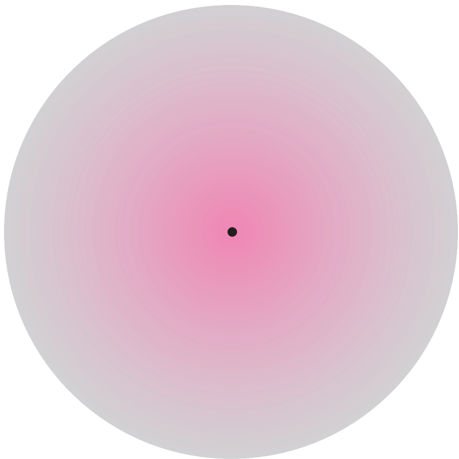
ΤΕΛΙΚΑ,
ΠΑΙΖΕΙ ΖΑΡΙΑ Ο ΘΕΟΣ;

Πειραματική διερεύνηση
ενός... θεολογικού ερωτήματος

ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΤΡΑΧΑΝΑΣ
ΙΔΡΥΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ & ΕΡΕΥΝΑΣ

Η ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

[Η «είσοδος» των πιθανοτήτων στη θεμελιώδη φυσική]



$$P = |\psi(\mathbf{r})|^2$$

Το μόνο που μπορούμε να γνωρίζουμε για ένα σωματίδιο –π.χ. το ηλεκτρόνιο ενός ατόμου υδρογόνου– είναι η **πιθανότητα** να το βρούμε εδώ ή εκεί στο χώρο. Η πιθανότητα αυτή –η πιθανότητα **ανά μονάδα όγκου**– δίνεται **από το τετράγωνο της κυματοσυνάρτησης του σωματιδίου.**

... ΚΑΙ Η ΑΝΑΓΚΑΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΤΟΥΣ

[Η «λογική αλυσίδα» που οδηγεί στη στατιστική ερμηνεία]

Ατομική σταθερότητα

(Το κεντρικό μυστήριο του μικρόκοσμου)

⇩

Κβάντωση

(Η μόνη φυσιολογική εξήγηση
της ατομικής σταθερότητας)

⇩

Κυματική συμπεριφορά

(Μια φυσιολογική εξήγηση της κβάντωσης)

⇩

Στατιστική ερμηνεία

(Η μόνη φυσιολογική εξήγηση
της συνύπαρξης κυματικών
και σωματιδιακών ιδιοτήτων)

Η στατιστική ερμηνεία δεν υιοθετήθηκε "ελαφρά τη καρδία", αλλά ως αδήριτη ανάγκη.

ΤΟ ΑΥΤΟΝΟΗΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

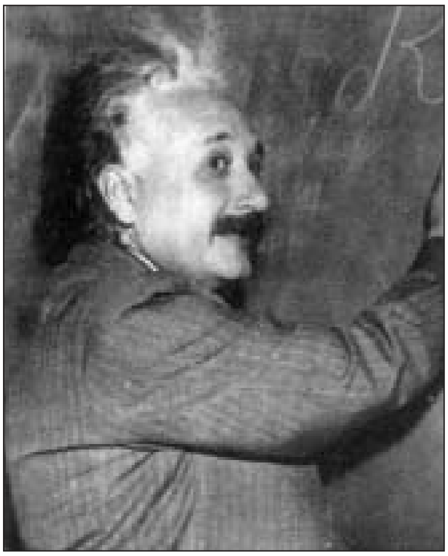
Είναι οι κβαντομηχανικές πιθανότητες
θεμελιώδεις
ή
αποτέλεσμα ατελούς γνώσης;

ή, με άλλα λόγια,

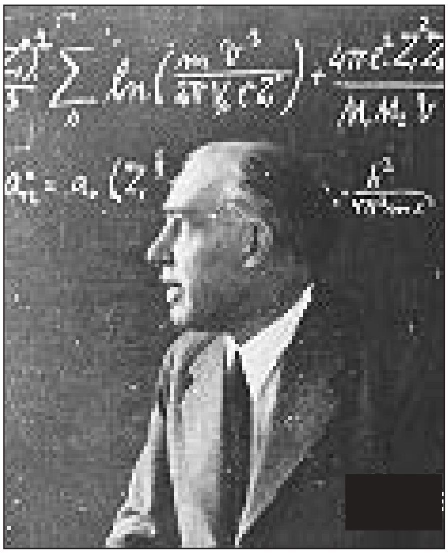
Είναι η κβαντομηχανική
μια *πλήρης θεωρία*
ή εκκρεμεί η συμπλήρωσή της
μ' ένα βαθύτερο αιτιοκρατικό υπόστρωμα;

(Όπως π.χ. η "συμπλήρωση" της κλασικής θερμοδυναμικής με την κινητική θεωρία και τη στατιστική μηχανική)

... ΚΑΙ ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΠΡΩΤΑΓΩΝΙΣΤΩΝ



Ο θεός δεν παίζει
ζάρια
με τον κόσμο



Αλβέρτο,
δεν χρειάζεται
να λες στον θεό
τι να κάνει

(Ανεπιβεβαίωτη συνομιλία...)

Δηλαδή....

1. Η ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΤΟΥ EINSTEIN

Οι κβαντομηχανικές πιθανότητες δεν είναι θεμελιώδεις. Είναι αποτέλεσμα ατελούς γνώσης. Η κβαντομηχανική –παρά τις αναμφισβήτητες επιτυχίες της– δεν πρέπει να θεωρηθεί ως μια τελική θεωρία. Θα πρέπει να συμπληρωθεί, πιθανόν με την εισαγωγή κάποιων κρυμμένων μεταβλητών, των οποίων η γνώση θα μας επιτρέψει να προβλέπουμε χωρίς απροσδιοριστία την έκβαση κάθε κβαντομηχανικού πειράματος. Σ' ένα βαθύτερο "μετα-κβαντικό" επίπεδο ο κόσμος θα αποδειχθεί ξανά ντετερμινιστικός.

2. Η ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΤΟΥ BOHR

(Η σχολή της Κοπεγχάγης)

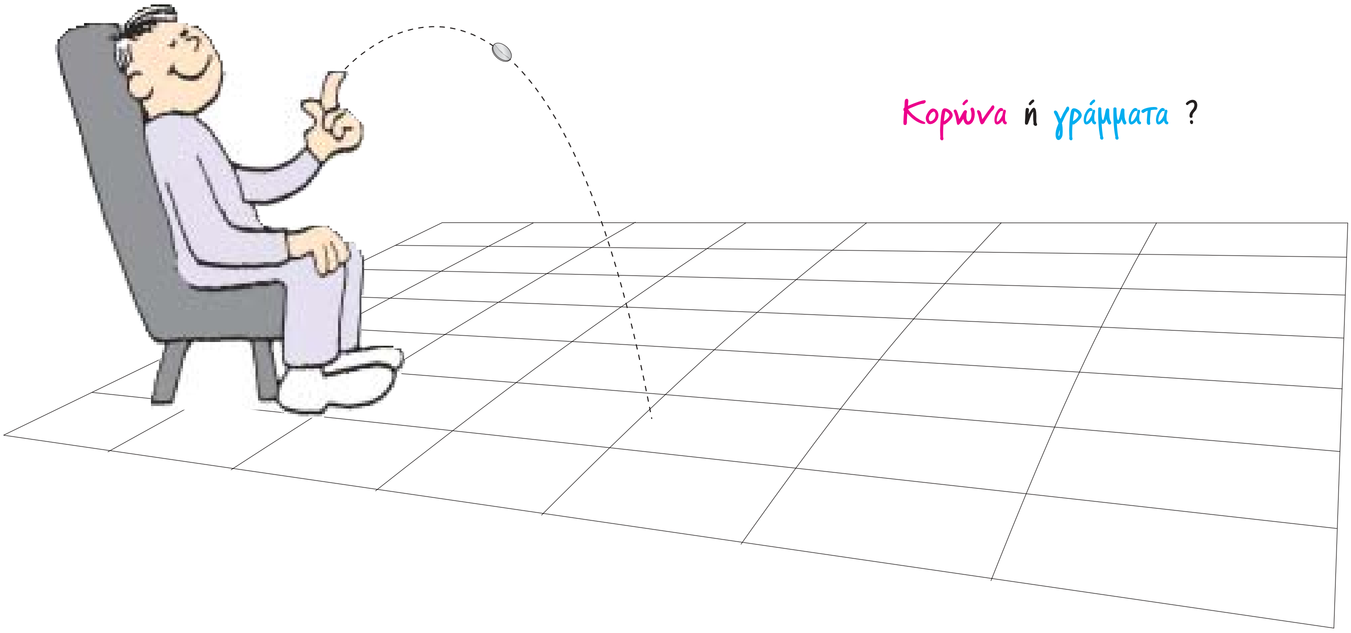
Οι κβαντομηχανικές πιθανότητες δεν είναι αποτέλεσμα ατελούς γνώσης. Είναι θεμελιώδεις. Η φύση είναι εγγενώς πιθανοκρατική.

Κλασικές έναντι κβαντικών πιθανοτήτων

Δύο ενδεικτικά παραδείγματα

1. ΚΛΑΣΙΚΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Η ρίψη ενός κέρματος

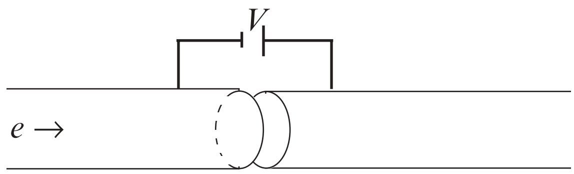


Εδώ η αδυναμία πρόβλεψης δεν είναι θεμελιώδης αλλά αποτέλεσμα ατελούς γνώσης των παραγόντων που επηρεάζουν την κίνηση του κέρματος (τρόπος ρίψης, διακυμάνσεις της πυκνότητας του αέρα, ανωμαλίες του εδάφους κλπ...). Αν όλοι αυτοί οι παράγοντες ήταν γνωστοί και διαθέταμε και έναν υπερυπολογιστή ελεγχόμενης ακρίβειας για να λύσει τις κλασικές εξισώσεις κίνησης, τότε η έκβαση κάθε συγκεκριμένης ρίψης του κέρματος θα ήταν απολύτως προβλέψιμη.

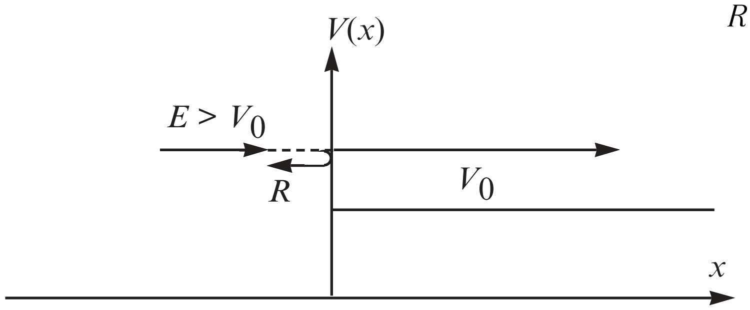
Οι κλασικές πιθανότητες είναι πάντοτε αποτέλεσμα ατελούς γνώσης.

2. ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Ένα (παραμελημένο) «σχολικό» παράδειγμα: Πρόσπτωση σωματιδίου σε ένα σκαλοπάτι δυναμικού



$$R = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0}}\right)^2$$



Το προφανές ερώτημα:

Γιατί το σωματίδιο άλλοτε “περνάει” και άλλοτε ανακλάται, ενώ οι συνθήκες της κίνησής του είναι πάντοτε οι ίδιες και απόλυτα γνωστές και καθορισμένες; Πού οφείλεται το ότι το σωματίδιο άλλοτε περνάει και άλλοτε δεν περνάει;

... και η απάντηση της κβαντομηχανικής:

... ***Πουθενά*** : Είναι στη φύση των πραγμάτων. Το τι θα κάνει το σωματίδιο σε κάθε συγκεκριμένο πείραμα –αν θα ανακλαστεί ή θα περάσει– δεν το ξέρει ούτε ο... θεός!

ΤΕΛΙΚΑ, ΠΟΙΟΣ ΕΧΕΙ ΔΙΚΙΟ; Ο EINSTEIN ή Ο BOHR;

Η απάντηση του συνεδρίου του Solvay (1927)

Ο Bohr επικρατεί κατά κράτος καταρρίπτοντας ένα προς ένα τα "παράδοξα" της κβαντομηχανικής που επισημαίνει ο Einstein με ιδιοφυή –αλλά τελικώς "λανθασμένα"– νοητικά πειράματα.

Η σχολή της Κοπεγχάγης γίνεται πανηγυρικά δεκτή ως το "επίσημο σύνταγμα" της Φυσικής.

Einstein – Bohr: 0-1

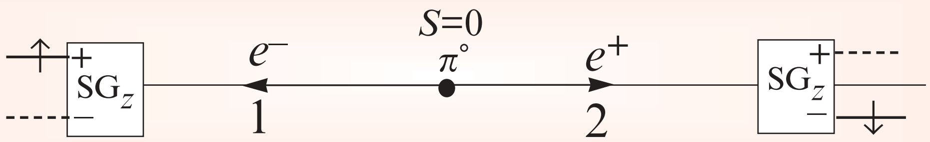
Οι κβαντικές πιθανότητες είναι θεμελιώδεις. Είτε μας αρέσει είτε όχι, ο θεός ***παίζει*** ζάρια με τον κόσμο.

1935: Ο EINSTEIN ΠΑΙΡΝΕΙ ΤΗ ΡΕΒΑΝΣ

ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ EPR

EINSTEIN
PODOLSKY
ROSEN

[*Physical Review* **47**, 777 (1935)]



$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{+,\,-} - \psi_{+,\,-}\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{+}(1)\ \psi_{-}(2) - \psi_{-}(1)\ \psi_{+}(2)\right)$$

Η κυματοσυνάρτηση ενός συστήματος δύο σωματιδίων με ολικό σπιν μηδέν.

Η ψ είναι μια επαλληλία δύο καταστάσεων στις οποίες το σπιν του κάθε σωματιδίου μπορεί να είναι "πάνω" ή "κάτω" ως προς μια τυχούσα κατεύθυνση. Κι όταν το ένα είναι "πάνω" το άλλο θα είναι υποχρεωτικά "κάτω" (και αντίστροφα), ώστε το ολικό σπιν του συστήματος να είναι μηδέν.

Κατά συνέπεια **:** Όταν το σπιν του ενός σωματιδίου σε μια **τυχούσα κατεύθυνση** μετρηθεί και βρεθεί να έχει τη μία από τις δύο δυνατές τιμές του, τότε το σπιν του άλλου σωματιδίου –που ενδεχομένως βρίσκεται έτη φωτός μακριά– θα "αποκτήσει" αμέσως την αντίθετη τιμή κατά μήκος του ίδιου άξονα. Το φάντασμα της δράσης εξ αποστάσεως –της "μη τοπικότητας"– επανεμφανίζεται στη φυσική!

Όμως,
ποιο είναι το παράδοξο κατά τον Einstein;

- Αν στο σωματίδιο #1 μετρήσουμε το σπιν του κατά την κατεύθυνση x, τότε αυτομάτως υποχρεώνουμε και το σωματίδιο #2 να έχει επίσης καθορισμένη (και αντιθέτου προσήμου) προβολή σπιν κατά τον ίδιο άξονα.

- Αν παράλληλα μετρήσουμε το σπιν του σωματιδίου #2 κατά τον άξονα y, τότε και το σωματίδιο #1 θα υποχρεωθεί κι αυτό να αποκτήσει καθορισμένη (και ετερόσημη) προβολή σπιν κατά τον άξονα y.

- Έτσι, στο τέλος αυτής της διπλής μέτρησης, και τα δύο σωματίδια θα έχουν καθορισμένες προβολές σπιν σε δύο διαφορετικούς άξονες.

⇨ Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΕΧΕΙ ΠΑΡΑΒΙΑΣΤΕΙ!

... ΚΑΙ Η ΑΜΗΧΑΝΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΤΟΥ BOHR

[*Physical Review* **48**, 649 (1935)]

(η οποία –σε αντίθεση με τη γνωστή διαύγεια των αναλύσεων του Bohr– θυμίζει περισσότερο το αντιφιλοσοφικό απόφθεγμα: "Όταν σου απαντά ένας φιλόσοφος ξεχνάς και τι τον είχες ρωτήσει"!)

Γράφει λοιπόν ο Bohr ως απάντηση στους EPR:

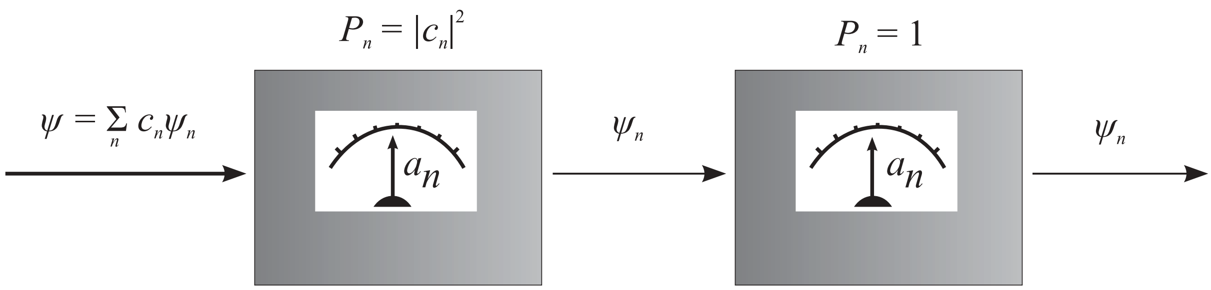
" Το κριτήριο της φυσικής πραγματικότητας που προτάθηκε από τους EPR, περιέχει μια ασάφεια ως προς το νόημα της έκφρασης "χωρίς, καθ' οιονδήποτε τρόπο, να διαταράξουμε το σύστημα". Βεβαίως σε μια περίπτωση όπως αυτή που συζητάμε, δεν τίθεται θέμα μηχανικής "παρενόχλησης" του ερευνώμενου συστήματος, κατά τη διάρκεια του τελευταίου κρίσιμου σταδίου της μετρητικής διαδικασίας. Όμως ακόμα και σ' αυτό το στάδιο τίθεται κατ' ουσίαν το θέμα **μιας επίδρασης πάνω στις ίδιες τις συνθήκες που ορίζουν τους δυνατούς τύπους προβλέψεων σχετικά με τη μελλοντική συμπεριφορά του συστήματος** (Η έμφαση του Bohr). Και εφόσον αυτές οι συνθήκες συνιστούν ένα συστατικό στοιχείο της περιγραφής κάθε φαινομένου στο οποίο μπορεί να έχει εφαρμογή ο όρος "φυσική πραγματικότητα", βλέπουμε ότι η επιχειρηματολογία των προαναφερθέντων συγγραφέων δεν δικαιολογεί τα συμπεράσματά τους... "

Είναι φανερό (από τη "μπερδεμένη" απάντηση του Bohr) ότι το πρόβλημα που έθεσαν οι EPR ήταν πολύ γνήσιο και γι' αυτό συνεχίζει να είναι μαζί μας ώς σήμερα. "Μας ήλθε ως κεραυνός εν αιθρία" όπως θα ομολογήσει αργότερα ο Bohr.

EINSTEIN – BOHR: 1-1

ΜΙΑ ΚΑΛΥΤΕΡΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ EPR

- Σύμφωνα με το *μετρητικό αξίωμα της Κβαντομηχανικής* (βλ. Σχήμα),



η μέτρηση προκαλεί μια "ακαριαία" *κατάρρευση* της μετρούμενης κυματοσυνάρτησης στη μορφή της ιδιοσυνάρτησης ψ_n που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή που μετρήθηκε.

- Επομένως το παράδοξο EPR δεν υφίσταται διότι έστω και ελάχιστα να έχει προηγηθεί η μέτρηση του σπιν του σωματιδίου #1 –και ας πούμε ότι έδωσε σπιν "πάνω"– τότε η κυματοσυνάρτηση του συστήματος

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_+(1)\,\psi_-(2) - \psi_-(1)\,\psi_+(2)\right)$$

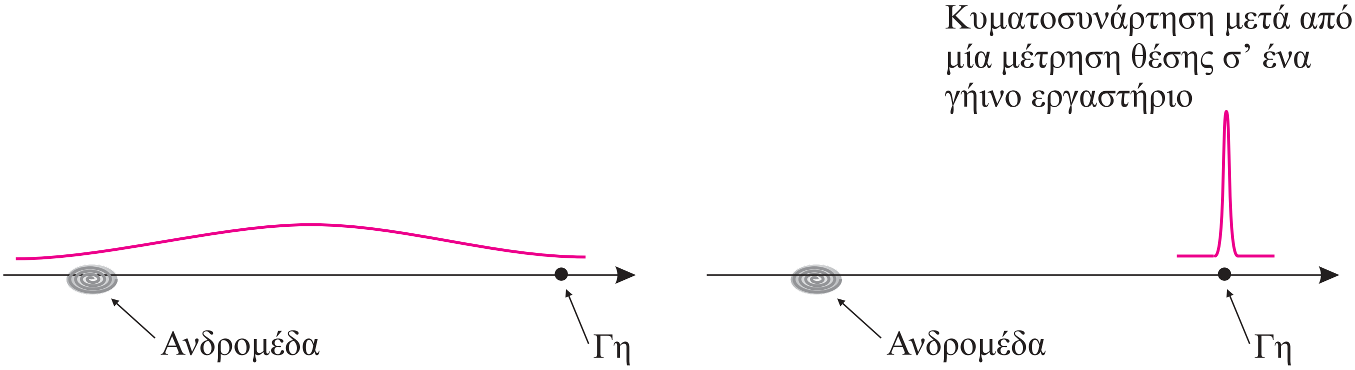
θα καταρρεύσει ακαριαία στη μορφή

$$\psi_+(1)\,\psi_-(2)$$

οπότε τα σπιν των δύο σωματιδίων είναι πλήρως καθορισμένα απ' εκεί και πέρα και ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. (Η μέτρηση του ενός δεν επηρεάζει πλέον τη μέτρηση του άλλου αφού ***η επαλληλία έχει καταστραφεί από τη μέτρηση***).

ΕΠΟΜΕΝΩΣ;

Επομένως το "παράδοξο" EPR –και το στοιχείο της **μη τοπικότητας** που έφερε στην επιφάνεια– ανάγεται πλήρως στο κεντρικό παράδοξο της κβαντομηχανικής που είναι το αξίωμα της μέτρησης: **Η στιγμιαία κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης**. Νά ένα ακραίο παράδειγμα:



Η ανίχνευση του σωματιδίου από έναν μετρητή πάνω στη γη προκαλεί στιγμιαίο μηδενισμό της κυματοσυνάρτησής του σε περιοχές που μπορεί να απέχουν μέχρι και έτη φωτός από τη γη.

Σύμφωνα με τη σχολή της Κοπεγχάγης αυτή η **ακραία μη τοπικότητα** της κβαντομηχανικής θα πρέπει να γίνει δεκτή –όπως και ο **πιθανοκρατικός της χαρακτήρας**– ως ένα θεμελιώδες χαρακτηριστικό του φυσικού κόσμου.

Take it or leave it!

ΟΜΩΣ,
Η ΑΝΤΙΠΟΛΙΤΕΥΣΗ ΕΠΙΜΕΝΕΙ!

Η θέση τους:

Μετά το “παράδοξο EPR” **μια θεωρία κρυμμένων μεταβλητών** –που θα “συμπληρώσει” τη συνήθη κβαντομηχανική– **είναι περισσότερο παρά ποτέ αναγκαία**. Μπορεί να λύσει ταυτόχρονα τόσο το πρόβλημα των κβαντικών πιθανοτήτων όσο και το πρόβλημα της μη τοπικότητας. Στο πρόβλημα EPR –παραδείγματος χάριν– το σπιν των σωματιδίων δεν καθορίζεται από τη μετρητική συσκευή, τη στιγμή της μέτρησης, αλλά έχει προκαθοριστεί από το σημείο εκπομπής τους με βάση τις τιμές που “δόθηκαν” εκεί στις κρυμμένες μεταβλητές του συστήματος.

ΕΠΟΜΕΝΩΣ ;

Επομένως πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος να ελεγχθεί πειραματικά αν όντως υπάρχουν κρυμμένες μεταβλητές ή όχι. Αν ένας τέτοιος τρόπος ελέγχου δεν αποδειχθεί δυνατός, τότε το ερώτημα του αν υπάρχουν τέτοιες μεταβλητές –δηλαδή **αν παίζει ζάρια ο θεός**– θα πρέπει να θεωρηθεί ως **μεταφυσικό** και να παραπεφθεί στα αντίστοιχα πανεπιστημιακά τμήματα. (Όχι πάντως της φυσικής!) Χάρις στην αξιοθαύμαστη επιμονή μιας πολύ ολιγάριθμης ομάδας φυσικών –με πρωτεργάτη τον David Bohm– το ζήτημα θα κρατηθεί ανοικτό μέχρις ότου εμφανιστεί ο κατάλληλος άνθρωπος για να το λύσει: ο

JOHN BELL

σωτήριον έτος 1964 (!)

ΑΠΟ ΤΗ ΜΕΤΑΦΥΣΙΚΗ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ:
Οι ανισότητες του Bell

Το προφανές ερώτημα:

Ποιο θα ήταν το καταλληλότερο φυσικό σύστημα στο οποίο θα μπορούσε να αναζητηθεί μια *μετρήσιμη διαφορά* μεταξύ κβαντομηχανικής και μιας οποιασδήποτε θεωρίας κρυμμένων μεταβλητών; Και όταν αυτό τό σύστημα βρεθεί, ποιο θα ήταν το κατάλληλο φυσικό μέγεθος που θα μπορούσε να την μετρήσει;

... και μια εύλογη απάντηση

✔ Το καταλληλότερο φυσικό σύστημα για τον πιο αυστηρό έλεγχο της κβαντομηχανικής είναι το "σύστημα EPR" (≡ Ένα σύστημα δύο σωματιδίων με ολικό σπιν μηδέν): *Διότι* :

α) Σ' αυτό εκδηλώνονται με τον πιο καθαρό τρόπο, οι πιο ακραίες και αμφισβητούμενες πλευρές της κβαντικής θεωρίας. Θεμελιώδης ιντετερμινισμός – ακραία μη τοπικότητα.

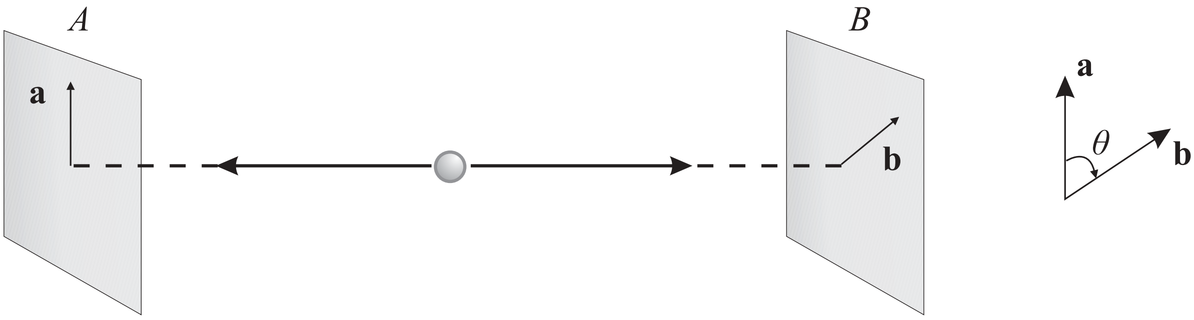
β) Ένα τέτοιο σύστημα δεν είχε υποβληθεί ποτέ σε άμεσο πειραματικό έλεγχο;

✔ Και το καταλληλότερο φυσικό μέγεθος που εκφράζει τα ουσιώδη χαρακτηριστικά αυτού του συστήματος είναι ο βαθμός συσχέτισης του προσανατολισμού των δύο σπιν σε δύο αυθαίρετες κατευθύνσεις που είναι γνωστός ως

συνάρτηση συσχέτισης.

Η ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΚΛΕΙΔΙ: Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ $C(\theta)$

Ορισμός



$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv C(\theta) = \frac{N_{++} - N_{+-} - N_{-+} + N_{--}}{N}$$

(Δηλαδή: $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ = μέση τιμή των γινομένων $\pm \times \pm$, που αντιστοιχούν στις μετρούμενες προβολές ($\pm$) των δύο σπιν κατά τις κατευθύνσεις **a** και **b**)

Προφανείς ειδικές περιπτώσεις

$\theta = 0$: $C(0) = -1$ Πλήρης "αντισυσχέτιση"

$\theta = \pi$: $C(\pi) = 1$ Πλήρης συσχέτιση

... και προφανείς γενικές ιδιότητες

$|C(\theta)| \leq 1$ $\quad 0 \leq \theta \leq \pi$ $\quad$ (ή $-\pi \leq \theta \leq \pi$)

$$C(-\theta) = C(\theta)$$

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

σωματίδιο A

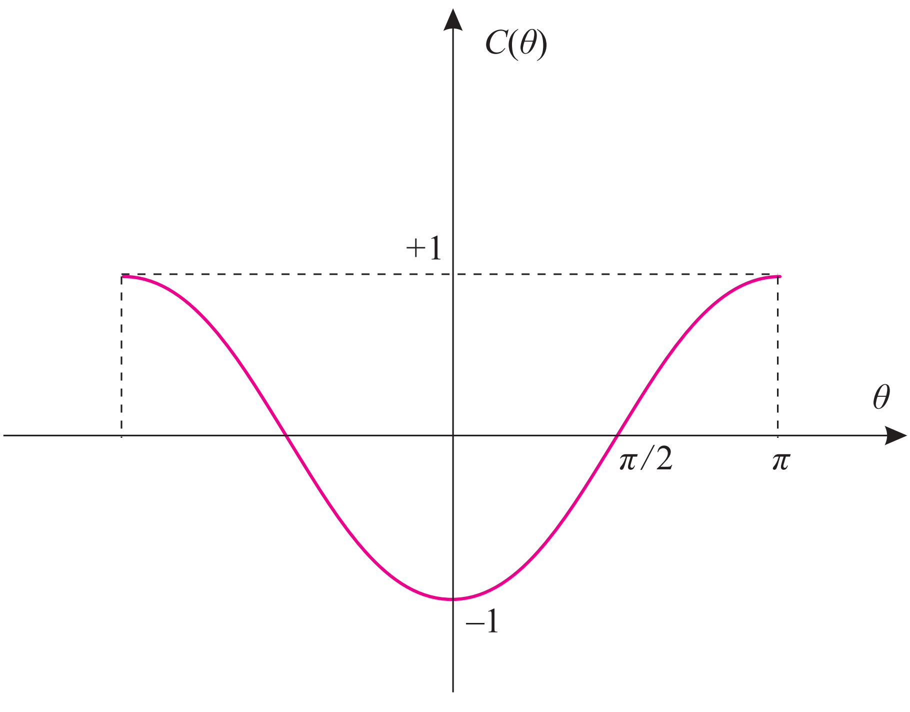
σωματίδιο B

$$C(\theta) = \langle \psi \,|\, \sigma_{a}^{(A)}\, \sigma_{b}^{(B)} \,|\, \psi \rangle = -\cos\theta$$

κατεύθυνση **a** *κατεύθυνση* **b**

(σ, οι μήτρες του Pauli που περιγράφουν κβαντομηχανικά το σπιν σε μονάδες $\hbar/2$)

$$C(\theta) = -\cos\theta$$



Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΓΙΑ ΜΙΑ ΤΥΧΟΥΣΑ ΘΕΩΡΙΑ ΚΡΥΜΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

I: Το "πρόβλημα του Bell"

Το 1964 ο John Bell θέτει στον εαυτό του το εξής **καίριο ερώτημα**:

> Αφού δεν έχουμε στη διάθεσή μας μια συγκεκριμένη θεωρία κρυμμένων μεταβλητών –ώστε να υπολογίσουμε με βάσει αυτής τη συνάρτηση $C(\theta)$ και να την συγκρίνουμε με την κβαντομηχανική πρόβλεψη – $\cos\theta$– μήπως μπορούμε να συναγάγουμε κάποια **περιοριστική συνθήκη** που θα πρέπει να ικανοποιείται από μια **τυχούσα θεωρία κρυμμένων μεταβλητών**; Κι αν βρούμε μια τέτοια περιοριστική συνθήκη τότε το επόμενο βήμα θα είναι να ελέγξουμε αν ικανοποιείται ή όχι από την κβαντομηχανική έκφραση $C(\theta) = -\cos\theta$.

II. ... και η λύση του Bell

Το "θεώρημα του Bell" *(Η απόδειξη μετά)*

"Η συνάρτηση συσχέτισης $C(\theta)$ που προέρχεται από μια τυχούσα **τοπική** θεωρία κρυμμένων μεταβλητών θα πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα

$$|C(\theta') - C(\theta)| - C(\theta' - \theta) \leq 1 \qquad (1)$$

Η ανισότητα του Bell"

Επομένως: Αν η κβαντομηχανική συνάρτηση συσχέτισης $C(\theta) = -\cos\theta$ ικανοποιεί την ανισότητα (1), τότε η ανισότητα αυτή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διακριθεί πειραματικά η κβαντομηχανική από μια θεωρία κρυμμένων μεταβλητών. Αν όμως δεν την ικανοποιεί, τότε ...κάναμε διάνα. Η πειραματική απάντηση στο ζήτημα που έθεσε ο Einstein –αν "παίζει ζάρια ο θεός"– είναι δυνατή. Το ερώτημα δεν είναι μεταφυσικό!

Η αγωνία κορυφώνεται! *Ικανοποιεί η κβαντομηχανική συνάρτηση συσχέτισης την ανισότητα του Bell;*

Μια απλή αναλυτική διερεύνηση

Θέλουμε να δούμε αν για $\forall\theta$ στο διάστημα $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ή $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ισχύει ή όχι η ανισότητα

$$|-\cos\theta' + \cos\theta| + \cos(\theta' - \theta) \leq 1 \ (;) \qquad (1)$$

Για την ειδική περίπτωση $\theta' = 2\theta$ –οπότε είναι $\cos\theta > \cos 2\theta$ για $0 < \theta < \pi/2$– το πρώτο μέλος της (1) γράφεται ως

$$F(\theta) = 2\cos\theta - \cos 2\theta$$

και έχει μέγιστο για $F'(0) = 0$ f $\theta_0 = \pi/3$ και η τιμή της $F(\theta)$ –δηλαδή του πρώτου μέλους της (1)– είναι τότε

$$F_{\max} = \frac{3}{2}$$

⇨ Η ανισότητα του Bell παραβιάζεται πανηγυρικά από την κβαντομηχανική συνάρτηση συσχέτισης

⇨ Η πειραματική διάκριση μεταξύ κβαντομηχανικής και μιας οποιασδήποτε (τοπικής) θεωρίας κρυμμένων μεταβλητών είναι κατ' αρχήν δυνατή!

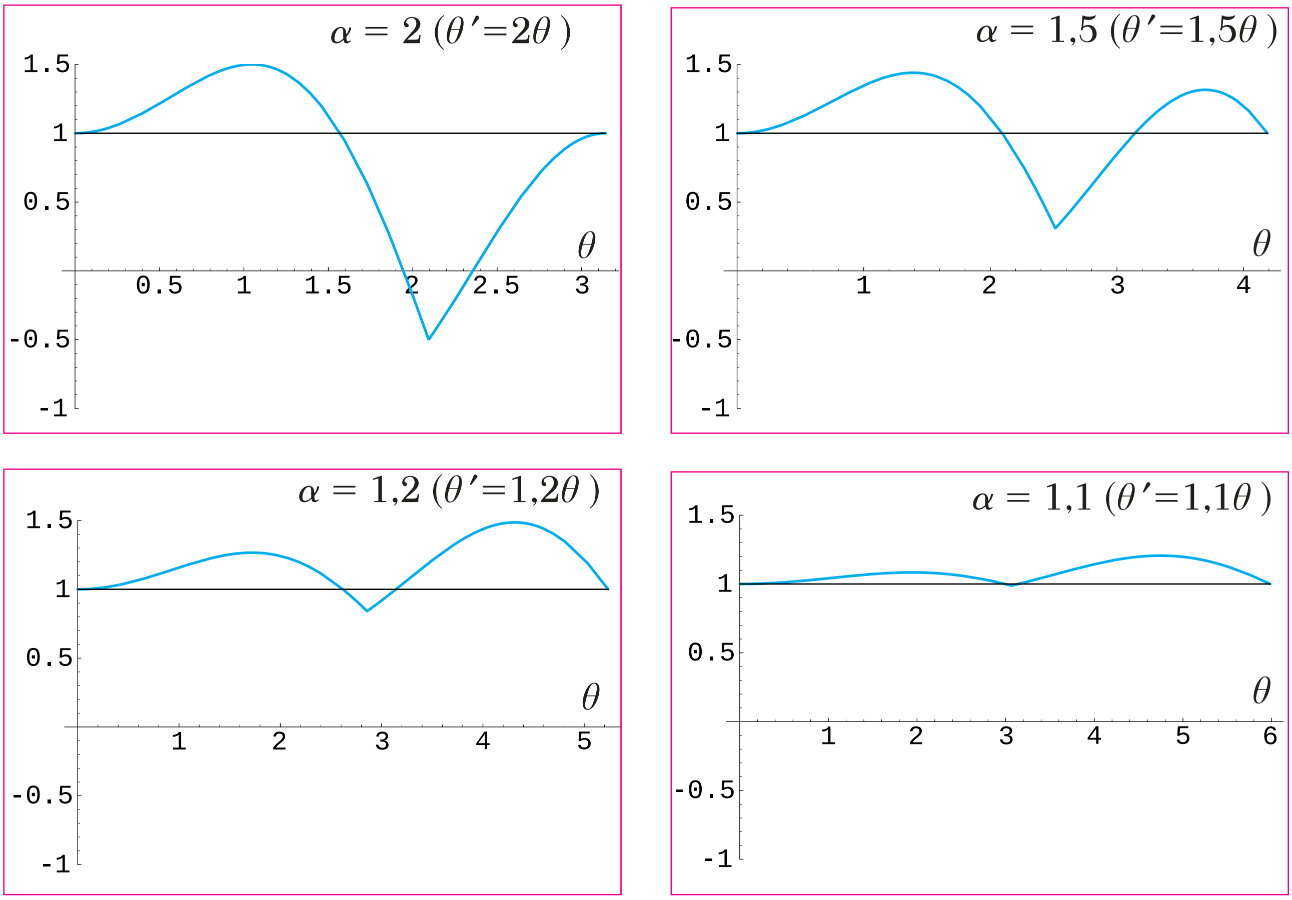
...και μια γραφική διερεύνηση

(Για να εντοπιστεί το σύνολο των γωνιών για τις οποίες παραβιάζεται η ανισότητα του Bell)

Γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(\theta,\, \alpha) = |\cos \alpha\theta - \cos \theta\,| - \cos\,((\alpha - 1)\theta), \qquad (\theta' = \alpha\theta)$$

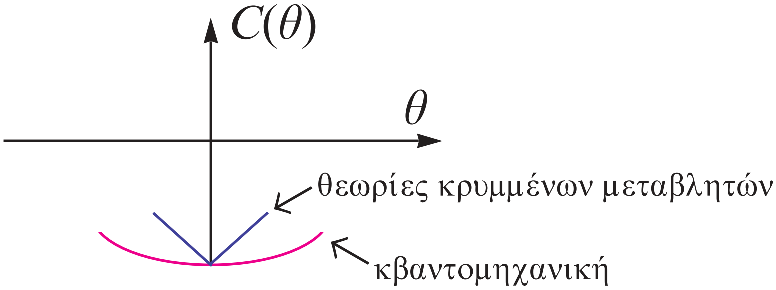
για διάφορες τιμές του α ($\alpha > 1$) στο διάστημα $0 < \theta < 2\pi/\alpha$ (ώστε και το $\theta' = \theta$ να είναι μικρότερο του 2π)



➪ Για πολύ κοντινές γωνίες θ και θ' η ανισότητα του Bell όχι απλώς **παραβιάζεται** αλλά **παραβιάζεται σχεδόν παντού.**

... συν μια μαθηματική μελέτη:

Θα αποδείξουμε ότι στη γειτονιά του μηδενός ($\theta = 0$) –όπου η συνάρτηση συσχέτισης έχει ελάχιστο– οι συναρτήσεις $C(\theta)$ που ικανοποιούν την ανισότητα του Bell θα έχουν "γωνία" ενώ η κβαντομηχανική έκφραση $-\cos\theta$ έχει στάσιμο σημείο εκεί (βλ. σχήμα).



Απόδειξη: Για $\theta' = \theta + \Delta\theta$ η ανισότητα του Bell γράφεται ως

$$| C(\theta + \Delta\theta) - C(\theta) | - C(\Delta\theta) \leq 1$$

⇨ $$| C(\theta + \Delta\theta) - C(\theta) | \leq C(\Delta\theta) + 1 \leq C(\Delta\theta) - C(0)$$

⇨ $$\left| \frac{C(\theta+\Delta\theta) - C(\theta)}{\Delta\theta} \right| \leq \frac{C(\Delta\theta) - C(0)}{\Delta\theta} \qquad (\Delta\theta > 0)$$

⇨ (Για $\Delta\theta \to 0+$) $\quad | C'(\theta+) | \leq C'(0+)$

Επομένως αν ήταν $C'(0+) = 0$ θα ήταν και $C'(\theta+) = 0$ και άρα η συνάρτηση $C(\theta)$ θα ήταν μια σταθερά. Αναγκαστικά λοιπόν θα είναι $C'(0+) > 0$ –όπως στο παραπάνω σχήμα– και συνεπώς καμιά θεωρία κρυμμένων μεταβλητών δεν μπορεί να αναπαραγάγει ποτέ την κβαντομηχανική συνάρτηση συσχέτισης. Τα δύο είδη θεωριών είναι μαθηματικώς ασυμβίβαστα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ BELL

1: Οι παραδοχές

1. Κάθε θεωρία κρυμμένων μεταβλητών πρέπει να αναπαράγει τα επιβεβαιωμένα αποτελέσματα της κβαντομηχανικής.

2. Ειδικότερα, στο σύστημα EPR, οι μετρούμενες τιμές της προβολής του σπιν σε μια (οποιαδήποτε) κατεύθυνση θα πρέπει να είναι πάντα $+1$ ή -1 (σε μονάδες $\hbar/2$).

3. Πάλι στο σύστημα EPR, η έκβαση μιας μέτρησης που γίνεται από τον μετρητή A (στα αριστερά) θα πρέπει να είναι τελείως ανεξάρτητη από τις συνθήκες που επικρατούν στον μετρητή B. (Η *παραδοχή της τοπικότητας*).

11: Οι "συναρτήσεις Bell" $A(\mathbf{a}, \lambda)$ και $B(\mathbf{b}, \lambda)$

Οι παραπάνω προϋποθέσεις (ειδικά για το συγκεκριμένο σύστημα) ικανοποιούνται αυτόματα από κάθε ζεύγος συναρτήσεων $A(\mathbf{a}, \lambda)$ και $B(\mathbf{b}, \lambda)$ που εξαρτώνται κάθε μία από τον προσανατολισμό του αντίστοιχου μετρητή ($\mathbf{a}$ για τον A και $\mathbf{b}$ για τον B) και επιπλέον από την κρυμμένη παράμετρο λ (που μπορεί να είναι και περισσότερες). Όσο για τις τιμές των συναρτήσεων αυτών, θα είναι πάντα ± 1. Δηλαδή

$$A\,(\mathbf{a}, \lambda) = \pm\,1, \qquad B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm\,1 \tag{1}$$

ενώ θα ισχύει επίσης και η

$$B(\mathbf{a}, \lambda) = -\,\mathrm{A}(\mathbf{a}, \lambda) \tag{2}$$

ώστε να διασφαλίζεται και η γνωστή πλήρης "αντισυσχέτιση" των μετρούμενων σπιν όταν οι δύο μετρητές είναι παράλληλοι ($\mathbf{b} = \mathbf{a}$). Όσο για την παραδοχή της *τοπικότητας,* αυτή αποτυπώνεται στο γεγονός ότι κάθε μία από τις δύο συναρτήσεις A και B εξαρτάται μόνο από τον προσανατολισμό του οικείου μετρητή και όχι από τον προσανατολισμό του άλλου. Είναι δηλαδή

$$A = A\,(\mathbf{a}, \lambda) \quad \text{και όχι} \quad A = A\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda)$$

και παρόμοια για τη συνάρτηση B.

- ✔ Κάθε τοπική θεωρία κρυμμένων μεταβλητών –όποιες κι αν είναι οι βασικές εξισώσεις της, θα πρέπει να καταλήγει (όταν εφαρμοστεί στο σύστημα EPR) στον υπολογισμό δύο συγκεκριμένων συναρτήσεων A και B με τα παραπάνω χαρακτηριστικά. Έτσι ώστε για κάθε συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου λ –και για τον δεδομένο προσανατολισμό του αντίστοιχου μετρητή– να μπορούμε να ξέρουμε αν η έκβαση της μέτρησης θα είναι + ή –.

- ✔ Ελλείψει μιας τέτοιας λεπτομερούς θεωρίας μπορούμε να υποθέσουμε –χωρίς κανέναν περιορισμό γενικότητας– ότι η κρυμμένη παράμετρος λ θα έχει μια τυχούσα στατιστική κατανομή τιμών $P(\lambda)$ με

$$\int_{\Gamma} P(\lambda)\, d\lambda = 1$$

όπου Γ η περιοχή τιμών στην οποία μπορεί να εκτείνεται το λ.

... και η απόδειξη

Χρησιμοποιούνται οι προφανείς σχέσεις

$$A^2(\mathbf{a}, \lambda) = 1, \quad B^2(\mathbf{b}, \lambda) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mathrm{B}} = \mathrm{B}$$

$$\left| A\left(\mathbf{a}, \lambda\right) \ B\left(\mathbf{a}, \lambda\right) \right| = 1$$

καθώς και η γνωστή ανισότητα

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

και, βεβαίως, ο ορισμός της συνάρτησης συσχέτισης $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv C(\theta)$ ως της μέσης τιμής των γινομένων $A(\mathbf{a}, \lambda) \cdot B(\mathbf{b}, \lambda)$ για όλα τα δυνατά λ. Δηλαδή

$$C\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right) = \overline{A\left(\mathbf{a}, \lambda\right) B\left(\mathbf{b}, \lambda\right)} = \int_\Gamma A\left(\mathbf{a}, \lambda\right) B\left(\mathbf{b}, \lambda\right) P\left(\lambda\right) d\lambda$$

κι επειδή μας ενδιαφέρει να δούμε *τι είδους γωνιακή εξάρτηση* μπορεί να έχει η συνάρτηση $C(\theta)$ στο πλαίσιο μιας θεωρίας κρυμμένων μεταβλητών, είναι λογικό να σχηματίσουμε τη διαφορά

$$C(\underbrace{\mathbf{a}, \mathbf{b}}_{\theta}) - C(\underbrace{\mathbf{a}, \mathbf{b}'}_{\theta'})$$

και να δούμε αν μπορούμε να παραγάγουμε ένα άνω όριο γι' αυτήν παίρνοντας την απόλυτη τιμή της.

Έτσι οδηγούμαστε στην ακόλουθη σειρά "κινήσεων" που συνιστούν και τη ζητούμενη απόδειξη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΕΠΙΤΕΛΟΥΣ)

$$C(\mathbf{a},\mathbf{b}) - C(\mathbf{a},\mathbf{b}') = \int_\Gamma \big(A(\mathbf{a},\lambda)B(\mathbf{b},\lambda) - A(\mathbf{a},\lambda)B(\mathbf{b}',\lambda)\big)P(\lambda)\,d\lambda$$

$$= \int_\Gamma A(\mathbf{a},\lambda)B(\mathbf{b},\lambda)\left(1 - \frac{1}{B(\mathbf{b},\lambda)}B(\mathbf{b}',\lambda)\right)P(\lambda)\,d\lambda$$

$$= \int_\Gamma \underbrace{A(\mathbf{a},\lambda)B(\mathbf{b},\lambda)}_{\pm 1}\underbrace{\big(1 + \overset{=-B(\mathbf{b},\lambda)}{A(\mathbf{b},\lambda)}B(\mathbf{b}',\lambda)\big)}_{\geq 0}P(\lambda)\,d\lambda$$

$$\Rightarrow |C(\mathbf{a},\mathbf{b}) - C(\mathbf{a},\mathbf{b}')| \leq \int_\Gamma |A(\mathbf{a},\lambda)B(\mathbf{b},\lambda)|\big(1 + A(\mathbf{b},\lambda)B(\mathbf{b}',\lambda)\big)P(\lambda)\,d\lambda$$

$$= \int_\Gamma \big(1 + A(\mathbf{b},\lambda)B(\mathbf{b}',\lambda)\big)P(\lambda)\,d\lambda$$

$$= \underbrace{\int_\Gamma P(\lambda)\,d\lambda}_{1} + \underbrace{\int_\Gamma A(\mathbf{b},\lambda)B(\mathbf{b}')P(\lambda)\,d\lambda}_{C(\mathbf{b},\mathbf{b}')}$$

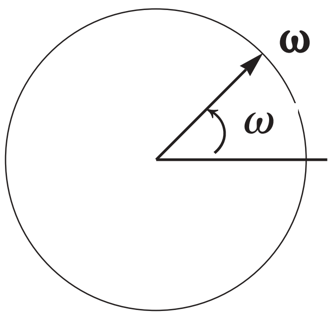
$$\Rightarrow |C(\underbrace{\mathbf{a},\mathbf{b}}_{\theta}) - C(\underbrace{\mathbf{a},\mathbf{b}'}_{\theta'})| - C(\underbrace{\mathbf{b},\mathbf{b}'}_{\theta-\theta'}) \leq 1$$

$$\Rightarrow |C(\theta) - C(\theta')| - C(\theta - \theta') \leq 1$$

ό.έ.δ.

ΕΝΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ...ΚΑΙ ΔΥΟ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

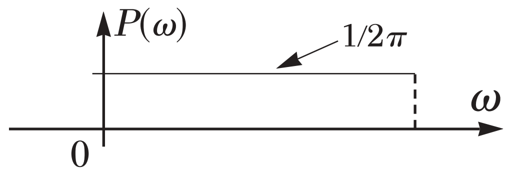
1. Το παράδειγμα



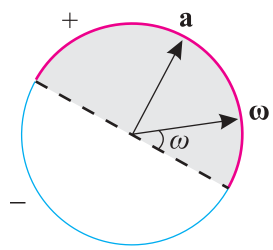
$$A(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) = \mathrm{sign}(\mathbf{a} \bullet \boldsymbol{\omega})$$

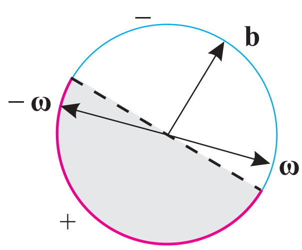
$$B(\mathbf{b}, \boldsymbol{\omega}) = -\ \mathrm{sign}(\mathbf{b} \bullet \boldsymbol{\omega}) \equiv \mathrm{sign}(\mathbf{b} \bullet (-\boldsymbol{\omega}))$$

$$0 \leq \omega < 2\pi$$



Δηλαδή:

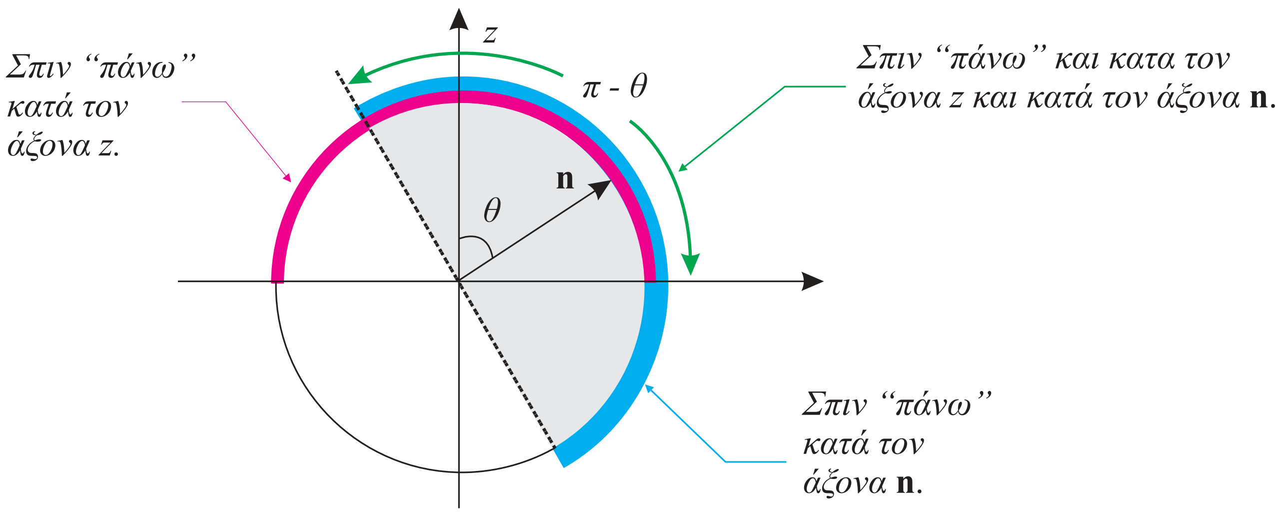
$A(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) =$ 

$B(\mathbf{b}, \boldsymbol{\omega}) =$ 

Πρόκειται για ένα είδος **ρουλέτας**: Αν το διάνυσμα-δείκτης **ω** "σταματήσει" πιο κοντά προς τη θετική κατεύθυνση του διανύσματος **a**, τότε ο μετρητής A θα "βγάλει" +1. Διαφορετικά −1. Και το ίδιο για τον μετρητή B αλλά με διάνυσμα-δείκτη το −**ω**. Ένα "φυσικό" μοντέλο του παραδείγματος είναι να θεωρήσουμε ως διάνυσμα-δείκτη το ίδιο το πραγματικό –αλλά κρυμμένο– διάνυσμα σπιν **s** του κάθε σωματιδίου.

Άσκηση 1: Το σπιν ενός σωματιδίου κατά τον άξονα z έχει μετρηθεί και το αποτέλεσμα είναι +1 (Σπιν "πάνω"). Αν ακολουθήσει μια μέτρηση της προβολής του σπιν σ' έναν άξονα **n** που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα z, ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο με σπιν "πάνω" ως προς αυτόν τον άξονα; Συμφωνεί το αποτέλεσμά σας με την αντίστοιχη κβαντομηχανική πρόβλεψη;
$(P_{+,\mathrm{n}} = \cos^2(\theta/2))$

Απάντηση: (Φανερή από το σχήμα)



$$\Rightarrow P_{+,\mathrm{n}} = \frac{\pi - \theta}{\pi} = 1 - \frac{\theta}{\pi}$$

Σε προφανή διαφωνία με την κβαντομηχανική πρόβλεψη

$$P_{+,\mathrm{n}} = \cos^2(\theta/2)$$

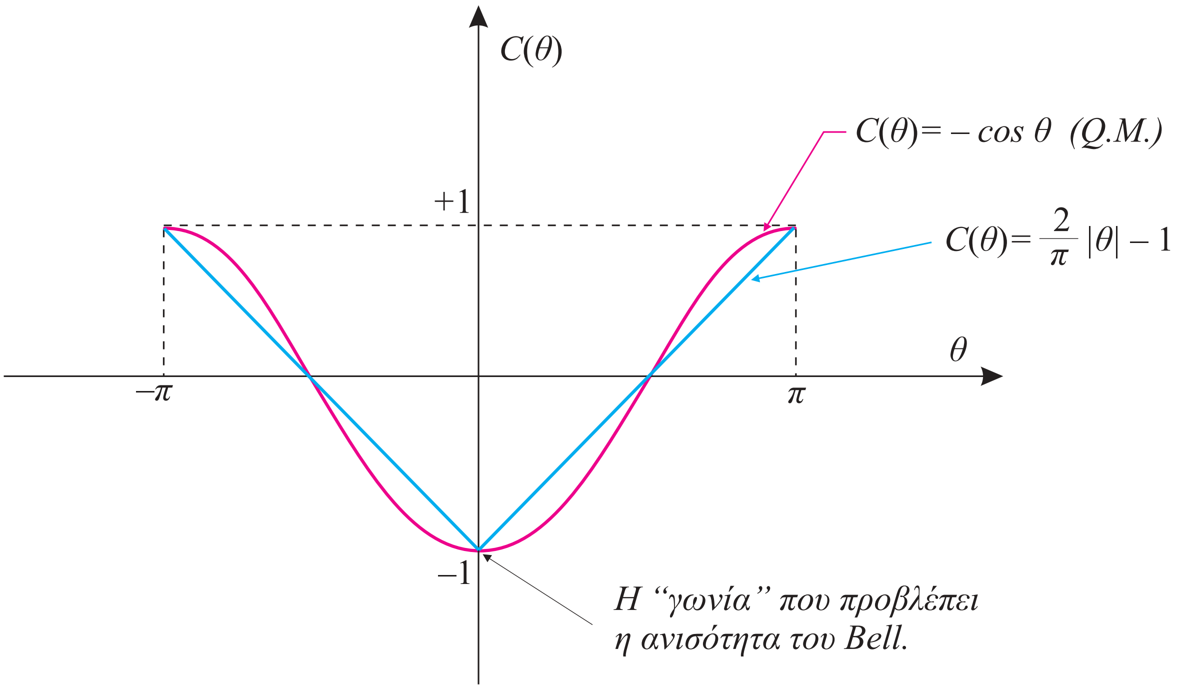
Το μοντέλο απορρίπτεται ακόμα και από τις μετρήσεις του σπιν ενός σωματιδίου όπου η κβαντομηχανική είναι πλήρως επιβεβαιωμένη. (Το μοντέλο δεν πληροί την πρώτη προϋπόθεση του Bell).

Άσκηση 2: (Πρακτικά περιττή μετά τα προηγούμενα)

Να υπολογιστεί η συνάρτηση συσχέτισης για το προηγούμενο μοντέλο

Απάντηση:

$$\boxed{C(\theta) = \frac{2}{\pi}|\theta| - 1} \quad (-\pi \le \theta \le \pi)$$



Η $C(\theta) = \frac{2}{\pi}|\theta| - 1$ ικανοποιεί την ανισότητα του Bell ως ισότητα.

...ΚΑΙ Η ΕΤΥΜΗΓΟΡΙΑ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

Το πείραμα του Aspect

[Aspect, Dalibard, Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982)]

Χρησιμοποιεί φωτόνια και μετρητές πόλωσης αντί σπιν, και οι ανισότητες του Bell είναι λίγο διαφορετικές αλλά της ίδιας ακριβώς φύσεως.

Το αποτέλεσμα: Τα πειραματικά αποτελέσματα για τη συνάρτηση συσχέτισης όχι μόνο παραβιάζουν τις ανισότητες του Bell, αλλά ακολουθούν ακριβώς τη γωνιακή εξάρτηση που προβλέπει η κβαντομηχανική.

Τελικά... ο θεός παίζει ζάρια με τον κόσμο

(και μάλλον είναι... καλός παίκτης αν κρίνουμε από το αποτέλεσμα)

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΔΟΥΛΕΙΑΣ ΤΟΥ BELL

- ✔ Απέδειξε ότι η πειραματική έρευνα των θεμελίων της κβαντομηχανικής είναι δυνατή! Άνοιξε έτσι ένα ολόκληρο νέο πεδίο θεωρητικής και πειραματικής δουλειάς που περιλαμβάνει –μεταξύ άλλων– τον "γενναίο καινούργιο κόσμο" των κβαντικών υπολογιστών.

- ✔ Απ' ό,τι φαίνεται "ο δρόμος που χάραξε ο Bell" θα είναι μακρύς και ίσως μια νέα επανάσταση μας περιμένει στο βάθος.

Όμως η δουλειά του Bell –ως τελικός καρπός της μακρόχρονης μοναχικής προσπάθειας ελάχιστων ανθρώπων– αποτελεί ταυτόχρονα κι έναν "φόρο τιμής" στις πιο θεμελιώδεις αξίες της επιστήμης.

1. Την αξία της βασικής έρευνας

Εκείνης που δεν εμπνέεται από άμεσους πρακτικούς σκοπούς, αλλά από τη θεμελιώδη ανθρώπινη ανάγκη να καταλάβουμε τον κόσμο· την "όρεξη του ειδέναι".

2. Την αξία της ανεξάρτητης σκέψης

Τη σημασία –για την επιστήμη και την κοινωνία– του να υπάρχουν ανεξάρτητα μυαλά. Άνθρωποι που επιμένουν να σκέφτονται διαφορετικά και είναι διατεθειμένοι να πάρουν το ρίσκο μιας μοναχικής διαδρομής.

Και μια και τούτο το έτος είναι αφιερωμένο στον Einstein –ίσως το πιο ανεξάρτητο μυαλό στην ιστορία της επιστήμης– δεν θεωρώ ακατάλληλη την περίσταση να αφιερώσω(-ουμε) σ' όλους τους μοναχικούς περιπατητές της επιστήμης –όσους βάδισαν σε δρόμους απερπάτητους– τους ακόλουθους στίχους του Αμερικανού ποιητή Robert Frost:

Όταν ο δρόμος στο δάσος χώριζε
εγώ πήρα τον λιγότερο περπατημένο.
Κι αυτό έκανε όλη τη διαφορά.

Robert Frost

(The road not taken)

ΤΕΛΟΣ