

Διαφορικές Εξισώσεις

Η γλώσσα της φύσης

Μερικά παραδείγματα

www.cup.gr

Στέφανος Τραχανάς
Ίδρυμα Τεχνολογίας & Έρευνας
Ηράκλειο Κρήτης

I. Αυτόνομα δυναμικά συστήματα:

Πληθυσμιακή δυναμική και όχι μόνο.

II. Ποιος φοβάται τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές;

Η περίπτωση των εξισώσεων Bessel και Legendre.

III. Οι εξισώσεις που άλλαξαν τον κόσμο.

1. Η εξίσωση του Νεύτωνα
2. Οι εξισώσεις Maxwell
3. Η εξίσωση Schrödinger

και μία που «απλώς» τον εξήγησε

4. Η εξίσωση του... σύμπαντος (!)

Αυτόνομα δυναμικά συστήματα

“Δυναμικά” \equiv Διότι ενδιαφερόμαστε για τη χρονική τους εξέλιξη \Rightarrow ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος

“Αυτόνομα” \equiv Διότι η χρονική τους εξέλιξη καθορίζεται μόνο από εσωτερικούς παράγοντες: Ο χρόνος δεν εμφανίζεται εκπεφρασμένα στις εξισώσεις

Μιας μεταβλητής

$$\dot{x} = f(x)$$

Δύο μεταβλητών

$$\dot{x} = F(x, y)$$

$$\dot{y} = G(x, y)$$

Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα

A: Μιας μεταβλητής

Εξίσωση

- $\frac{dN}{dt} = (a - bN)N$

- $\frac{dN}{dt} = k(N_A - N)(N_B - N)$

- $\frac{dN}{dt} = aN(N_0 - N)$

- $\frac{dv}{dt} = g - \lambda v^2$

Εφαρμογή

Οικολογία: Ένα είδος αντιμέτωπο με τον εαυτό του

Χημεία: Εξέλιξη μιας χημικής αντίδρασης ($A + B \rightarrow C$)

Κοινωνιολογία: Διάδοση φημών σε έναν πληθυσμό

Φυσική: Κίνηση στο πεδίο βαρύτητας με τριβή ανάλογη του v^2

B: Δύο μεταβλητών

$$\begin{bmatrix} \dot{x} = a_1(x, y)x = (a_1 - b_1x - c_1y)x \\ \dot{y} = a_2(x, y)y = (a_2 - b_2y - c_2x)y \end{bmatrix}$$

Οικολογία: Ανταγωνιζόμενα είδη

$$\begin{bmatrix} \dot{x} = a(y)x = (a - py)x \\ \dot{y} = -b(x)y = -(b - qx)y \end{bmatrix}$$

Οικολογία: Θηρευτές και θηράματα

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \\ \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \mu(x^2 - 1)y \end{bmatrix}$$

Ηλεκτρολογία: Ο ταλαντωτής Van der Pol

κ.λπ., κ.λπ. . . .

Ποιοτική θεωρία των αυτόνομων δυναμικών συστημάτων

*Τι μπορούμε να πούμε για ένα δυναμικό σύστημα
χωρίς να γνωρίζουμε τη λύση του;*

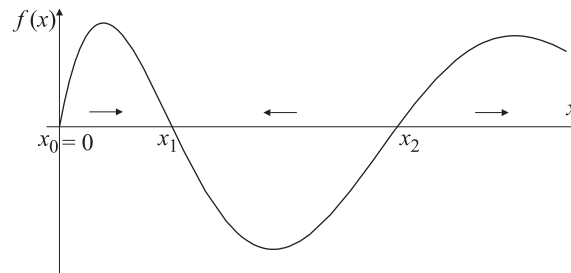
Οι βασικές έννοιες των στάσιμων σημείων και της ευστάθειάς τους

A: Συστήματα μιας μεταβλητής

$$\dot{x} = f(x)$$

Στάσιμα σημεία: $\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

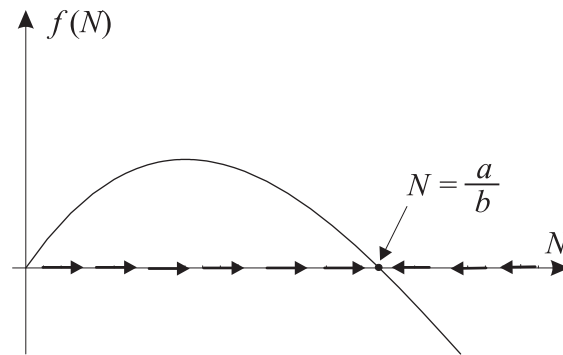
Ανάλυση ευστάθειας:



Παράδειγμα: Το μονοπληθυσμιακό μοντέλο με πεπερασμένα τροφικά αποθέματα (\equiv η λογιστική εξίσωση)

$$\frac{dN}{dt} = (a - bN)N$$

Στάσιμο σημείο \equiv πληθυσμός κόρου: $\frac{dN}{dt} = 0 \Rightarrow N = N_{\infty} = \frac{a}{b}$



με $x(t) = N(t)/N_{\infty} \equiv$ ποσοστό του πληθυσμού κόρου

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = ax(1-x)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{-at}}}$$

$x(0) = x_0$

Πρότυπη μορφή
λογιστικής εξίσωσης

B: Συστήματα δύο μεταβλητών

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) \\ \dot{y} = G(x, y) \end{cases}$$

Στάσιμα σημεία: $\dot{x} = \dot{y} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ανάλυση ευστάθειας ενός στάσιμου σημείου $(x_0, y_0) \Rightarrow$ Μελέτη μικρών αποκλίσεων u, v από τη θέση «ισορροπίας» x_0, y_0 .

$$\begin{aligned} x = x_0 + u & \Rightarrow \dot{u} = F(x_0 + u, y_0 + v) & \text{(Taylor)} & \dot{u} = F_x(x_0, y_0)u + F_y(x_0, y_0)v \\ y = y_0 + v & \Rightarrow \dot{v} = G(x_0 + u, y_0 + v) & \Rightarrow & \dot{v} = G_x(x_0, y_0)u + G_y(x_0, y_0)v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = AV \text{ όπου } V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A \equiv A(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

\Rightarrow Η ευστάθεια εξαρτάται από τις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 της μήτρας A

Μια χρήσιμη ειδική περίπτωση

(λ_1, λ_2 πραγματικά)

- Γενική λύση του συστήματος $\dot{V} = AV$:

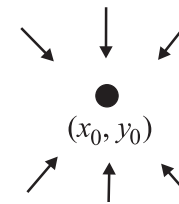
σταθερό διάνυσμα
↙

$$\text{Εκθετική αντικατάσταση } V(t) = Ve^{\lambda t} \Rightarrow AV = \lambda V$$

$$\Rightarrow V(t) = k_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 V_2 e^{\lambda_2 t}$$

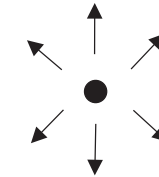
όπου V_1, V_2 τα ιδιοδιανύσματα της μήτρας A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2

Υποπερίπτωση 1: $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow V(t) \rightarrow 0 \Rightarrow$



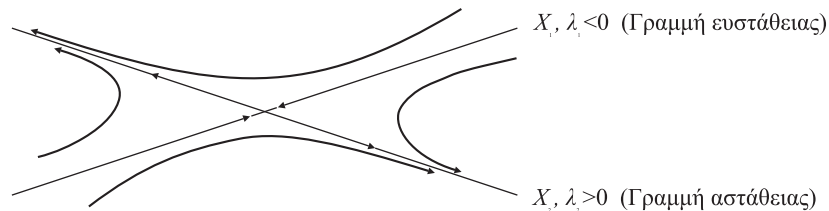
Ευσταθές σημείο

Υποπερίπτωση 2: $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow V(t) \rightarrow \infty \Rightarrow$



Ασταθές σημείο

Υποπερίπτωση 3: $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$



Ασταθές σαγματικό σημείο

Το πιο αντιπροσωπευτικό παράδειγμα

(Ανταγωνιζόμενα είδη: Ειρηνική συνύπαρξη ή επικράτηση του ισχυροτέρου;)

- Η περίπτωση της συνύπαρξης: Ένα παράδειγμα

$$\begin{array}{lll} a_1 = 10, & b_1 = 2, & c_1 = 1 \\ a_2 = 8, & b_2 = 2, & \underbrace{c_2 = 1}_{\text{Σχόλιο}} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{x} &= (10 - 2x - y)x \equiv 10x - 2x^2 - xy \\ \dot{y} &= (8 - 2y - x)y \equiv 8y - 2y^2 - xy \end{aligned} \Rightarrow A(x, y) = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 4x - y & -x \\ -y & 8 - 4y - x \end{pmatrix}$$

Στάσιμα σημεία:

$$(0, 0), \quad (0, 4), \quad (5, 0), \quad (4, 2)$$

Ανάλυση ευστάθειας:

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 8\}, \quad \left\{ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow V(t) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{10t} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8t}$$

$\Rightarrow (0, 0) \equiv$ Ασταθές σημείο (Γιατί; Έπρεπε να το περιμένουμε;) Κύρια διεύθυνση εκροής η $(1, 0)$

- $A(5, 0) = \begin{pmatrix} -10 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\lambda_1 = -10, \lambda_2 = 3\}, \left\{ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix} \right\}$

$$\Rightarrow V(t) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-10t} + k_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$\Rightarrow (5, 0) \equiv$ *Ασταθές σαγματικό σημείο*: Κύρια διεύθυνση ροής η $(5, -13)$

- $A(0, 4) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -8\}, \left\{ V_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\Rightarrow V(t) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-10t} + k_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$\Rightarrow (0, 4) \equiv$ *Ασταθές σαγματικό σημείο* (όπως αναμενόταν). Κύρια διεύθυνση ροής η $(7, -2)$

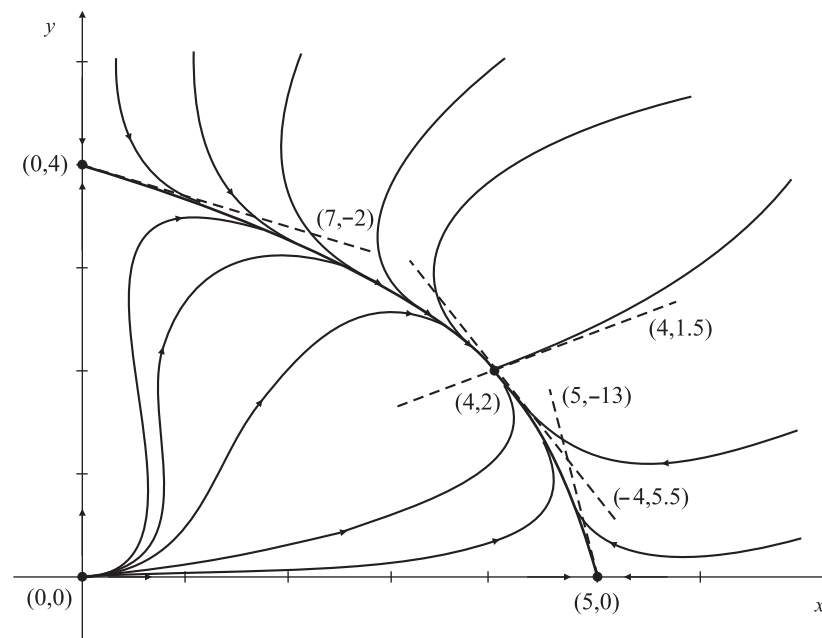
- $A(4, 2) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -2(3 - \sqrt{3}) \approx -2.5 \\ \lambda_2 = -2(3 + \sqrt{3}) \approx -9.5 \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow \left\{ V_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5.5 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1.5 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow V(t) = k_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 5.5 \end{pmatrix} e^{-2.5t} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1.5 \end{pmatrix} e^{-9.5t}$$

$\Rightarrow (4, 2) \equiv$ *Ευσταθές σημείο*: Κύρια διεύθυνση η $(4, -5, 5)$

Συμπέρασμα: Τα είδη οδηγούνται σε ειρηνική συνύπαρξη με «σημείο» ισορροπίας το $(4, 2)$

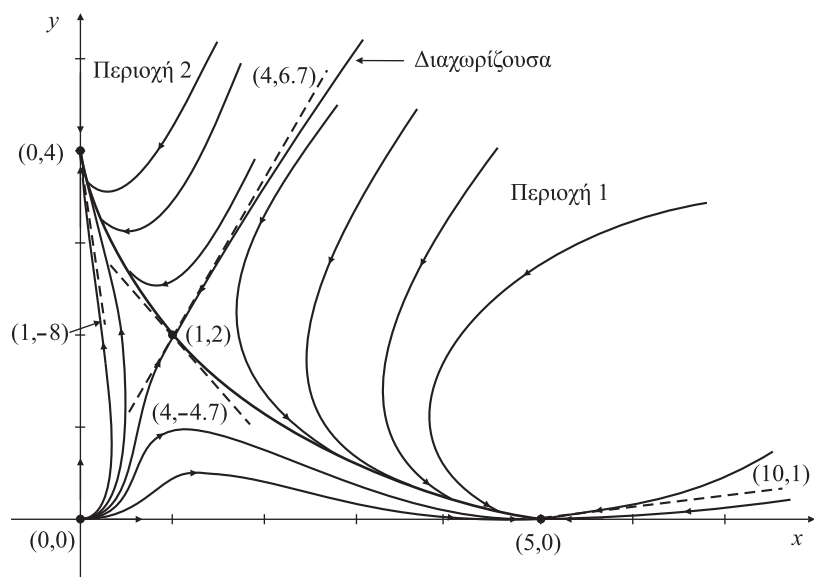
... και το διάγραμμα ροής προς την ισορροπία
(Η φασικό διάγραμμα, όπως συνήθως λέγεται)



και ένα ... κακό παράδειγμα

Όταν ο ανταγωνισμός είναι πολύ ισχυρός (c_1, c_2 μεγάλα) επικρατεί το «ισχυρότερο» είδος και το άλλο εξαφανίζεται

- το παράδειγμα: $a_1 = 10, \quad b_1 = 2, \quad c_1 = 4$
 $a_2 = 8, \quad b_2 = 2, \quad c_2 = 4$
- και τα αποτελέσματα (ευσταθή σημεία τα $(5, 0), (0, 4)$ και ασταθές το $(1, 2)$)



Με αρχικές συνθήκες στην περιοχή 1 επικρατεί το είδος x και με αρχικές συνθήκες στην περιοχή 2, το είδος y .

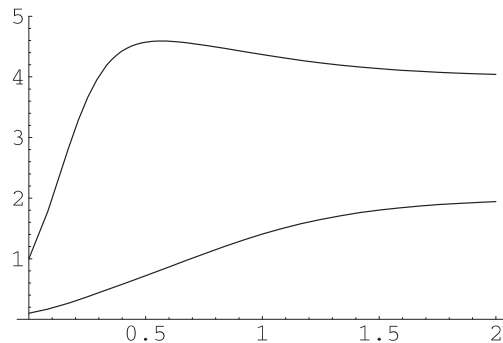
... και μια «πειραματική» μελέτη στον υπολογιστή^(*)

Πείραμα 1: Η χρονική εξέλιξη των πληθυσμών συναρτήσει του χρόνου

```
In[1] := f[a_, b_, T_] := NDSolve[{x'[t] == (10 - 2x[t] - y[t]) *  
x[t], y'[t] == (8 - 2y[t] - x[t]) * y[t], x[0] == a,  
y[0] == b}, {x, y}, {t, 0, T}]
```

```
In[2] := s1 = f[1, 0.1, 2];
```

```
In[3] := Plot[{x[t]/.s1, y[t]/.s1}, {t, 0, 2},  
PlotRange -> {0, 5}]
```



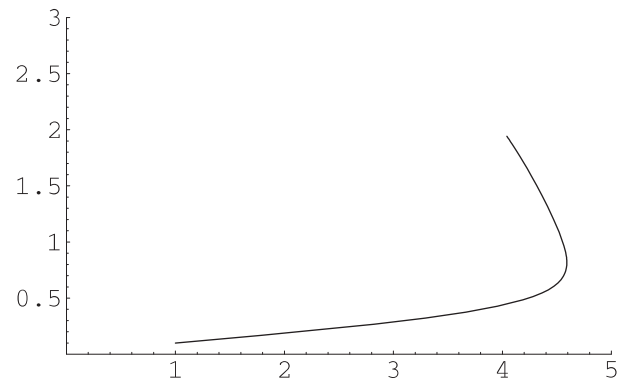
Out[3]= -Graphics-

Και ένα πρακτικό ερώτημα που απαντιέται με τα παραπάνω: Ποια είναι η καλύτερη στιγμή για να ψαρέψουμε τις πέστροφες σε ένα πραγματικό πρόβλημα όπου x = πληθυσμός πέστροφας και y = πληθυσμός πέρκας; (Μονάδα πληθυσμού η χιλιάδα, μονάδα χρόνου π.χ. οι 100 ημέρες.)

^(*) Συγκεκριμένα στο πρόγραμμα *Mathematica*

Πείραμα 2: Η τροχιά στον φασικό χώρο του προηγούμενου συστήματος

```
In[4] := ParametricPlot[{x[t],y[t]}/.s1,{t,0,2},  
PlotRange ->{{0,5},{0,3}},Compiled ->False]
```



```
Out[4]= -Graphics-
```

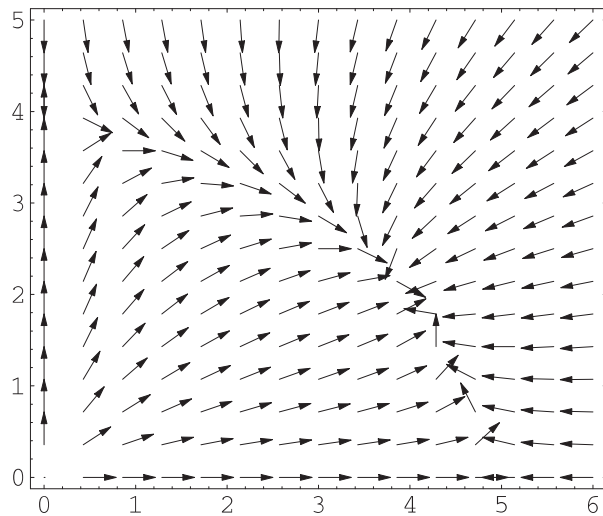
- Σύγκριση με προηγούμενο (Σχόλιο)

- *Πείραμα 3: Τα διαγράμματα ροής για τα παραδείγματα που εξετάσαμε*

```
In[23] := <<Graphics`PlotField`
```

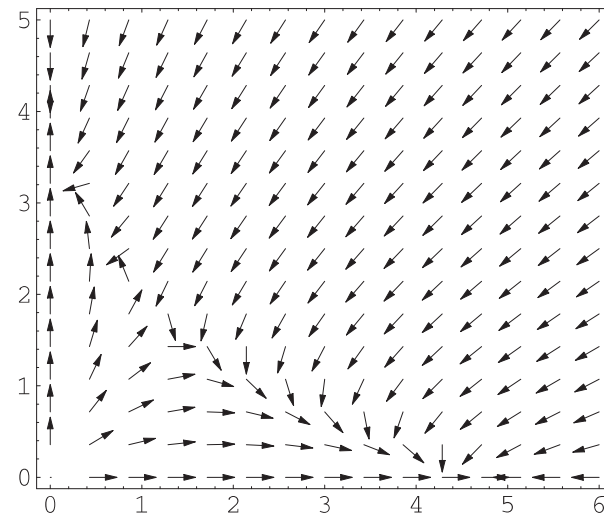
```
In[24] := P[a_,b_,c_,A_,B_,C_] := PlotVectorField[
  {(a-b*x-c*y)*x, (A-B*y-C*x)*y}, {x,0,6},
  {y,0,5}, ScaleFunction ->(1&), Frame ->True]
```

```
In[25] := P[10,2,1,8,2,1]
```



```
Out[25] = -Graphics-
```

```
In[26] := P[10,2,4,8,2,4]
```



```
Out[26] = -Graphics-
```

Θηρευτές και θηράματα: Μια άλλη μορφή ανταγωνισμού

Οι εξισώσεις

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (a - py)x \\ \dot{y} &= -(b - qx)y\end{aligned}$$

Τα κρίσιμα σημεία

$$(0, 0), \left(\frac{b}{q}, \frac{a}{p}\right)$$

... και οι πίνακες ευστάθειας

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \quad A\left(\frac{b}{q}, \frac{a}{p}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -bp/q \\ aq/p & 0 \end{pmatrix}$$

Ευσταθές
σημείο

$\lambda = \pm i\sqrt{ab}$
Ασταθές σημείο

Κατευθείαν λύση του συστήματος των μικρών κινήσεων γύρω από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας

$$\dot{V} = A(b/q, a/p)V \Rightarrow \dot{u} = -\frac{bp}{q}v, \quad \dot{v} = \frac{aq}{p}u$$

$$\Rightarrow \ddot{u} + abu = 0 \Rightarrow u = A \cos(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow v = -\frac{q}{pb}\dot{u} = B \sin(\omega t + \phi), \quad B = \frac{q}{p}\sqrt{\frac{a}{b}}A$$

\Rightarrow Το $(b/q, a/p)$ είναι ευσταθές σημείο νέου τύπου: Το «σωμάτιο» δεν απομακρύνεται από αυτό αλλά ούτε και το πλησιάζει. Απλώς περιφέρεται γύρω του.

Συμπεράσματα

1. Η περίοδος $T = 2\pi/\sqrt{ab}$ είναι ανεξάρτητη από τις παραμέτρους p και q .
2. Διαφορά φάσεως $\pi/2$ στους πληθυσμούς θηράματος-θηρευτή. Προηγείται το θήραμα και «σύρει» μαζί του τον θηρευτή.
3. Οι μέγιστες αποκλίσεις των πληθυσμών από τη θέση ισορροπίας έχουν σταθερό λόγο

$$\frac{u_{\max}}{v_{\max}} = \frac{p}{q}\sqrt{\frac{a}{b}}$$

και τα ... πειραματικά αποτελέσματα

Για: $a = 4, p = 3, b = 1, q = 1 \Rightarrow (b/q, a/p) = (1, 4/3), T = \pi, u_{\max}/v_{\max} = 3/2$

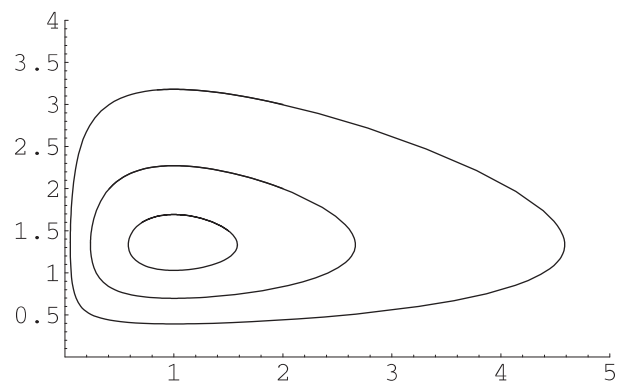
```
In[1] := f[a_, b_, T_] := NDSolve[{x'[t] == x[t] * (4 - 3y[t]),  
  y'[t] == y[t] * (x[t] - 1), x[0] == a, y[0] == b}, {x, y},  
  {t, 0, T}]
```

```
In[2] := s1 = f[1.5, 1.5, 20];
```

```
In[3] := s2 = f[2, 2, 20];
```

```
In[4] := s3 = f[2, 3, 20];
```

```
In[5] := ParametricPlot[{x[t], y[t]}/.s1, {x[t],  
  y[t]}/.s2, {x[t], y[t]}/.s3, {t, 0, 5},  
  PlotRange -> {{0, 5}, {0, 4}}, Compiled -> False]
```



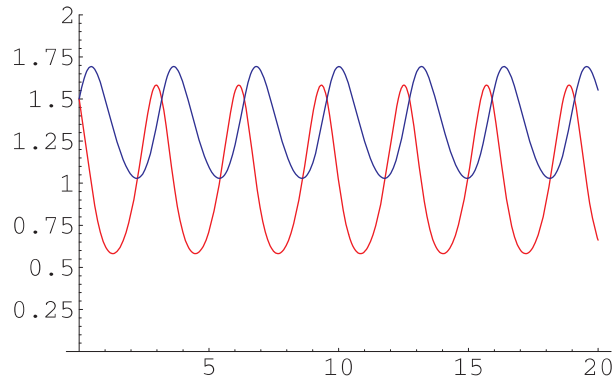
```
Out[5]= -Graphics-
```

Συμπέρασμα: Οι τροχιές στον φασικό χώρο είναι κλειστές καμπύλες όχι μόνο για μικρές αλλά και για μεγάλες αποκλίσεις από την ισορροπία.

... και η χρονική μεταβολή των πληθυσμών

α) Για τη μικρή τροχιά

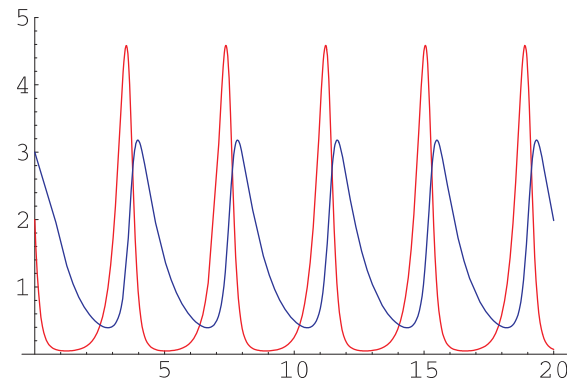
```
In[6]:=Plot[{x[t]/.s1,y[t]/.s1},{t,0,20},  
PlotRange->{0,2},PlotStyle->{{RGBColor  
[1,0,0]},{RGBColor[0,0,1]}}
```



Out[6]= -Graphics-

β) Για τη μεγάλη τροχιά

```
In[7]:=Plot[{x[t]/.s3,y[t]}/.s3},{t,0,20},  
PlotRange->{0,5},PlotStyle->{{RGBColor  
[1,0,0]},{RGBColor[0,0,1]}}
```



Out[7]= -Graphics-

• και η σύγκριση με τη θεωρία (που ισχύει μόνο για τις «μικρές» τροχιές)

✓ Περίοδος: $T_{\text{θεωρία}} = \pi$, $T(\text{Out}[6]) = 3$, $T(\text{Out}[7]) \approx 4$

✓ $\frac{u_{\max}}{v_{\max}} \Big|_{\text{θεωρία}} = 1,5$, $\text{Out}[6] \approx 1,5$, $\text{Out}[7] \approx 1,64$

✓ Διαφορά φάσεως = $\pi/2$: Πράγματι, η κορυφή της κόκκινης καμπύλης είναι πάντα περίπου στο μέσον μεταξύ μεγίστου και ελαχίστου της μπλε

συν την ακριβή λύση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(qx - b)y}{(a - py)x} = \frac{qx - b}{x} \cdot \frac{y}{a - py} = \text{χωριζόμενων μεταβλητών}$$

$$\Rightarrow \int \frac{a - py}{y} dy = \int \frac{qx - b}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \ln(x^b y^a) - qx - py = \text{σταθερά}$$

ή ισοδύναμα: $x^b y^a = ce^{qx+py}$ (η εξίσωση των τροχιών σε πεπλεγμένη μορφή)

και για το συγκεκριμένο μοντέλο ($a = 4, p = 3, b = 1, q = 1$)

$$xy^4 = ce^{x+3y} \quad (1)$$

Ερώτημα για συζήτηση: Είναι πάντα χρήσιμες οι ακριβείς λύσεις;
(Π.χ. δοκιμάστε να αποδείξετε με βάση την (1) έστω και μόνο το γεγονός ότι οι τροχιές του συστήματος είναι κλειστές.)

Η εκπαιδευτική χρησιμότητα των πληθυσμιακών και άλλων συναφών μοντέλων

- 1. Καλλιεργούν και αναπτύσσουν το διεπιστημονικό πνεύμα και την ικανότητα μαθηματικής διατύπωσης πραγματικών προβλημάτων.* Μας μαθαίνουν να βγαίνουμε από το «καβούκι» της ειδικότητάς μας, να επικοινωνούμε με τους «δίπλα», να καταλαβαίνουμε το πρόβλημα που μας θέτουν και να προσπαθούμε –όσο γίνεται– να του δώσουμε μια μαθηματική διατύπωση που να αποδίδει τα κύρια χαρακτηριστικά του. Και βέβαια να μάθουμε να εξηγούμε τι κάνουμε χωρίς τρομοκρατική ορολογία και άλλες... κακές συνήθειες.
- 2. Αποτελούν την ομαλότερη δυνατή εισαγωγή στην ποιοτική θεωρία των διαφορικών εξισώσεων.* Ο σπουδαστής εκτίθεται (μάλλον για πρώτη φορά) στην εκπληκτική ιδέα ότι μπορεί να μάθει πάρα πολλά –και καίρια– πράγματα για τη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης χωρίς να λύσει την εξίσωση!
- 3. Αναδεικνύουν την μοναδική αξία του υπολογιστή ως αναπόσπαστου στοιχείου ενός σύγχρονου περιβάλλοντος επίλυσης και μελέτης των διαφορικών εξισώσεων.* Καλώς εχόντων των πραγμάτων, δεν θα έπρεπε πια να γίνονται μαθήματα διαφορικών εξισώσεων χωρίς ένα «υπολογιστικό εργαστήριο» ως αναπόσπαστο μέρος τους.

4. *Απαιτούν ουσιώδη χρήση γραμμικής άλγεβρας.* Δηλαδή του άλλου βασικού εργαλείου –δίπλα στις διαφορικές εξισώσεις– στην «εργαλειοθήκη» ενός σύγχρονου μηχανικού ή φυσικού επιστήμονα.
5. *Διευκολύνουν την ίδια τη μαθηματική κατανόηση ενός προβλήματος εμπλουτίζοντας την ξηρή μαθηματική περιγραφή του με τη ζωντάνια ενός πραγματικού φυσικού συστήματος.* Δοκιμάστε να σκεφτείτε το μοντέλο θηρευτή-θηράματος χωρίς καμία φυσική εικόνα και θα δείτε τη διαφορά. Ακόμα και ο καθαρός μαθηματικός υποβοηθείται από τη νοητική χρήση ενός φυσικού μοντέλου, όπου ένα τέτοιο μοντέλο είναι δυνατό.

Συμπέρασμα: Τα πληθυσμιακά μοντέλα προσφέρονται ως ένα εξαιρετικό εργαλείο στη διδασκαλία των διαφορικών εξισώσεων. Προτείνω να τους δώσουμε μια καλύτερη θέση στα προγράμματα και τα βιβλία μας. **Θα αρχίσω με το δικό μου!**