι είναι όμως ένα κακοφτιαγμένο σχήμα; Είναι εκείνο που σχεδιάζει ο αδέξιος τεχνίτης».

Αμέσως μετά, ο Poincaré προχωρεί σε χαρακτηρισμό του χρήσιμου διαγράμματος: «Αυτός [ο αδέξιος τεχνίτης] παραμορφώνει τις αναλογίες λίγο έως πολύ κατάφωρα ... Αλλά δεν πρέπει να παριστάνει μια κλειστή καμπύλη με μια ανοιχτή καμπύλη ... Η διαίσθηση δεν πρέπει να εμποδίζεται από τις ατέλειες του σχεδιασμού, που έχουν ενδιαφέρον μόνο στη μετρική ή την προβολική γεωμετρία. Όμως η διαίσθηση θα είναι αδύνατο να λειτουργήσει όταν αυτές οι ατέλειες περιλαμβάνουν *analysis situs*».

Η *analysis situs*[52] είναι το αγαπημένο θέμα του Poincaré, και πρέπει να το προσεγγίσουμε με προσοχή. Το διάγραμμα δεν είναι απλώς ένα γράφημα, έτσι όπως νοείται στη θεωρία γραφημάτων. Περιέχει τουλάχιστον ένα ακόμη είδος πληροφορίας, κι αυτό είναι η ευθύτητα των ευθείων γραμμών· η δσταθερή υπόθεση ότι τα σημεία βρίσκονται «σε μια γραμμή» γίνεται βάσει του διαγράμματος.[53] Γι' αυτό το γεγονός αξίζει να κάνουμε μια παρέκβαση.

Πώς μπορεί να βασιστεί κανείς στο διάγραμμα για τη διάκριση μεταξύ ευθείας και μη ευθείας; Η τεχνολογία του σχεδιασμού, περιγραφή της οποίας υπάρχει στην ενότητα 1, έδειξε ότι τα διαγράμματα μάλλον σχεδιάζονταν με μόνα εργαλεία τον κανόνα και τον διαβήτη. Η τεχνολογία δεν απεικόνιζε παρά μόνο τη διάκριση μεταξύ ευθείας και μη ευθείας. Το διάγραμμα που κατασκεύαζε το ανθρώπινο χέρι, σε αντίθεση με τα σχήματα της φύσης, διέπονταν μόνο από τη διάκριση μεταξύ ευθείας και μη ευθείας. Η τεχνολογία περιόριζε το άπειρο εύρος των γωνιών σε μια δυαδική διάκριση.[54]

---

52 Που αντιστοιχεί –στον βαθμό που νομιμοποιούμαστε να κάνουμε τέτοιες αντιστοιχίες– στη δική μας έννοια της «τοπολογίας».

53 Η πλήρης φράση *ἡ εὐθεῖα γραμμὴ* ΑΒ σχεδόν πάντοτε εμφανίζεται συντομευμένη στο ελάχιστο *ἡ* ΑΒ, παρόλο που αυτό μπορεί κάλλιστα να σημαίνει *ἡ γραμμὴ* ΑΒ απλώς –δηλαδή μια καμπύλη και όχι μια ευθεία γραμμή– και τούτο αντανακλά το γεγονός ότι αυτή τη βασική διάκριση, μεταξύ καμπύλης και ευθείας, μπορούσαν γενικά *να τη δουν* στο διάγραμμα.

54 Μέχρι στιγμής, η τεχνολογία δεν περιορίζεται στην Ελλάδα· τα βαβυ-

Αυτό φυσικά είναι κάτι υποθετικό, ωστόσο μπορεί να μας χρησιμεύσει ως εισαγωγή στον ακόλουθο συλλογισμό.

Υπάρχει ένα σημαντικό στοιχείο αλήθειας στην οπτική του Poincaré για το διάγραμμα. Η αξιοπιστία του διαγράμματος στηρίζεται σε ένα *πεπερασμένο* σύστημα σχέσεων. Έχω υποστηρίξει παραπάνω ότι η πρόταση αναφέρεται στο πεπερασμένο σύμπαν του διαγράμματος. Το σύμπαν αυτό είναι πεπερασμένο με δύο τρόπους. Είναι περιορισμένο στον χώρο από τα όρια του σχήματος και είναι διακριτό. Κάθε γεωμετρική πρόταση αναφέρεται σε ένα άπειρο, συνεχές σύνολο σημείων. Ωστόσο, παραπέμπει μόνο σε έναν περιορισμένο αριθμό σημείων, και αυτά είναι σχεδόν πάντοτε (ορισμένα από) τα σημεία που βρίσκονται στις τομές των γραμμών.[55] Το μέγα πλήθος των σημείων-προλετάριων, που συνδυαζόμενα κατασκευάζουν από κοινού τα μαθηματικά αντικείμενα, έχει ξεχαστεί. Όλη η προσοχή είναι στραμμένη στα ολιγάριθμα σημεία τομής, που μόνο αυτά ονοματίζονται. Αυτό εντέλει είναι το κρίσιμο σημείο. Το διάγραμμα ονοματίζεται – μάλλον ακριβέστερα, εγγραμματοποιείται. Η εγγραμματοποίηση του διαγράμματος είναι εκείνο που το μετατρέπει σε ένα σύστημα τομών, σε ένα πεπερασμένο, διαχειρίσιμο σύστημα.

Συνοψίζοντας, υπάρχουν δύο στοιχεία στην τεχνολογία των διαγραμμάτων: η χρήση του κανόνα και του διαβήτη και η χρήση των γραμμάτων. Κάθε στοιχείο επαναπροσδιορίζει την άπειρη, συνεχή μάζα γεωμετρικών σχημάτων σε μια διακριτή, πεπερασμένη, φτιαγμένη από ανθρώπινο χέρι σύλληψη. Φυσικά, αυτό δεν σημαίνει ότι το αντικείμενο των Ελληνικών Μαθηματικών είναι πεπερασμένο και διακριτό. Το αντιληπτό διά των αισθήσεων

λωνιακά «δομικά διαγράμματα» που περιγράφει ο Høyrup (1990a: 287-8) είναι επίσης χρήσιμα σε αυτό το πλαίσιο.

55 Στο *Ελ.* του Αρχιμήδη, όπου περιλαμβάνονται 22 γεωμετρικές προτάσεις (δηλ. μερικές εκατοντάδες γράμματα), υπάρχουν 24 που δεν βρίσκονται στα άκρα ή σε τομές γραμμών, και συγκεκριμένα πρόκειται για τις προτάσεις 14: Β, Γ, Κ· 15: Β, Κ· 16: Β, Γ, Κ, Ν· 17: Β, Κ, Ν· 18: Β, Γ, Κ, Λ· 19: Β, Ε, Κ, Λ· 20: Β, Λ· 21: Δ· 28: Β. Επέλεξα αυτό το παράδειγμα, επειδή έχει σχετικά πολλά τέτοια σημεία, κι ο λόγος είναι ότι ο Αρχιμήδης είχε έναν τρόπο να δίνει στις έλικες πολλά γράμματα, περισσότερα γράμματα από αυτά που μπορούσε να εισαγάγει μόνο στα άκρα και στις τομές – κι αυτό στην ουσία κατοπτρίζει την ιδιαιτερότητα της έλικας.

διάγραμμα δεν εξαντλεί το γεωμετρικό αντικείμενο. Το αντικείμενο αυτό ορίζεται εν μέρει από το κείμενο, π.χ. οι μετρικές ιδιότητες ορίζονται κειμενικά. Όμως οι ιδιότητες του αντιληπτού διά των αισθήσεων διαγράμματος σχηματίζουν ένα αληθές υποσύνολο των πραγματικών ιδιοτήτων του μαθηματικού αντικειμένου. Γι' αυτό είναι καλό να σκέφτεται κανείς με διαγράμματα.[56]

2.2 *Τα διαγράμματα ως μετωνυμίες των μαθηματικών προτάσεων*

Εδώ είναι φυσικό να τεθεί το ερώτημα εάν οι πρακτικές που περιγράψαμε μέχρι τώρα αντανακλώνται στην εννοιολόγηση του ρόλου του διαγράμματος στα ελληνικά. Ο τίτλος ισχυρίζεται ξεκάθαρα ότι αυτό ισχύει. Οι Έλληνες θεωρούσαν τα διαγράμματα όχι προσαρτήματα των προτάσεων, αλλά τον πυρήνα μιας πρότασης.[57]

56 Μια δήλωση αποποίησης ευθύνης: δεν προβαίνω στον φιλοσοφικό ή γνωσιακό ισχυρισμό ότι ο μόνος τρόπος με τον οποίο τα διαγράμματα μπορούν να είναι παραγωγικά χρήσιμα είναι η επανεννοιολόγησή τους μέσω των γραμμάτων. Όπως πάντοτε, ως ιστορικός προβαίνω στον ιστορικό ισχυρισμό ότι τα διαγράμματα κατέληξαν να είναι χρήσιμα ως παραγωγικά εργαλεία στα Ελληνικά Μαθηματικά μέσω αυτής της επανεννοιολόγησης.

57 Το ότι *έθεταν* τα διαγράμματα ως «προσαρτήματα» –δηλαδή στο τέλος των προτάσεων και όχι στην αρχή ή στο μέσο– δείχνει κάτι για τον σχετικό ρόλο της αρχής και του τέλους και όχι για τον ρόλο του διαγράμματος. Θα πρέπει να θυμόμαστε ότι και οι τίτλοι των ελληνικών βιβλίων συχνά μπαίνουν στο *τέλος* των πραγματειών. Εικάζω ότι, καθώς ο χρήστης διάβαζε μια ελληνική μαθηματική πρόταση, θα ξεδίπλωνε ένα μέρος του παπύρου, γιατί θα ήταν βολικό να έχει ολόκληρο το κείμενο της πρότασης (που προφανώς θα είχε κάποια έκταση) να τελειώνει με το διάγραμμα. Η έλευση του κώδικα ήταν εκείνο που οδήγησε στον σημερινό εφιάλτη του διαρκούς μπρος-πίσω, από το κείμενο στο διάγραμμα, κάθε φορά που το κείμενο απλώνεται από τη μία σελίδα στην επόμενη.

2.2.1 *Μιλώντας για διαγράμματα*[58]

Η αγγλική λέξη «diagram» προέρχεται από την ελληνική *διάγραμμα*, η αρχική σημασία της οποίας, σύμφωνα με τον ορισμό του LSJ, είναι «σχήμα που ορίζεται από γραμμές» – κάτι που σίγουρα είναι ετυμολογικά ορθό. Η λέξη *διάγραμμα* είναι στριμωγμένη, ας πούμε, ανάμεσα στην πρωταρχική και την επόμενη ετυμολογία της, που και οι δύο αναφέρονται απλώς στον σχεδιασμό σχημάτων. Η πραγματική χρήση της λέξης στα ελληνικά είναι πιο σύνθετη.

Το *διάγραμμα* είναι ένας όρος που χρησιμοποιείται συχνά από τον Πλάτωνα –ο οποίος είναι από τους πρώτους σωζόμενους συγγραφείς που τον χρησιμοποίησε– είτε για να δηλώσει τις μαθηματικές αποδείξεις είτε ως το τυπικό συνοδευτικό συμπλήρωμα των μαθηματικών.[59] Με τον Αριστοτέλη, τα *διαγράμματα*, στον πληθυντικό, μπορεί πρακτικά να σημαίνουν «μαθηματικά», ενώ στον ενικό το *διάγραμμα* είναι βέβαιο ότι σημαίνει «μαθηματική πρόταση».[60] Ο Ξενοφών μας λέει ότι ο Σωκράτης συμβούλευε τους νέους φίλους να μελετούν γεωμετρία, αλλά όχι τόσο ώστε να φτάνουν μέχρι τα ακατάληπτα *διαγράμματα*[61] – κι εμείς αρχίζουμε να σκεφτόμαστε ότι αυτό μπορεί να σημαίνει κάτι περισσότερο από πολύ περίπλοκα διαγράμματα, έτσι όπως τα εννοούμε σήμερα. Κι επίσης, ο Knorr έχει δείξει ότι τα ομόρριζα του ρήματος *γράφειν* («σχεδιάζω») πρέπει συχνά να έφεραν μια λογική σημασία.[62] Μεταφράζει δε αυτό το ρήμα ως «απόδειξη διά διαγραμμάτων». Είναι βέβαιο ότι αυτή είναι η ορθή μετάφραση. Ωστόσο, θα πρέπει να θυμόμαστε ότι η συγκεκριμένη φράση αντιπροσωπεύει κάτι που για τους Έλληνες ήταν μία και μόνη έννοια.

Θα ήθελα επίσης να συμπληρώσω εδώ ότι η σύγχρονη ορολογία για το «διάγραμμα» είναι σύνθετη. Η λέξη *διάγραμμα* δεν χρησιμοποιήθηκε ποτέ από τους Έλληνες μαθηματικούς με την

58 Μέρος του επιχειρήματος σε αυτή την ενότητα προέρχεται από τον Knorr (1975) 69-75.

59 Όπως στα *Ευθύδ.* 290c· *Φαίδρ.* 73b· *Θεαίτ.* 169a· στο [ψευδο;]πλατωνικό *Επιν.* 991e· και φυσικά στην *Πολιτ.* 150c.

60 Παραδείγματος χάριν, *Αν. Πρ.* 41b14· *Μετ.* 375b18· *Κατ.* 14b1· *Μ.τ.Φ.* 998a25, 1051a22· *Σοφ. Έλ.* 175a27.

61 *Απομν. IV*.7.3.

62 Knorr (1975) 69-75.

έννοια του σημερινού διαγράμματος. Όταν ήθελαν να τονίσουν ότι μια πρόταση βασίζεται σε ένα διάγραμμα, ο χαρακτηρισμός που έδιναν ήταν ότι αυτό γίνεται *διὰ γραμμῶν* – και σε πολλά γλωσσικά περιβάλλοντα αυτό αντιπαρατίθεται στην άλλη μοναδική εκδοχή, τη *δι᾽ ἀριθμῶν*.[63]

Μια λέξη που χρησιμοποιούσαν οι μαθηματικοί όταν αναφέρονταν στα διαγράμματα μιας απόδειξης, είναι η *καταγραφή* – που η πιο επιτυχημένη απόδοσή της είναι «σχεδίαση».[64] Ο ρηματικός τύπος *καταγράφειν* χρησιμοποιείται τακτικά με την έννοια του «ολοκληρώνω ένα σχήμα», όταν το ίδιο το σχήμα δεν ορίζεται στο κείμενο. Ο τύπος αυτός χρησιμοποιείται πάντοτε σε αυτή τη διατύπωση και με ένα συγκεκριμένο σχήμα: ένα παραλληλόγραμμο (συχνά ορθογώνιο) που μέσα έχει μια διαγώνιο και παράλληλες γραμμές.[65]

63 Βλ., π.χ., Ήρων: *Μετρικά* II.10.3· Πτολεμαίος: *Μαθηματική Σύνταξις* I.10, 32.1, VIII.5, 193.19, *Αρμονικά* I.5, 12.8· Πάππος VI.600.9-13. Πρόκλος, *Εις την Πολιτείαν* II.23. Η μέθοδος που ακολουθεί ο Ήρων στο Βιβλίο II, όπως σώζεται στον Codex Leidenensis (Besthorn and Heiberg (1900: 8 κ.εξ.)) είναι ιδιαίτερα περίεργος. Φαίνεται ότι ο Ήρων ξεκινάει να αποδείξει διάφορα αποτελέσματα με όσο το δυνατό λιγότερες γραμμές – κατά προτίμηση χωρίς καμία, ή με μία και μοναδική, αν είναι αδύνατη η πλήρης αποφυγή γραμμών (φέρνει στον νου το παιδικό παιχνίδι – «αν μετακινήσεις ένα και μόνο σπίρτο, το τρένο γίνεται μπαλόνι»). Η πρακτική του Ήρωνα είναι συγκρίσιμη με τον τρόπο που θα ενδιέφερε έναν σύγχρονο μαθηματικό να αποδείξει το αποτέλεσμα X στηριζόμενος σε λιγότερα αξιώματα από τους προκατόχους του. Οι σύγχρονοι μαθηματικοί προχωρούν στην απόδειξη με αξιώματα· οι Έλληνες μαθηματικοί προχωρούσαν στην απόδειξη με γραμμές.

64 Βλ. π.χ. Ευκλείδης, *Στοιχεία* III.33, IV.5, XII.4· Απολλώνιος, *Κωνικά* IV.27. Ο Αρχιμήδης συνήθως αναφέρεται απλώς σε *σχήματα* (*Οχ.* II.394.6, 406.2, 410.24· *Σφ. Κυλ.* II.224.3). Πρόκειται για ένα «σχήμα» με την πλήρη σημασία της λέξης, που γίνεται καλύτερα κατανοητό ως *συνεχές* σύστημα γραμμών· ένα και μόνο διάγραμμα –ιδιαίτερα ένα αρχιμήδειο διάγραμμα!– μπορεί να περιλαμβάνει πάνω από ένα *σχήματα*. Τέλος, ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί μία φορά το ρήμα *ὑπογράφειν* (*Επ. Ισορ.* I.5 Πόρ. Β΄, 132.12), που είναι συγγενές του *καταγράφειν*.

65 Οι πρώτες πέντε προτάσεις στο Βιβλίο XIII των *Στοιχείων*, και επίσης: II.7, 8· VI.27-9· X.91-6. Η διατύπωση είναι χαρακτηριστική του ευκλείδειου ύφους – αν και το ότι ο Απολλώνιος και ο Αρχιμήδης δεν τη χρησιμοποιούν θα πρέπει, νομίζω, να αποδοθεί στο γεγονός ότι δεν ασχολούνται με αυτό το ορθογώνιο.